TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR F (MHA081)

Tid: Fredagen den 13:e januari 2006, klockan 14.00–18.00, i V-huset
Lärare: Peter Hansbo, ankn 1494

Salsbesök av lärare: c:a kl 15.00 och 17.00.
Lösningar: anslås på Inst. för tillämpad mekanik, nya M-huset, och på kurshemsidan efter tentamen.
Preliminärt rättningsresultat: anslås på Inst. för tillämpad mekanik senast den 27/1.
Rättningsgranskning: sker på Inst. för tillämpad mekanik 27/1 kl 12.00–13.00.

Tillåtna hjälpmedel:

1. Grundläggande hållfasthetslära av Hans Lundh, KTH Inst. för hållfasthetslära, valfri upplaga.

2. Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga eller utdrag ur denna; vid Inst. för tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Egna anteckningar får finnas på befintliga sidor i Grundläggande hållfasthetslära, dock inga lösta exempel. I övrigt tillåts inga egna anteckningar. Om hjälpmedel används vid lösning av problem skall referens och sidhänvisning ges.

Poängbedömning: Uppgifterna kan vardera maximalt ge 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

Betygsgränser	Poäng
3	10–14
4	15–19
5	20–

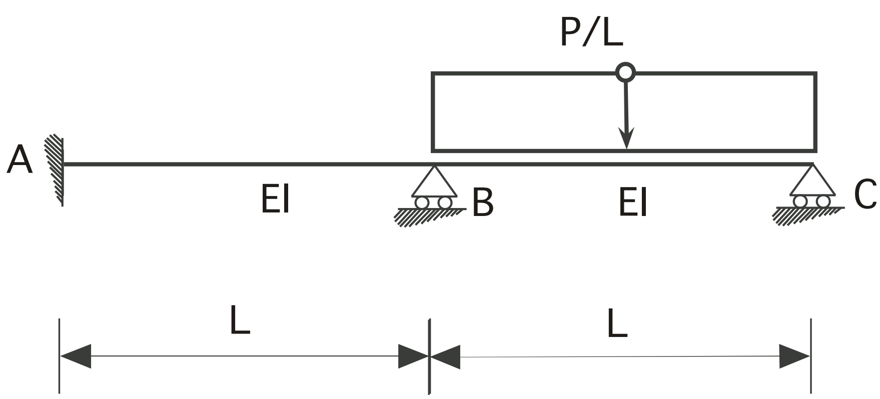
Uppgifterna är **ej** ordnade efter svårighetsgrad. Läs gärna igenom alla uppgifter innan du sätter igång och räknar. Börja sedan med de uppgifter du känner dig säker på.

Räkna lugnt!

Uppgifter

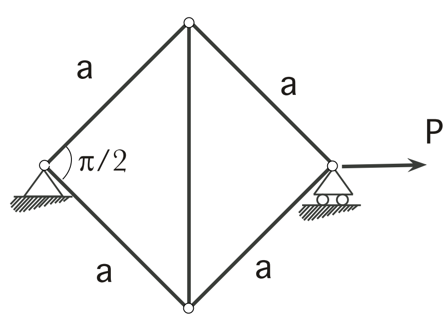
1 En balk med böjstyvhet EI och längd $2L$ är lagrad och belastad enligt figur. Bestäm största positiva och negativa moment i balken till läge och storlek.

(5p)



2 Fem stänger med böjstyvhet EI är ledat fästa i varandra, see figur. Bestäm kritisk last (i planet) för konstruktionen när belastningen är enligt figuren.

(5p)

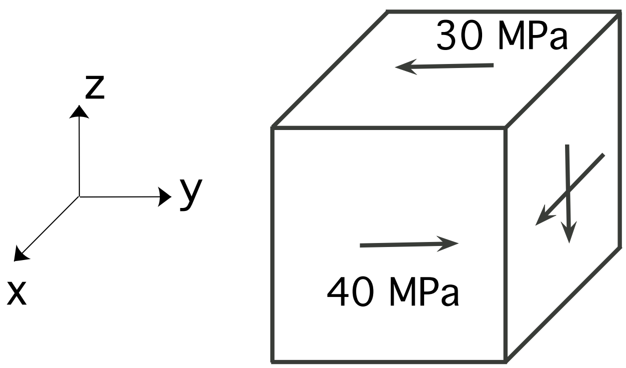


3 En cirkulär axel med diameter D och längd L belastas med ett vridmoment M_v. Axeln borras ur med ett centralt placerat hål så att vikten minskas till hälften. Hur stort vridande moment (uttryckt i M_v) kan den modifierade axeln bära om vare sig skjuvspänning eller vridvinkel får öka jämfört med den massiva axeln.

(5p)

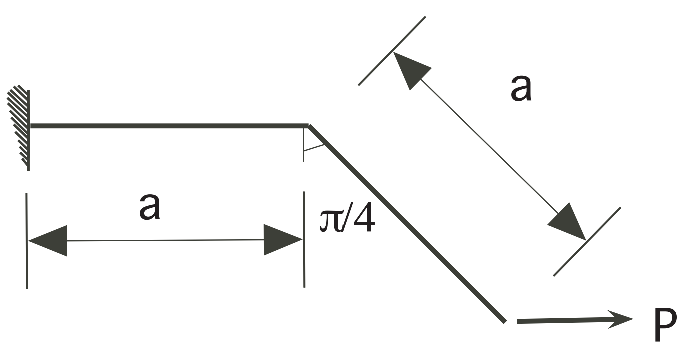
4 I en punkt i en belastad kropp råder spänningstillståndet enligt figur. Ställ upp motsvarande spänningsmatris och beräkna huvudspänningarna och huvudspänningsriktningarna.

(5p)



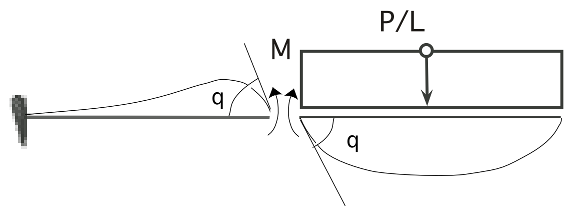
5 Balkkonsolen i figuren har konstant böjstyvhet EI. Beräkna horisontell och vertikal förskjutning av lastens angreppspunkt med hjälp av lämplig energimetod.

(5p)



Lösningar, 060113

1 En balk med böjstyvhet EI och längd $2L$ är lagrad och belastad enligt figur. Bestäm största positiva och negativa moment i balken till läge och storlek.



Svar: Elementarfall ger att

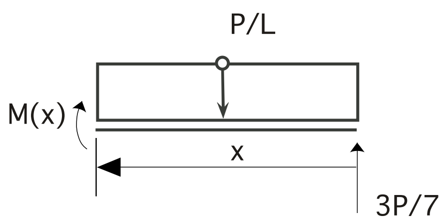
$$q = -\frac{ML}{4EI} = \frac{ML}{3EI} + \frac{PL^2}{24EI}.$$

Detta ger

$$M = -\frac{PL}{14}.$$

Momentjämvikt kring B för delen BC ger sedan att stödreaktionen R_C blir

$$R_C = \frac{3P}{7}.$$



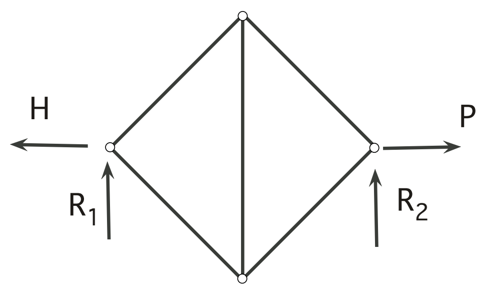
För högra balkdelen fås

$$M(x) = PL\left(\frac{3x}{7L} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right), \quad \frac{dM}{dx} = PL\left(\frac{3}{7L} - \frac{x}{L^2}\right).$$

$dM/dx = 0$ för $x = 3L/7$, och $M(3L/7) = 9PL/98$. Svaret blir alltså

$\boxed{M = -PL/14 \text{ vid stöd B och } M = 9PL/98 \text{ sträckan } 3L/7 \text{ vänster om högra stödet.}}$

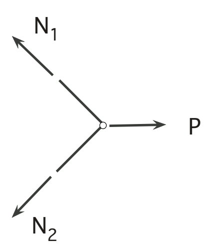
2 Fem stänger med böjstyvhet EI är ledat fästa i varandra, see figur. Bestäm kritisk last (i planet) för konstruktionen när belastningen är enligt figuren.

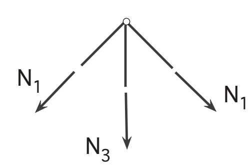


Svar: Studera ett utböjt läge med införda krafter. Jämvikt ger

$$R_1 = 0,\ R_2 = 0,\ H = P.$$

Vi betraktar sedan jämvikt i knutarna:





Vi har att $N_1 = N_2$, $N_1 = P/\sqrt{2}$ och $N_2 = -P$. Alltså är den vertikala stången tryckt och vi får:

$$\boxed{P_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 EI}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{\pi^2 EI}{2a^2}.}$$

3 En cirkulär axel med diameter D och längd L belastas med ett vridmoment M_v. Axeln borras ur med ett centralt placerat hål så att vikten minskas till hälften. Hur stort vridande moment (uttryckt i M_v) kan den modifierade axeln bära om vare sig skjuvspänning eller vridvinkel får öka jämfört med den massiva axeln.

Svar: Kalla den inre diametern i den utborrade axeln d och axelns densitet ρ. Vi har att

$$\pi((D/2)^2 - (d/2)^2)L\rho = \pi(D/2)^2 L\rho/2,$$

dvs.

$$(D/2)^2 - (d/2)^2 = (D/2)^2/2 \Rightarrow d = D/\sqrt{2}.$$

Vidare är

$$\varphi^{\max} = \frac{2M_v L}{G\pi(D/2)^4} = \frac{2M^{\max} L}{G\pi((D/2)^4 - (D/2\sqrt{2})^4} \Rightarrow M^{\max} = \frac{3}{4}M_v$$

och eftersom $\tau^{\max} = (D/2)\varphi^{\max} G/L$ får vi

$$\boxed{M^{\max} = \tfrac{3}{4}M_v.}$$

4 I en punkt i en belastad kropp råder spänningstillståndet enligt figur. Ställ upp motsvarande spänningsmatris och beräkna huvudspänningarna och huvudspänningsriktningarna.

Ur figuren får vi att $\tau_{xy} = 40$ MPa, $\tau_{zy} = -30$ MPa, övriga spänningar noll. Alltså

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 40 & 0 \\ 40 & 0 & -30 \\ 0 & -30 & 0 \end{bmatrix}$$

och vi skall lösa egenvärdesproblemet

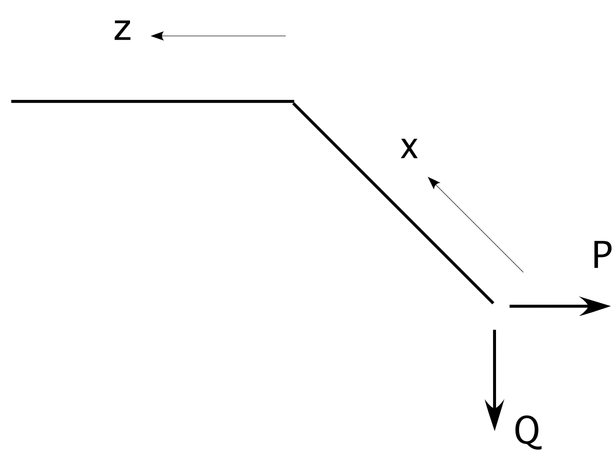
$$\begin{vmatrix} -\sigma & 40 & 0 \\ 40 & -\sigma & -30 \\ 0 & -30 & -\sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2500\sigma - \sigma^3 = 0,$$

med lösningar $\sigma_1 = 50$ MPa, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -50$ MPa. Huvudspänningsriktningarna fås t.ex. genom att lösa

$$\begin{gathered} -\sigma_i n_i^x + 40 n_i^y = 0 \\ 40 n_i^x - \sigma n_i^y - 30 n_i^z = 0 \\ (n_i^x)^2 + (n_i^y)^2 + (n_i^z)^2 = 1, \end{gathered}$$

viljket ger $\boldsymbol{n}_1 = \pm(4/5, 1, -3/5)/\sqrt{2}$, $\boldsymbol{n}_2 = \pm(3, 0, 4)/5$ och $\boldsymbol{n}_3 = \pm(-4/5, 1, 3/5)/\sqrt{2}$.

5 Balkkonsolen i figuren har konstant böjstyvhet EI. Beräkna horisontell och vertikal förskjutning av lastens angreppspunkt med hjälp av lämplig energimetod.



Svar: Enklast är kanske att använda Castiglianos 2:a sats. Vi inför en fiktiv kraft Q som verkar vertikalt i lasten P:s angreppspunkt.

För den vinklade delen är

$$M(x) = Px/\sqrt{2} - Qx/\sqrt{2}.$$

För den horisontella

$$M(z) = Pa/\sqrt{2} - Qa/\sqrt{2} - Qz$$

Vi har att (med $Q = 0$ insatt)

$$p_x = \frac{\partial W}{\partial P} = \int_0^a \frac{Px^2}{2EI}\,dx + \int_0^a \frac{Pa^2}{2EI}\,dz = \frac{2Pa^3}{3EI}.$$

$$p_y = \frac{\partial W}{\partial P} = \int_0^a -\frac{Px^2}{2EI}\,dx + \int_0^a \frac{Pa^2}{\sqrt{2}EI}\left(-z - a/\sqrt{2}\right)\,dz = -\frac{8+3\sqrt{2}}{12EI}Pa^3.$$

Svaret är alltså

$$\boxed{p_x = \frac{2Pa^3}{3EI} \text{ åt höger, } p_y = \frac{8+3\sqrt{2}}{12EI}Pa^3 \text{ uppåt.}}$$