TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR F och I (MHA081)

Tid: Fredagen den 14:e januari 2005, klockan 14.00–18.00, i V-huset
Lärare: Peter Hansbo, ankn 1494

Lösningar: anslås på Inst. för tillämpad mekanik, nya M-huset, och på kurshemsidan efter tentamen.
Preliminärt rättningsresultat: anslås på Inst. för tillämpad mekanik och på kurshemsidan senast den 24/1.
Rättningsgranskning: sker på Inst. för tillämpad mekanik 25/1 kl 12.00–13.00.

Tillåtna hjälpmedel:

1. Grundläggande hållfasthetslära av Hans Lundh, KTH Inst. för hållfasthetslära, valfri upplaga.

2. Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga, eller utdrag ur denna.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Egna anteckningar får finnas på befintliga sidor i Grundläggande hållfasthetslära, dock inga lösta exempel. I övrigt tillåts inga egna anteckningar. Om hjälpmedel används vid lösning av problem skall referens och sidhänvisning ges.

Poängbedömning: Uppgifterna kan vardera maximalt ge 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

Betygsgränser	Poäng
3	10–14
4	15–19
5	20–

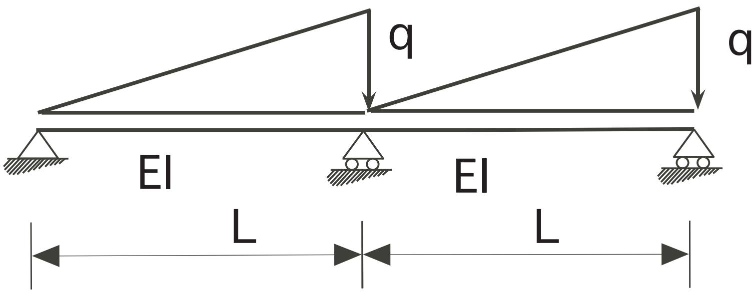
Uppgifterna är **ej** ordnade efter svårighetsgrad. Läs gärna igenom alla uppgifter innan du sätter igång och räknar. Börja sedan med de uppgifter du känner dig säker på.

Räkna lugnt!

Uppgifter

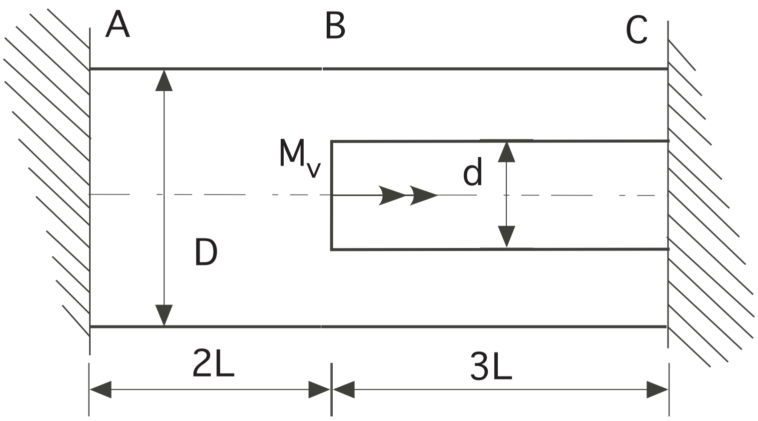
1 En balk med böjstyvhet EI och längd $2L$ är lagrad enligt figur. Balken belastas med de triangulärt fördelade lasterna med lastintensitet varierande från noll till q [N/m] i de båda balkspannen enligt figuren. Bestäm stödreaktionerna i samtliga stöd.

(5p)



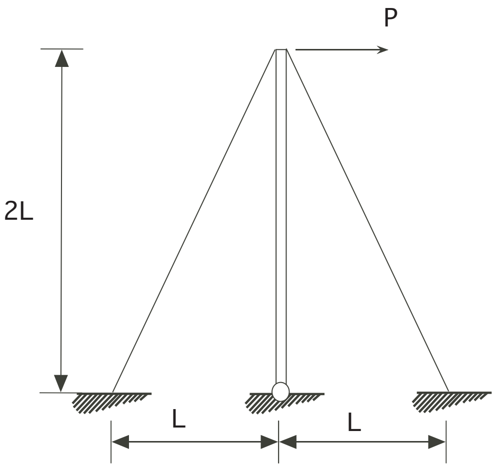
2 En axel ABC har cirkulärt tvärsnitt enligt figur. Delen AB är massiv och har ytterdiameter D, medan delen BC har formen av ett tjockväggigt rör med innerdiameter d och ytterdiameter D. Det gäller att $D = 3d/2$. Axeln är fast inspänd vid A och C. Vid B verkar vridmomentet M_v. Bestäm vridvinkeln vid B. Antag linjärelastiskt material med skjuvmodul G.

(5p)



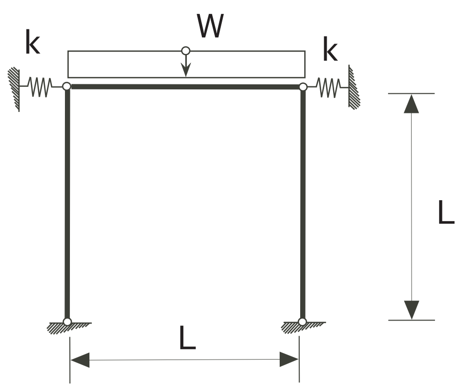
3 En stel mast är ledlagrad nedtill och stagad med två identiska stålstag enligt figur. Stålstagen är förspända till spänningen σ = 100 Mpa och har elasticitetsmodulen $E = 200$ GPa. Masten belastas i toppen med en kraft P i sidled. Hur stor blir masttoppens förskjutning i sidled när spänningen i ena staget har sjunkit ner till noll om $L = 5$ m?

(5p)



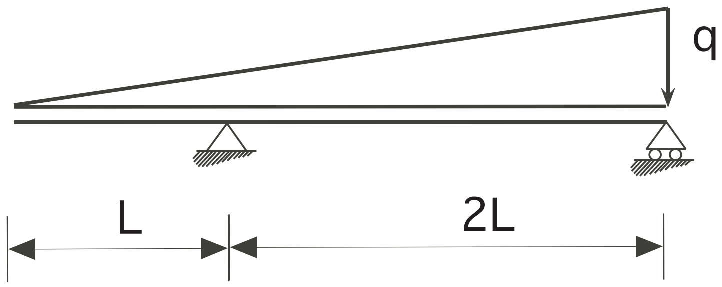
4 En ram enligt figur består av tre stela stänger ihopkoplade med leder. Ramen stöds av två horisontella fjädrar med fjäderstyvhet k. Den övre horisontella stången belastas med en jämt fördelad last med intensitet W [N/m]. Bestäm den kritiska lastintensitet W_{kr} då ramen förlorar sin stabilitet (deformationerna antas ske i papperets plan).

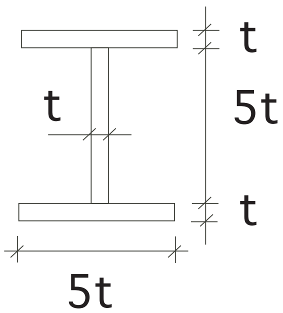
(5p)



5 En träbalk med tvärsnitt enligt figur är upplagd på två stöd och belastad med en utbredd last med maximal intensitet q [N/m]. Tvärsnittet har åstadkommits genom att tre likadana brädor har limmats ihop. Bestäm största skjuvspänning τ i limfogen.

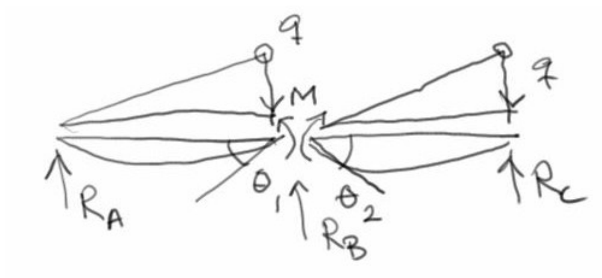
(5p)





Lösningar, 050114

1 En balk med böjstyvhet EI och längd $2L$ är belastad med triangulärt fördelade laster med lastintensitet varierande från noll till q [N/m] i de båda balkspannen. Bestäm stödreaktionerna i samtliga stöd.



En gång statiskt obestämd. Inför t.ex. momentet vid mittstödet som statiskt övertalig kraft. Elementarfall ger:

$$\theta_1 = \frac{ML}{3EI} + \frac{qL^3}{45EI}, \quad \theta_2 = \frac{ML}{3EI} + \frac{7qL^3}{360EI}$$

och eftersom $\theta_1 = -\theta_2$ får vi

$$\frac{2}{3}M + \frac{qL^2}{45} + \frac{7qL^2}{360} = 0 \quad \Rightarrow \quad M = -\frac{qL^2}{16}.$$

Momentjämvikt vid B för vänster balkdel ger

$$R_A L - \frac{qL}{2}\frac{L}{3} - M = 0,$$

och för höger

$$\frac{qL}{2}\frac{2L}{3} + M - R_C L = 0,$$

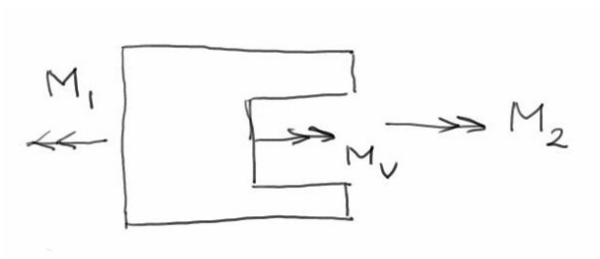
samt vertikal jämvikt

$$R_A + R_B + R_C = 2\frac{qL}{2},$$

vilket tilllsammans ger

$$\boxed{R_A = \frac{5qL}{48},\ R_B = \frac{5qL}{8},\ R_C = \frac{13qL}{48}.}$$

2 En axel ABC har cirkulärt tvärsnitt. Delen AB är massiv och har ytterdiameter D, medan delen BC har formen av ett tjockväggigt rör med innerdiameter d och ytterdiameter D. Det gäller att $D = 3d/2$. Axeln är fast inspänd vid A och C. Vid B verkar vridmomentet M_v. Bestäm vridvinkeln vid B. Antag linjärelastiskt material med skjuvmodul G.



Beräkna vridningsvinkeln φ_{tot} vid högra infästningen och använd villkoret att densamma är noll.

$$\varphi_{\text{tot}} = \sum_i \frac{M_i L_i}{G_i K_i} = \frac{2M_1 L}{GK_{AB}} + \frac{3M_2 L}{GK_{BC}}.$$

$$\varphi_{\text{tot}} = 0 \Rightarrow M_2 = -\frac{2K_{BC}}{3K_{AB}} M_1.$$

Jämvikt ger att $M_2 + M_v - M_1 = 0$ vilket leder till

$$M_1 = \frac{M_v}{1 + \frac{2K_{BC}}{3K_{AB}}}.$$

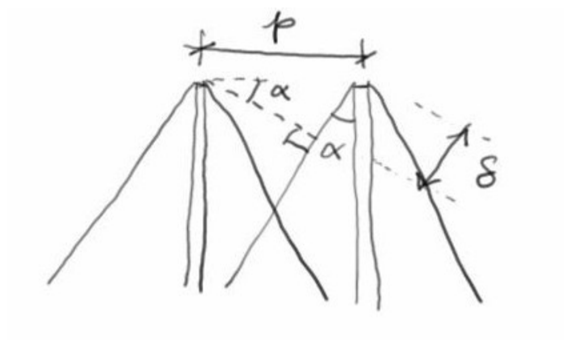
Vi har

$$K_{AB} = \frac{81\pi d^4}{512}, \quad K_{BC} = \frac{\pi d^4}{2}\left(\frac{81}{256} - \frac{1}{16}\right) = \frac{65\pi d^4}{512}.$$

Den sökta vridningsvinkeln är alltså

$$\boxed{\varphi_B = \frac{2M_1 L}{GK_{AB}} = \frac{3072}{373}\frac{M_v L}{\pi G d^4} \approx 2.54 \frac{M_v L}{Gd^4}.}$$

3 En stel mast är ledlagrad nedtill och stagad med två identiska stålstag enligt figur. Stålstagen är förspända till spänningen $\sigma = 100$ Mpa och har elasticitetsmodulen $E = 200$ GPa. Masten belastas i toppen med en kraft P i sidled. Hur stor blir masttoppens förskjutning i sidled när spänningen i ena staget har sjunkit ner till noll om $L = 5$ m?



En gång statiskt obestämd- Inför horisontella förskjutningen p. Geometrin ger att

$$\delta = p \sin \alpha = \frac{p}{\sqrt{5}}.$$

Kraftändring i staget

$$\Delta F = \frac{EA}{L\sqrt{5}} \frac{p}{\sqrt{5}},$$

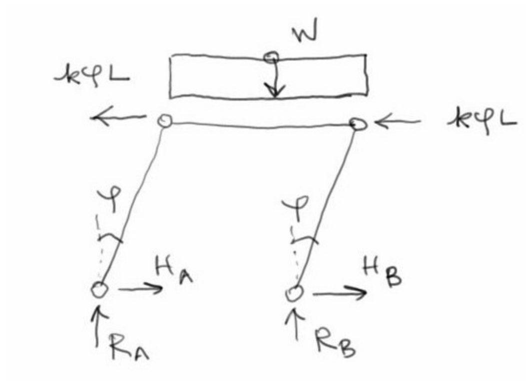
Spänningsförändring

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta F}{A} = \frac{Ep}{5L} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{5\Delta\sigma L}{E}.$$

Med siffror insatta, $\Delta\sigma = 100$ MPa, $E = 200$ GPa, $L = 5$ m, får vi

$$\boxed{p = 12.5 \text{ mm.}}$$

4 En ram består av tre stela stänger ihopkoplade med leder. Ramen stöds av två horisontella fjädrar med fjäderstyvhet k. Den övre horisontella stången belastas med en jämt fördelad last med intensitet W [N/m]. Bestäm den kritiska lastintensitet W_{kr} då ramen förlorar sin stabilitet (deformationerna antas ske i papperets plan).



Lösningsförslag: Bestäm krafterna i utböjt läge under antagande an små förskjutningar. Momentjämvikt för högra och för vänstra balkdelarna ger

$$H_A = R_A\varphi, \quad H_B = R_B\varphi.$$

Horisontell jämvikt ger

$$H_A + H_B = 2k\varphi L,$$

och vertikal jämvikt ger

$$R_A + R_B = WL.$$

Vi har alltså att

$$2k\varphi L = H_A + H_B = (R_A + R_B)\varphi = WL\varphi,$$

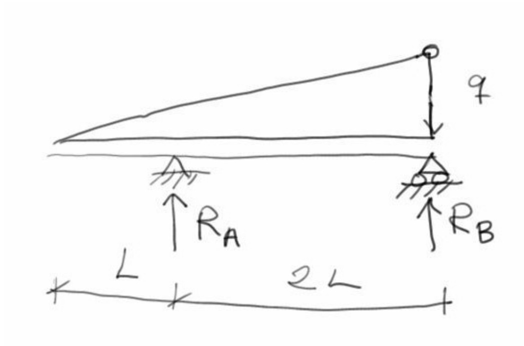
så att

$$(W - 2k)\varphi = 0.$$

För icke-triviala lösningar $\varphi \neq 0$ får vi alltså

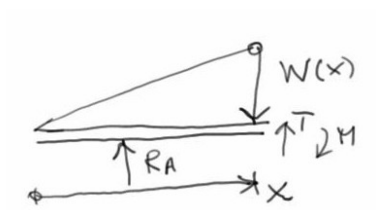
$$\boxed{W_{\text{kr}} = 2\,k.}$$

5 En träbalk är upplagd på två stöd och belastad med en utbredd last med maximal intensitet q [N/m]. Tvärsnittet har åstadkommits genom att tre likadana brädor har limmats ihop. Bestäm största skjuvspänning τ i limfogen.



Stödreaktioner: jämviktsekvationerna ger

$$R_A = R_B = \frac{3qL}{4}.$$



Tvärkraft vid x:

$$T + \frac{3qL}{4} - \int_0^x W(\xi)\,d\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \int_0^x \frac{q\xi}{3L}\,d\xi - \frac{3qL}{4} = \frac{qx^2}{6L} - \frac{3qL}{4},$$

alltså

$$T_{\max} = \frac{3qL}{4} \quad (\text{vid } x = 3L).$$

För tvärsnittet gäller

$$I = \frac{t(5t)^3}{12} + 2\frac{5t^4}{12} + 10t^3(3t)^2 = \frac{405}{4}t^4, \quad S_{A^*} = 15t^3.$$

Alltså

$$\boxed{\tau = \frac{TS_{A^*}}{It} = \frac{qL}{9t^2}.}$$