TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR F (MHA081)

Tid: Måndagen den 14:e mars 2005, klockan 08.30–12.30, i M-huset
Lärare: Peter Hansbo, ankn 1494

Salsbesök av lärare: c:a kl 9.30 och 11.30.
Lösningar: anslås på Inst. för tillämpad mekanik, nya M-huset, och på kurshemsidan efter tentamen.
Preliminärt rättningsresultat: anslås på Inst. för tillämpad mekanik och på kurshemsidan senast den 4/4.
Rättningsgranskning: sker på Inst. för tillämpad mekanik 5/4 kl 12.00–13.00.

Tillåtna hjälpmedel:

1. Grundläggande hållfasthetslära av Hans Lundh, KTH Inst. för hållfasthetslära, valfri upplaga.

2. Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga eller utdrag ur denna; vid Inst. för tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Egna anteckningar får finnas på befintliga sidor i Grundläggande hållfasthetslära, dock inga lösta exempel. I övrigt tillåts inga egna anteckningar. Om hjälpmedel används vid lösning av problem skall referens och sidhänvisning ges.

Poängbedömning: Uppgifterna kan vardera maximalt ge 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

Betygsgränser	Poäng
3	10–14
4	15–19
5	20–

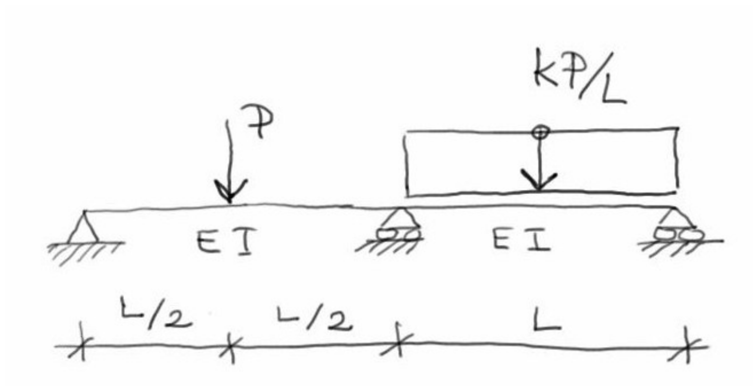
Uppgifterna är **ej** ordnade efter svårighetsgrad. Läs gärna igenom alla uppgifter innan du sätter igång och räknar. Börja sedan med de uppgifter du känner dig säker på.

Räkna lugnt!

Uppgifter

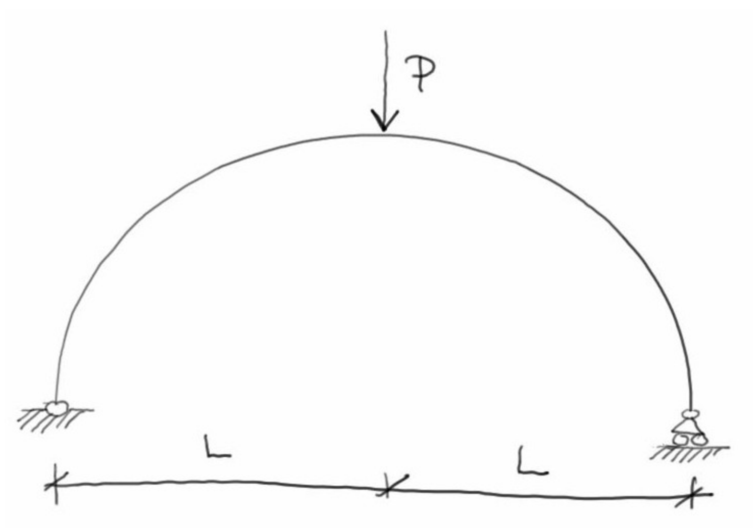
1 En balk med böjstyvhet EI och längd $2L$ är lagrad enligt figur. Bestäm konstanten k så att förskjutningen under punktlasten i det vänstra facket är noll.

(5p)



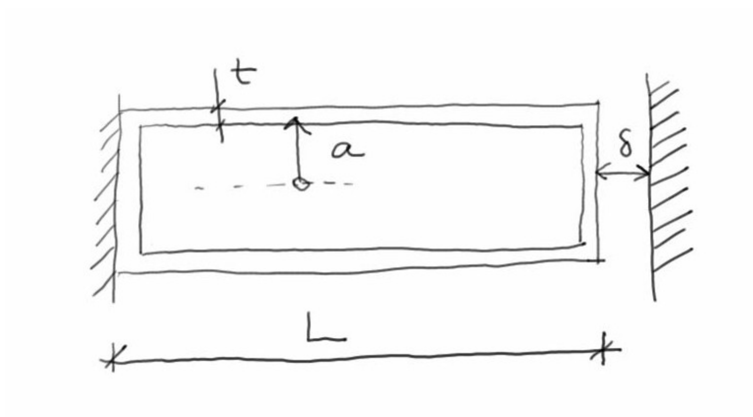
2 **OBS: för årets kurs!** Cirkelhalvbågen i figuren har böjstyvhet EI. Använd någon energimetod för att beräkna hur långt rullstödet flyttar sig i horisontalled pga lasten P.

(5p)



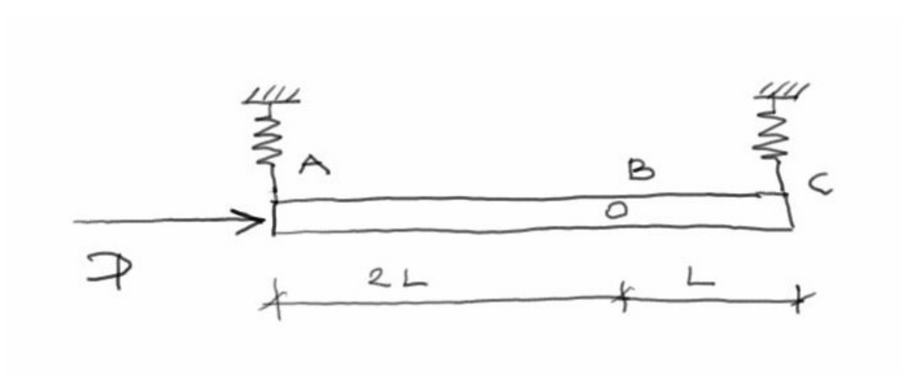
2 **OBS: för tidigare års kurser!** Ett tunnväggigt cylindriskt rör med diameter $2\,a$, längd L, och godstjocklek t utan inre övertryck sitter placerad mellan två stela väggar. Om det är ett gap $\delta << L$ mellan cylindern och högra väggen, hur högt kan trycket i cylindern bli innan den slår i väggen? Antag linjärelastiskt material med elasticitetsmodul E och tvärkontraktionstal ν.

(5p)



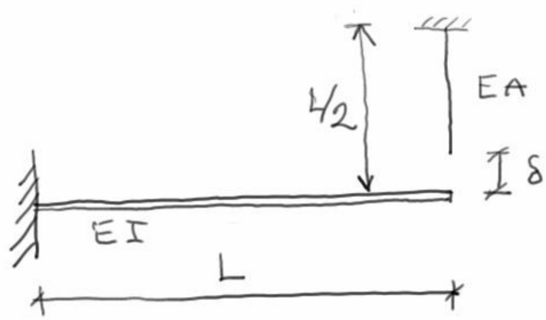
3 En stel stång kan rotera friktionsfritt runt en axel vid B enligt figur. Stången är stödd av två fjädrar, båda med fjäderstyvhet k. Bestäm kritisk last för stången.

(5p)



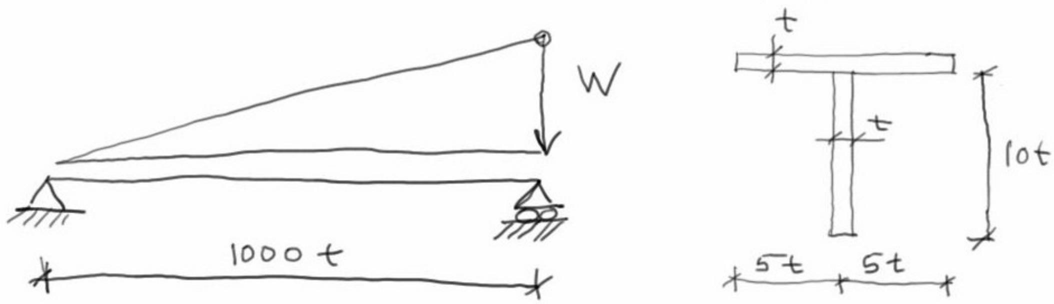
4 En konsolbalk med böjstyvhet EI skall fästas i sin ytterpunkt i en lina med dragstyvhet EA. Linan är sträckan δ för kort ($\delta << L$) för att kunna fästas i balken utan att deformationer uppstår; balken och linan måste därför tvingas ihop. Beräkna den resulterande normalkraften i linan.

(5p)



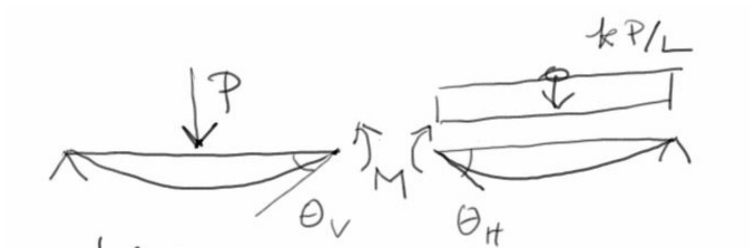
5 Balken i figuren har ett tvärsnitt bestående av två likadana ihoplimmade delar. Tvärsnittet får betraktas som tunnväggigt. Bestäm huvudspänningarna i den punkt som ligger mitt emellan stöden och (mitt) i fogen mellan den övre horisontella och undre vertikala delen av tvärsnittet. Data: $W = 100$ kN/m, $t = 1$ cm.

(5p)



Lösningar, 050314

1 Bestäm konstanten k så att förskjutningen under punktlasten i det vänstra facket är noll. Elementarfall ger:



$$\theta_V = \frac{ML}{3EI} + \frac{PL^2}{16EI}, \quad \theta_H = \frac{ML}{3EI} + \frac{kPL^2}{24EI}.$$

Geometrivillkoret $\theta_V = -\theta_H$ ger sedan

$$M = -\frac{3}{32}PL - \frac{k}{16}PL,$$

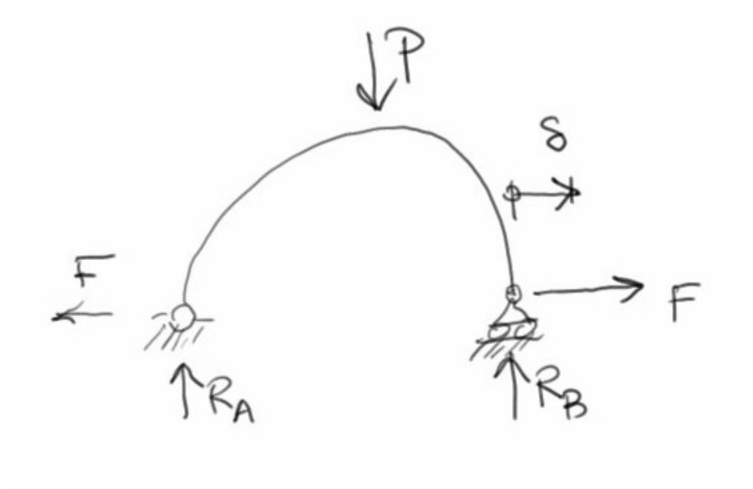
och utböjningen under punktlasten blir

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{ML^2}{16EI} = \frac{PL^3}{EI}\left(\frac{1}{48} - \frac{3}{512} - \frac{k}{256}\right) = 0,$$

vilket ger

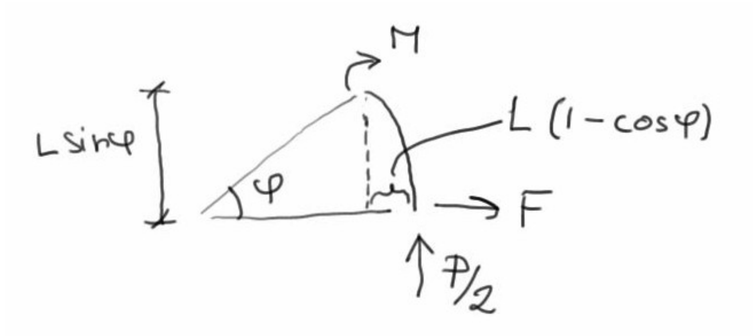
$$\boxed{k = \frac{23}{6}.}$$

2 (Ena alternativet)
Cirkelhalvbågen har böjstyvhet EI. Använd någon energimetod för att beräkna hur långt rullstödet flyttar sig i horisontalled pga lasten P.



Lösningsförslag: Inför en fiktiv kraft F. Jämviktsekvationer ger att $R_A = R_B = P/2$, och den horisontella kraften i det fasta stödet är i jämvikt med F. Problemet är alltså symmetriskt och vi kan använda Castigliano med

$$\Pi = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI} L\, d\varphi.$$



Vi har att

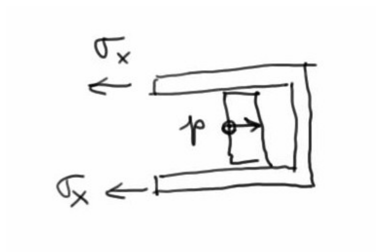
$$M = FL\sin\varphi + \frac{1}{2}PL(1-\cos\varphi), \quad \frac{\partial M}{\partial F} = L\sin\varphi,$$

och

$$\delta = \frac{\partial \Pi}{\partial F} = \int_0^{\pi/2} \frac{PL}{EI}(1-\cos\varphi)L\sin\varphi L\, d\varphi = \boxed{\frac{PL^3}{2EI}.}$$

2 (Andra alternativet)

Ett tunnväggigt cylindriskt rör med diameter $2\,a$, längd L, och godstjocklek t utan inre övertryck sitter placerad mellan två stela väggar. Om det är ett gap $\delta << L$ mellan cylindern och högra väggen, hur högt kan trycket i cylindern bli innan den slår i väggen? Antag linjärelastiskt material med elasticitetsmodul E och tvärkontraktionstal ν. Ångpanneformlerna:



$$\sigma_x = \frac{pa}{2t}, \quad \sigma_\phi = \frac{pa}{t}, \quad \sigma_r = 0.$$

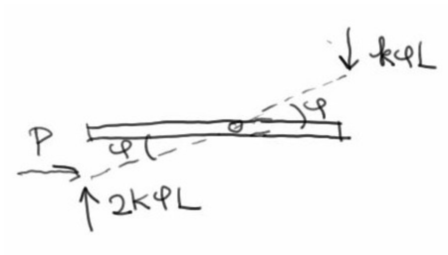
Hookes lag:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_r + \sigma_\phi)) = \frac{\delta}{L}.$$

Tilllsammans ger dettta

$$E\frac{\delta}{L} = \frac{pa}{2t} - \nu\frac{pa}{t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = \frac{2E\delta t}{aL(1-2\nu)}}.$$

3 En stel stång kan rotera friktionsfritt runt en axel vid B enligt figur. Stången är stödd av två fjädrar, båda med fjäderstyvhet k. Bestäm kritisk last för stången.
Jämvikt kring axeln:



$$k\varphi L^2 + 4k\varphi L^2 - 2P\varphi L = 0,$$

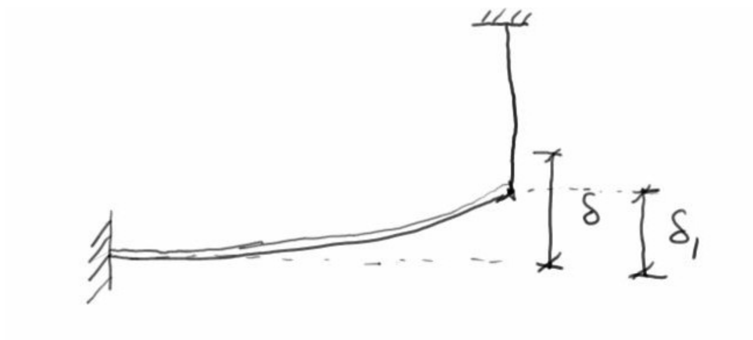
vilket ger

$$(5kL - 2P)\varphi = 0.$$

För icke-triviala lösningar med $\varphi \neq 0$ får vi den kritiska lasten

$$\boxed{P_{\text{kr}} = \frac{5}{2}kL.}$$

4 En konsolbalk med böjstyvhet EI skall fästas i sin ytterpunkt i en lina med dragstyvhet EA. Linan är sträckan δ för kort ($\delta << L$) för att kunna fästas i balken utan att deformationer uppstår; balken och linan måste därför tvingas ihop. Beräkna den resulterande normalkraften i linan.



Kraft i linan:

$$N = \frac{EA}{L/2}(\delta - \delta_1).$$

Ur elementarfall fås

$$\delta_1 = \frac{NL^3}{3EI}.$$

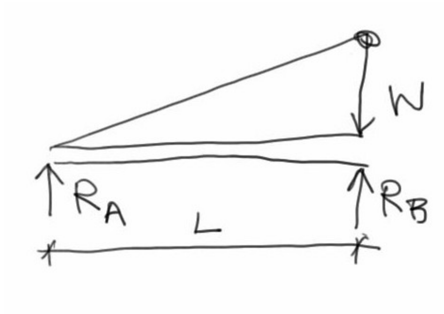
Detta ger att

$$N = \frac{2EA}{L}\left(\delta - \frac{NL^3}{3EI}\right) = \frac{2EA\delta}{L} - \frac{2NAL^2}{3I},$$

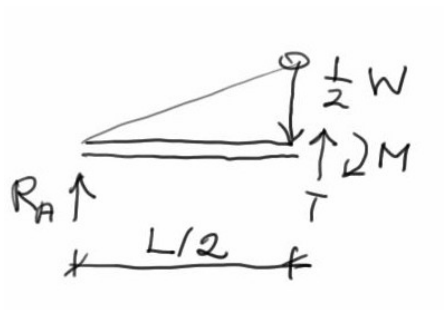
eller

$$\boxed{N = \frac{6EAI}{3IL + 2AL^3}\delta.}$$

5 Bestäm huvudspänningarna i den punkt som ligger mitt emellan stöden och (mitt) i fogen mellan den övre horisontella och undre vertikala delen av tvärsnittet.

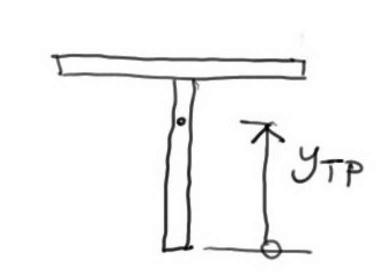


Jämvikt kring stöd B ger $R_A = WL/6$.



Jämvikt kring balkmitt ger

$$T = -\frac{WL}{24} = -\frac{125}{3}\,\text{kN}, \quad M = -\frac{WL^2}{16} = -625\,\text{kN}.$$



$$y_{\text{TP}}(10t^2 + 10t^2) \approx 50t^3 + 100t^3 \Rightarrow y_{\text{TP}} \approx \frac{15}{2}t,$$

$$I \approx \frac{t(10t)^3}{12} + 10t(15t/2 - 5t)^2 + 10t^2(10t - 15t/2)^2 \approx \frac{625}{3}t^4 \approx 2.0810^{-6}\,\mathrm{m}^4.$$

$$S_{A^*} \approx (10t - 15t/2)10t^2 \approx 2.510^{-5}\,\mathrm{m}^3,$$

$$\sigma_x = \frac{M}{I}z \approx -\frac{625\,10^3}{2.08\,10^{-6}}(10 - 7.5), 10^{-2} \approx -7.5\,10^9\,\mathrm{Pa},$$

$$\tau_{xy} = \frac{TS_{A^*}}{It} \approx -\frac{125\,10^3 \times 2.5\,10^{-5}}{3 \times 2.08\,10^{-6} \times 10^{-2}}(10 - 7.5), 10^{-2} \approx -5\,10^7\,\mathrm{Pa}.$$

Huvudspänningarna ges av determinantekvationen

$$\begin{vmatrix} -750 - \sigma & -5 \\ -5 & -\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

dvs.

$$\boxed{\sigma_1 \approx 0.03 \times 10^7 \text{ Pa}, \ \sigma_2 \approx -750 \times 10^7 \text{ Pa}.}$$