TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR F och I (MHA081)

Tid: Fredagen den 20:e augusti 2004, klockan 08.45–12.45, i V-huset
Lärare: Peter Hansbo, ankn 1494

Lösningar: anslås på Inst. för teknisk mekanik, nya M-huset, och på kurshemsidan efter tentamen.
Preliminärt rättningsresultat: anslås på Inst. för teknisk mekanik och på kurshemsidan senast den 27/8.
Rättningsgranskning: sker på Inst. för teknisk mekanik 30/8 kl 12.00–13.00.

Tillåtna hjälpmedel:

1. Grundläggande hållfasthetslära av Hans Lundh, KTH Inst. för hållfasthetslära, valfri upplaga.

2. Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga, eller utdrag ur denna.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Egna anteckningar får finnas på befintliga sidor i Grundläggande hållfasthetslära, dock inga lösta exempel. I övrigt tillåts inga egna anteckningar. Om hjälpmedel används vid lösning av problem skall referens och sidhänvisning ges.

Poängbedömning: Uppgifterna kan vardera maximalt ge 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

Betygsgränser	Poäng
3	10–14
4	15–19
5	20–

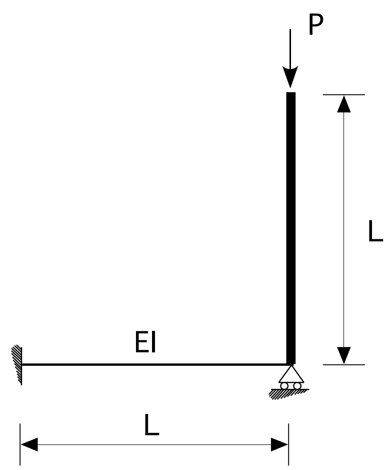
Uppgifterna är **ej** ordnade efter svårighetsgrad. Läs gärna igenom alla uppgifter innan du sätter igång och räknar. Börja sedan med de uppgifter du känner dig säker på.

Räkna lugnt!

Uppgifter

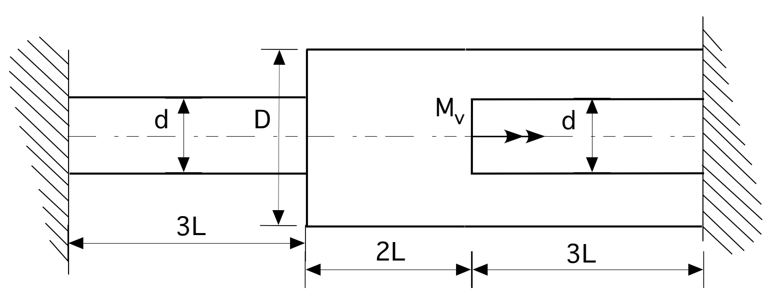
1 En linjärt elastisk balk med böjstyvhet EI och längd L är lagrad enligt Figur. En stel stång med höjden L är fäst vid balkens högerände. Stången belastas med en vertikal kraft P. Bestäm den kritiska last P_k för vilken det odeformerade jämviktsläget blir instabilt.

(5p)



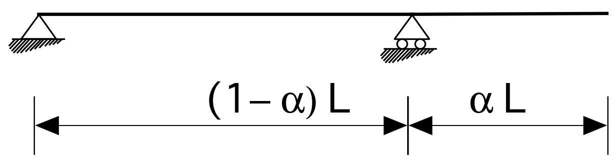
2 En axel består av tre delar enligt figur: två massiva delar med diameter d respektive D, samt en del som har formen av ett tjockväggigt rör med innerdiameter d samt ytterdiameter D. Ett vridande moment läggs på enligt figur. Bestäm vridvinkeln vid övergången mellan de två massiva delarna om $D = 3d/2$. Antag linjärelastiskt material med skjuvmodul G.

(5p)



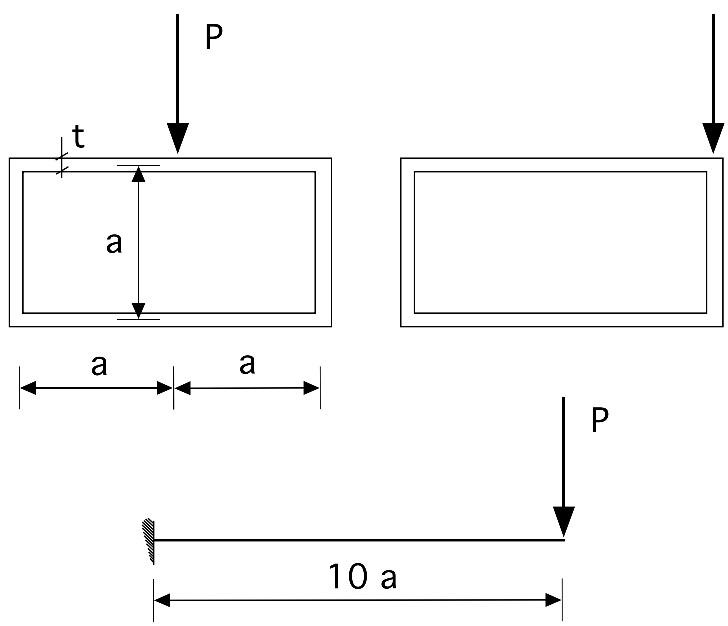
3 En fritt upplagd balk enligt figur är belastad endast av sin egenvikt. Det högra stödet är flyttbart; bestäm α så att det till beloppet största böjmomentet i balken blir så litet som möjligt.

(5p)



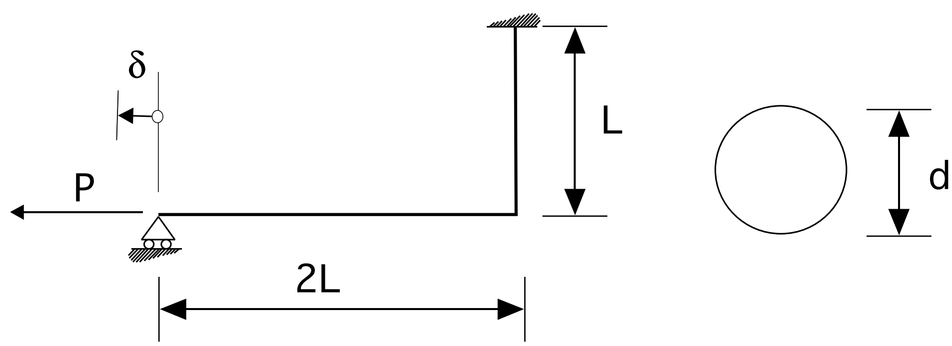
4 En konsolbalk med tvärsnitt enligt figur (antag $t << a$) är belastad av en kraft P. Ange hur många procent den vertikala förskjutningen under lasten ökar om den istället för att angripa centriskt placeras excentriskt enligt figur. Antag att $E/G = 8/3$.

(5p)



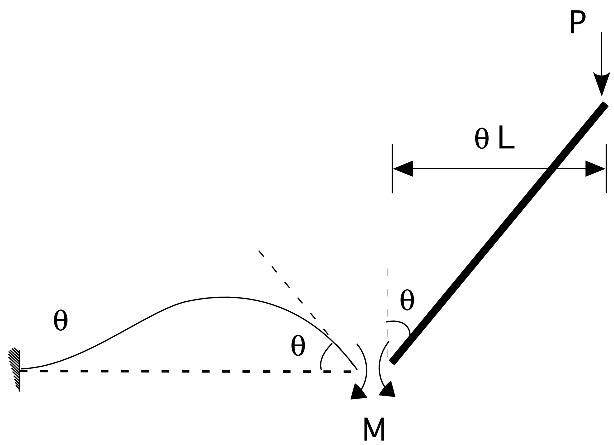
5 För balken i figuren består förskjutningen δ pga lasten P av en axial- och en böjdeformationsdel. Vad är kvoten mellan axialdeformationen och böjdeformationen om balken har ett cirkulärsymmetriskt tvärsnitt med diameter $d = L/100$? (Alla deformationer antas ske i planet. Axialkraftens inverkan på böjdeformationerna försummas).

(5p)



Lösningar, 040820

1 En linjärt elastisk balk med böjstyvhet EI och längd L är kopplad till en stel stång med höjden L, vilken är fäst vid balkens högerände. Stången belastas med en vertikal kraft P. Bestäm den kritiska last P_k för vilken det odeformerade jämviktsläget blir instabilt.



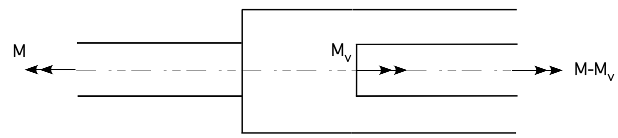
Lösningsförslag: Momentjämvikt i utböjt läge för den stela biten ger $M = \theta PL$. Deformationssamband för horisontella balken ger att $\theta = \frac{ML}{4EI}$, och därmed

$$\theta \left(PL - \frac{4EI}{L} \right) = 0.$$

För lösningar med $\theta \neq 0$ krävs alltså den kritiska lasten:

$$P_k = \frac{4EI}{L^2}.$$

2 En axel består av tre delar: två massiva delar med diameter d respektive D, samt en del som har formen av ett tjockväggigt rör med innerdiameter d samt ytterdiameter D. Ett vridande moment läggs på enligt figur. Bestäm vridvinkeln vid övergången mellan de två massiva delarna om $D = 3d/2$. Antag linjärelastiskt material med skjuvmodul G.



Lösningsförslag: Ansätt momentet M i den vänstra delen som statiskt övertalig. Beräkna sedan vridningsvinkeln φ_{tot} vid högra infästningen och använd villkoret att densamma är noll.

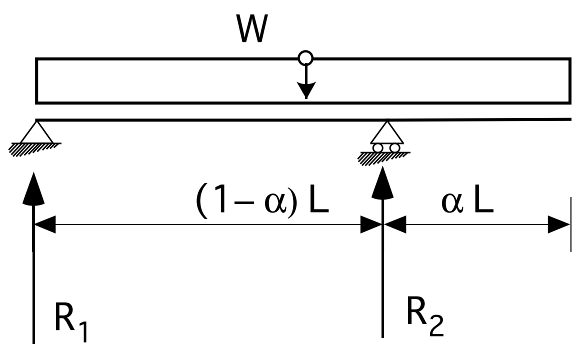
$$\varphi_{\text{tot}} = \sum_i \frac{M_{vi} L_i}{G_i K_i} = \frac{3ML}{G\pi(d/2)^4/2} + \frac{2ML}{G\pi(3d/4)^4/2} + \frac{3(M - M_v)L}{G\pi((3d/4)^4 - (d/2)^4)/2}.$$

$$\varphi_{\text{tot}} = 0 \Rightarrow M = \frac{3888}{21763} M_v \approx 0.18 M_v.$$

Den sökta vridningsvinkeln är alltså

$$\varphi = \frac{3ML}{G\pi(d/2)^4/2} \approx \frac{5.5 M_v L}{G d^4}.$$

3 En fritt upplagd balk enligt figur är belastad endast av sin egenvikt. Det högra stödet är flyttbart; bestäm α så att det till beloppet största böjmomentet i balken blir så litet som möjligt.



Lösningsförslag: Kalla lasten per längdenhet för W. Vertikal jämvikt ger $R_1+R_2 = WL$, momentjämvikt vid vänstra stödet ger $R_2 = \frac{W}{2(1-\alpha)}$. Detta ger att

$$R_1 = \frac{1-2\alpha}{2\,(1-\alpha)}WL.$$

För att minimera maximalt moment inses att momentets storlek vid högra stödet (dragen översida) måste vara lika med momentets storlek mellan stöden (dragen undersida). Momentets storlek vid högra stödet ges av $|M_2| = W(\alpha L)^2/2$ (dragen ovankant). Emellan stöden har vi, med x mätt från vänster stöd,

$$M(x) = \frac{WL(1-2\alpha)x}{2(1-\alpha)} - \frac{Wx^2}{2} \quad \text{och} \quad \frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{L(1-2\alpha)}{2(1-\alpha)}.$$

Detta ger

$$M_{\max} = \frac{1}{8}WL^2\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\alpha)^2},$$

och genom att sätta

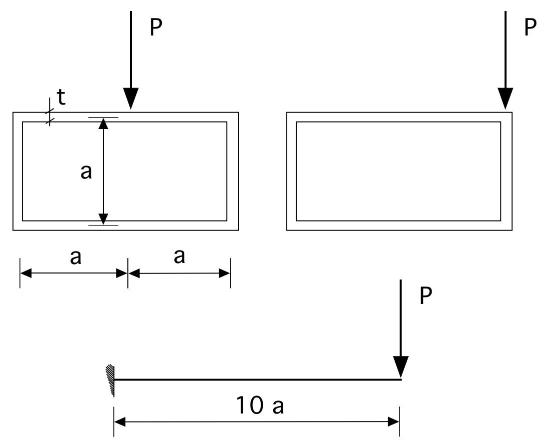
$$M_{\max} = \frac{1}{8}WL^2\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\alpha)^2} = \frac{W(\alpha L)^2}{2} = |M_2|$$

får vi till slut

$$\frac{1}{4}(1-2\alpha)^2 = \alpha^2(1-\alpha)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(1-2\alpha) = \alpha(1-\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0.29.$$

(Kontroll: $|M_2| = M_{\max} = \left(3-2\sqrt{2}\right)\, WL^2/4 > 0$.)

4 En konsolbalk med tvärsnitt enligt figur (antag $t << a$) är belastad av en kraft P. Ange hur många procent den vertikala förskjutningen under lasten ökar om den istället för att angripa centriskt placeras excentriskt enligt figur. Antag att $E/G = 8/3$.



Lösningsförslag: Tröghetsmoment för böjning kring horisontalaxeln:

$$I = 2\left(\frac{ta^3}{12} + 2ta\frac{a^2}{4}\right) = \frac{7}{6}t\,a^3.$$

Tväsnittsfaktor för slutna, tunnväggiga tvärsnitt:

$$K = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{h}} = \frac{4\,(2a^2)^2}{\frac{2a}{t} + \frac{a}{t} + \frac{2a}{t} + \frac{a}{t}} = \frac{8}{3}t\,a^3.$$

Vertikal förskjutning för centrisk last enligt elementarfall:

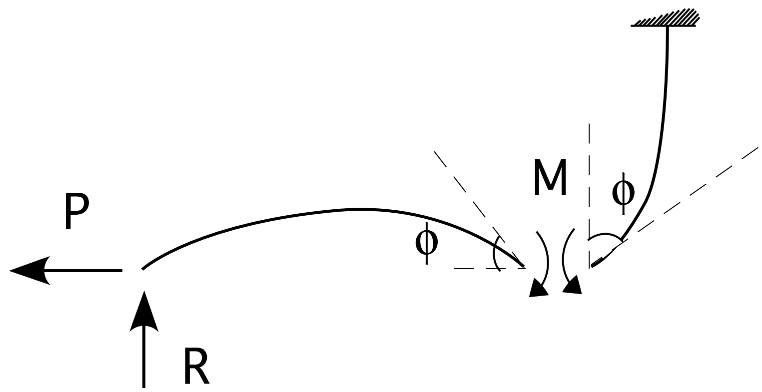
$$\delta_1 = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{2000P}{7Et}.$$

Vertikal förskjutning till följd av vridning:

$$\delta_2 = a\varphi = a\frac{M_v L}{GK} = \frac{10P}{Et}.$$

Svar: Den ökar med $100\,\delta_2/\delta_1\,\% = 3\tfrac{1}{2}\,\%$.

5 För balken i figuren består förskjutningen δ pga lasten P av en axial- och en böjdeformationsdel. Vad är kvoten mellan axialdeformationen och böjdeformationen om balken har ett cirkulärsymmetriskt tvärsnitt med diameter $d = L/100$? (Alla deformationer antas ske i planet. Axialkraftens inverkan på böjdeformationerna försummas).



Lösningsförslag: Vi har $\delta = \delta_{\text{axial}} + \delta_{\text{böj}}$. Med elasticitetsmodul E har vi

$$\delta_{\text{axial}} = \frac{2PL}{E\pi(d/2)^2} = \frac{8 \times 10^4 P}{E\pi L}.$$

För att räkna ut böjdeformationerna inför vi stödreaktionen R som statiskt övertalig. Vi får $M = -2RL$ och vinkeln ϕ ges av de två sambanden

$$\phi = \frac{2ML}{3EI}$$

(horisontella delen), och

$$\phi = \frac{PL^2}{2EI} - \frac{ML}{EI}$$

(vertikala delen). Vi får därför

$$-\frac{4RL^2}{3EI} = \frac{PL^2}{2EI} + \frac{2RL^2}{EI} \Rightarrow R = -\frac{3P}{20} \Rightarrow M = \frac{3PL}{10}.$$

Elementarfall ger

$$\delta_{\text{böj}} = \frac{PL^3}{3EI} - \frac{ML^2}{2EI} = \frac{11PL^3}{60EI} = \frac{352 \times 10^7 P}{3E\pi L}$$

Slutligen får vi

$$\frac{\delta_{\text{axial}}}{\delta_{\text{böj}}} = \frac{3}{44000} \approx 68 \times 10^{-6}.$$