TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR F (MHA081)

Tid: Fredagen den 19:e augusti 2005, klockan 08.30–12.30, i V-huset
Lärare: Peter Hansbo, ankn 1494

Salsbesök av lärare: c:a kl 9.30 och 11.30.
Lösningar: anslås på Inst. för tillämpad mekanik, nya M-huset, och på kurshemsidan efter tentamen.
Preliminärt rättningsresultat: anslås på Inst. för tillämpad mekanik senast den 25/8.
Rättningsgranskning: sker på Inst. för tillämpad mekanik 26/8 kl 12.00–13.00.

Tillåtna hjälpmedel:

1. Grundläggande hållfasthetslära av Hans Lundh, KTH Inst. för hållfasthetslära, valfri upplaga.
2. Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga eller utdrag ur denna; vid Inst. för tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.
3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.
4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Egna anteckningar får finnas på befintliga sidor i Grundläggande hållfasthetslära, dock inga lösta exempel. I övrigt tillåts inga egna anteckningar. Om hjälpmedel används vid lösning av problem skall referens och sidhänvisning ges.

Poängbedömning: Uppgifterna kan vardera maximalt ge 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

Betygsgränser	Poäng
3	10–14
4	15–19
5	20–

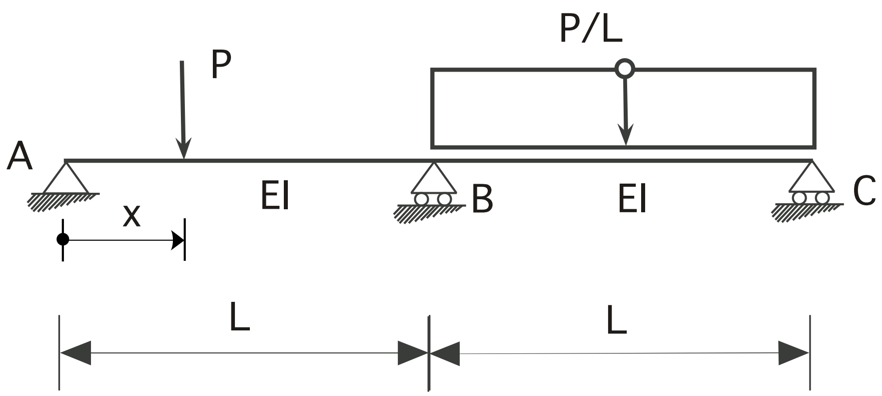
Uppgifterna är **ej** ordnade efter svårighetsgrad. Läs gärna igenom alla uppgifter innan du sätter igång och räknar. Börja sedan med de uppgifter du känner dig säker på.

Räkna lugnt!

Uppgifter

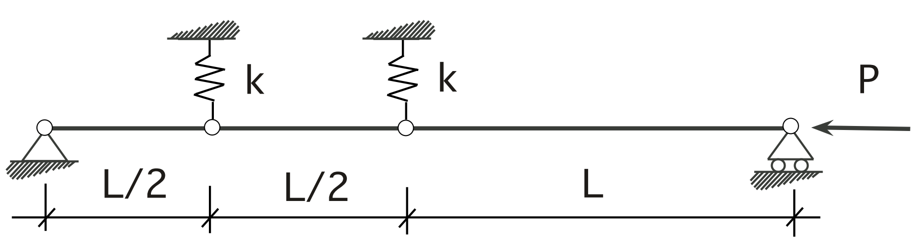
1 En balk med böjstyvhet EI och längd $2L$ är lagrad och belastad enligt figur. Punktlasten P kan flyttas mellan A och B. Bestäm farligaste läge av punktlasten med avseende på momentet vid stöd B (dvs. det läge som ger störst absolutvärde på momentet).

(5p)



2 Tre <u>stela</u> stänger är ledat fästa i varandra enligt figur. Lederna är stödda av fjädrar med fjäderstyvhet k. Bestäm kritisk last för konstruktionen samt rita motsvarande deformationsmod.

(5p)

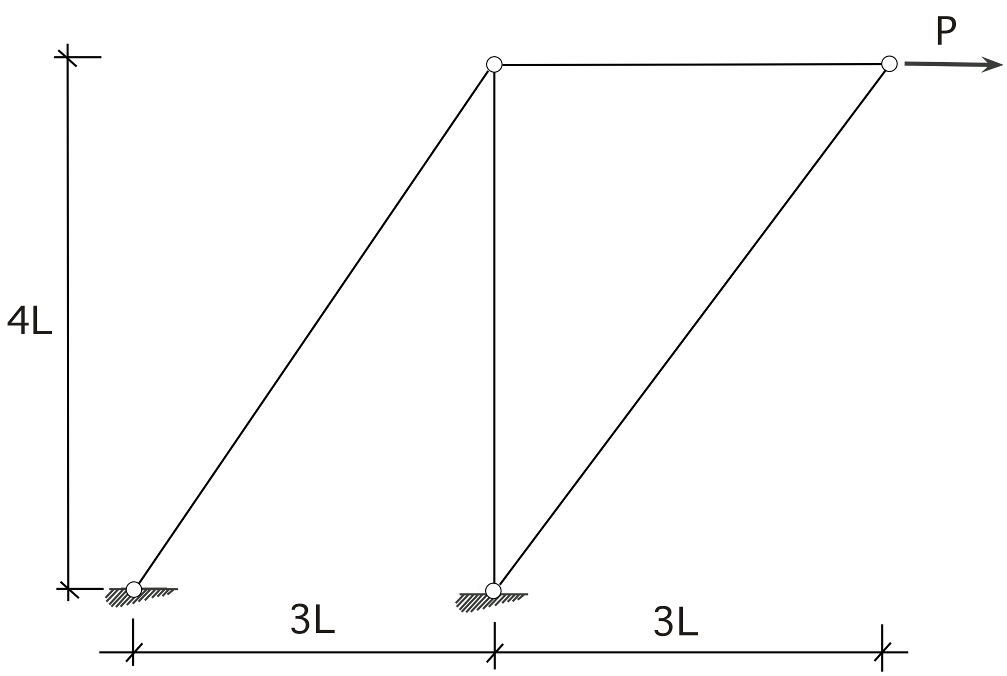


3 En linjärelastisk kub, med materialparametrar $E = 200$ GPa och $\nu = 0.3$, faller ned till botten av Marianergraven. Med hur många procent minskar kubens volym jämfört med volymen vid ytan? Ledning: Marianergraven är c:a 11000 m djup. Var tionde meter ökar trycket med c:a 100 kPa (en atmosfär).

(5p)

4 Stängerna i bärverket enligt figur är ledat fästa i varandra och i marken. Beräkna kritisk last P_{kr} med avseende på böjknäckning i planet. Alla stänger har böjstyvhet EI.

(5p)

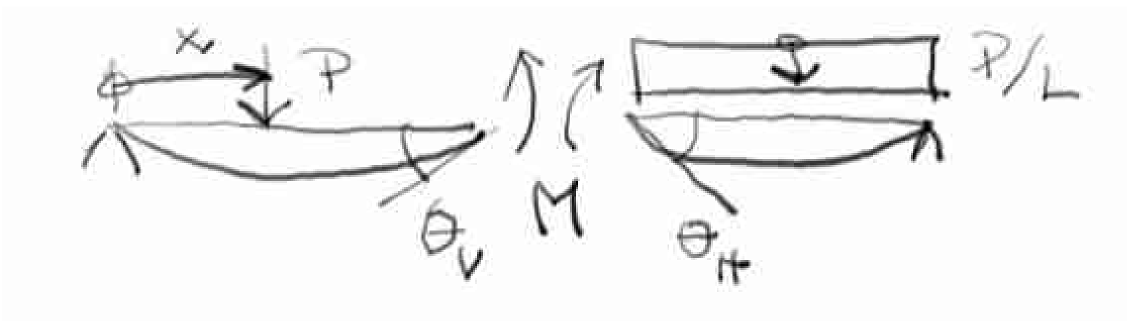


5 Betrakta samma bärverk som i uppgift 4. Beräkna horisontella och vertikala förskjutningen av lastens angreppspunkt om alla stänger har samma axialstyvhet EA.

(5p)

Lösningar, 050819

1 En balk med böjstyvhet EI och längd $2L$ är lagrad och belastad enligt figur. Punktlasten P kan flyttas mellan A och B. Bestäm farligaste läge av punktlasten med avseende på momentet vid stöd B (dvs. det läge som ger störst absolutvärde på momentet).



Svar: Elementarfall ger att

$$\theta_V = \frac{ML}{3EI} + \frac{PxL}{6EI}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right), \quad \theta_H = \frac{ML}{3EI} + \frac{PL^2}{24EI}.$$

Geometrivillkoret $\theta_V = -\theta_H$ ger sedan

$$M(x) = -\frac{P\,(L^3 + 4\,L^2\,x - 4\,x^3)}{16\,L^2},$$

och extrema fås genom att derivera m.a.p x, vilket ger

$$x^2 = L^2/3, \quad x = \pm\frac{L}{\sqrt{3}}$$

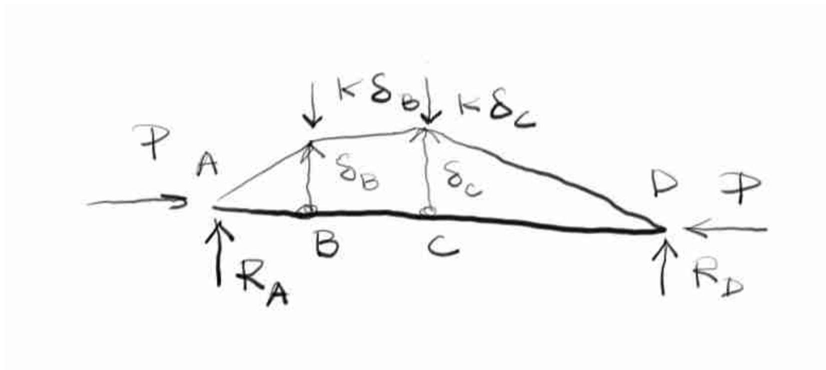
Den fysikaliskt möjliga roten $x = L/\sqrt{3}$ ger momentminimum eftersom

$$M''(x) = \frac{3Px}{2L} > 0 \quad \text{för} \quad x > 0.$$

Eftersom M är negativt för $0 \le x \le L$ blir svaret alltså

$$\boxed{x = L/\sqrt{3}.}$$

2 Tre stela stänger är ledat fästa i varandra enligt figur. Lederna är stödda av fjädrar med fjäderstyvhet k. Bestäm kritisk last för konstruktionen samt rita motsvarande deformationsmod.



Svar: Studera ett utböjt läge med införda krafter. Momentjämvikt kring A ger

$$2R_B L - \frac{kL}{2}\delta_B - k\delta_C = 0, \quad R_D = \frac{k}{4}\delta_B + \frac{k}{2}\delta_C.$$

Momentjämvikt kring C ger $P\delta_C - R_D L = 0$ och vi får

$$P\delta_C - \frac{kL}{4}\delta_B - \frac{kL}{2}\delta_C = 0. \tag{1}$$

En momentjämvikt kring B ger slutligen

$$P\delta_B + k\delta_C\frac{L}{2} - R_D\frac{3L}{2} = 0,$$

dvs.

$$P\delta_B - \frac{3}{8}kL\delta_B - \frac{1}{4}kL\delta_C = 0. \tag{2}$$

Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} P - 3kL/8 & -kL/4 \\ -kL/4 & P - kL/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_B \\ \delta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

vilket, för nollskilda förskjutningar, kräver att

$$(P - 3kL/8)(P - kL/2) - k^2L^2/16 = 0, \quad \text{dvs.} \quad P_{\text{kr}} = \frac{7 - \sqrt{17}}{16}kL.$$

För att bestämma deformationsmoden införs lösningen i ekvationssystemet vilket ger

$$\left(\frac{7 - \sqrt{17}}{16}kL - 3kL/8\right)\delta_B = \frac{kL}{4}\delta_C,$$

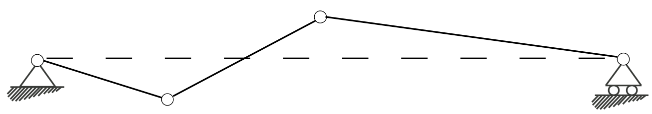
Sätt $\delta_C = 4$ vilket ger

$$\delta_B = -\frac{16}{\sqrt{17}-1} \approx -5.12$$

Svar:

$$\boxed{P_{\text{kr}} = \frac{7-\sqrt{17}}{16} kL.}$$

Deformationsmod (eller motsvarande speglad) blir



3 En linjärelastisk kub, med materialparametrar $E = 200$ GPa och $\nu = 0.3$, faller ned till botten av Marianergraven. Med hur många procent minskar kubens volym jämfört med volymen vid ytan? Ledning: Marianergraven är c:a 11000 m djup. Var tionde meter ökar trycket med c:a 100 kPa (en atmosfär).

Svar: Enligt linjär elasticitetsteori gäller

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

där ΔV är volymsförändringen och V_0 är den ursprungliga volymen. Jämvikt ger att $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\Delta p$, där Δp är tryckhöjningen. Hookes lag säger att

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right), \quad \text{etc.}$$

Vi får alltså töjningar

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\Delta p}{E}(1-2\nu)$$

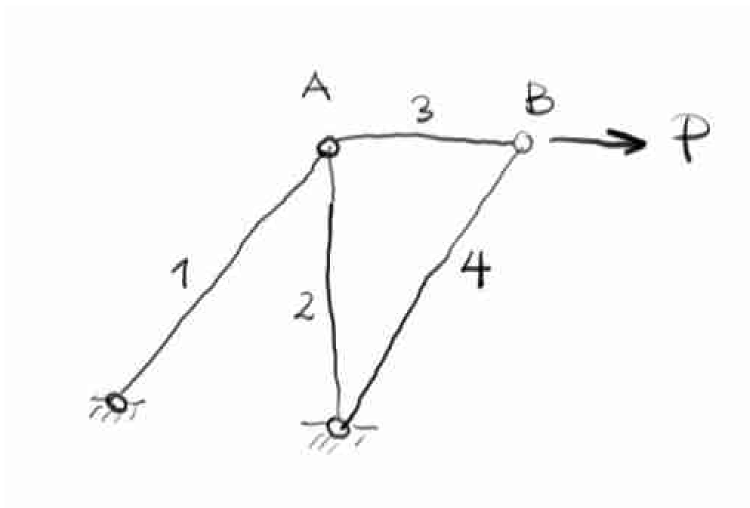
och

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{3\,\Delta p}{E}(1-2\nu) = -\frac{3 \times 1100 \times 100 \times 10^3}{200 \times 10^9} \times (1 - 2 \times 0.3) = -0.00066,$$

dvs.

$$\boxed{\text{Kuben utsätts för en volymminskning på } 0.066\%.}$$

4 Stängerna i bärverket enligt figur är ledat fästa i varandra och i marken. Beräkna kritisk last P_{kr} med avseende på böjknäckning i planet. Alla stänger har böjstyvhet EI.



Svar: Bestäm först normalkrafterna i alla stänger. Vertikal jämvikt för knut B ger $N_4 = 0$, horisontell att $N_3 = P$ (normalkrafter definieras positivt som dragna). Därefter ger horisontell jämvikt i knut A att $N_1 = 5P/3$ och vertikal jämvikt att $N_2 = -4N_1/5 = -4P/3$. Den enda tryckta stången är alltså nummer 2, och den knäcker som en Eulertvåa, dvs

$$-N_{2,\mathrm{kr}} = \frac{\pi^2 EI}{(4L)^2},$$

vilket ger

$$\boxed{P_{\mathrm{kr}} = \frac{3\pi^2 EI}{64L^2}.}$$

5 Betrakta samma bärverk som i uppgift 4. Beräkna horisontella och vertikala förskjutningen av lastens angreppspunkt om alla stänger har samma axialstyvhet EA.

Svar: Enkast är kanske att använda Castiglianos 2:a sats. Vi inför en fiktiv kraft V som verkar vertikalt i lasten P:s angreppspunkt. Stångkrafter p.g.a. V fås genom jämvikt till

$$N_1^V = \frac{5}{4}V, \quad N_2^V = -V, \quad N_3^V = \frac{3}{4}V, \quad N_4^V = -\frac{5}{4}V.$$

För stukturen belastad med både P och V gäller att $N_i^{\text{tot}} = N_i + N_i^V$ och den elastiska energin

$$W = \frac{1}{2EA}\sum_{i=1}^{4}(N_i^{\text{tot}})^2 L_i, \quad \text{alltså}$$

$$W = \frac{L}{2EA}\left(5\left(\frac{5V}{4}+\frac{5P}{3}\right)^2 + 4\left(-V-\frac{4P}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{3V}{4}+P\right)^2 + 5\left(-\frac{5V}{4}\right)^2\right).$$

Horisontell förskjutning u_x och vertikal u_y ges av

$$u_x = \left.\frac{\partial W}{\partial P}\right|_{V=0} = \frac{24PL}{EA}, \quad u_y = \left.\frac{\partial W}{\partial V}\right|_{V=0} = \frac{18PL}{EA}.$$

Svaret är alltså

$$\boxed{u_x = \frac{24PL}{EA} \text{ åt höger, } u_y = \frac{18PL}{EA} \text{ nedåt.}}$$