TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR F och I (MHA081)

Tid: Fredagen den 28:e maj 2004, klockan 08.45–12.45, i V-huset
Lärare: Peter Hansbo, ankn 1494 alt. 1505

Lösningar: anslås på Inst. för teknisk mekanik, nya M-huset, och på kurshemsidan efter tentamen.
Preliminärt rättningsresultat: anslås på Inst. för teknisk mekanik och på kurshemsidan senast den 21/6.
Rättningsgranskning: sker på Inst. för teknisk mekanik 22/6 kl 12.00–13.00.

Tillåtna hjälpmedel:

1. Grundläggande hållfasthetslära av Hans Lundh, KTH Inst. för hållfasthetslära, valfri upplaga.

2. Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga, eller utdrag ur denna.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Egna anteckningar får finnas på befintliga sidor i Grundläggande hållfasthetslära, dock inga lösta exempel. I övrigt tillåts inga egna anteckningar. Om hjälpmedel används vid lösning av problem skall referens och sidhänvisning ges.

Poängbedömning: Uppgifterna kan vardera maximalt ge 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

Betygsgränser	Poäng
3	10–14
4	15–19
5	20–

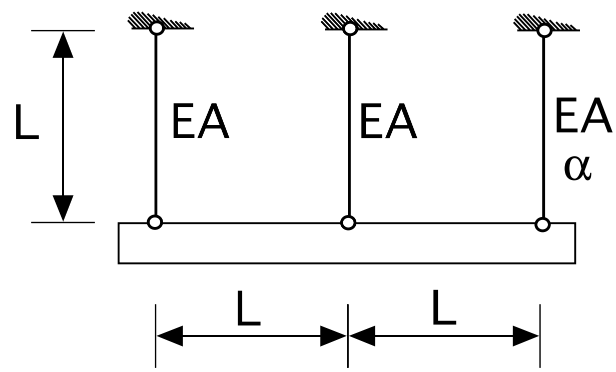
Uppgifterna är **ej** ordnade efter svårighetsgrad. Läs gärna igenom alla uppgifter innan du sätter igång och räknar. Börja sedan med de uppgifter du känner dig säker på.

Räkna lugnt!

Uppgifter

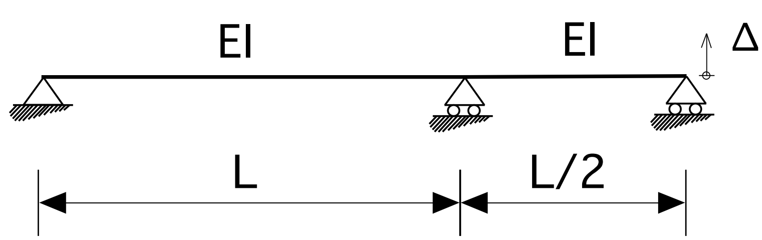
1 En stel, viktlös, balk hänger i tre stänger, alla med samma elasticitetsmodul E och tvärsnittsarea A, från ett stelt tak. Temperaturen i den högra stången höjs med ΔT grader. Värmeutvidgningskoefficienten är α. Bestäm spänningarna i stängerna till följd av uppvärmningen.

(5p)



2 En balk med böjstyvhet EI är fäst på tre stöd enligt figur. Stödet längst till höger utsätts för en stödförskjutning sträckan Δ uppåt. Bestäm stödreaktionerna samt rita moment- och tvärkraftsdiagram.

(5p)



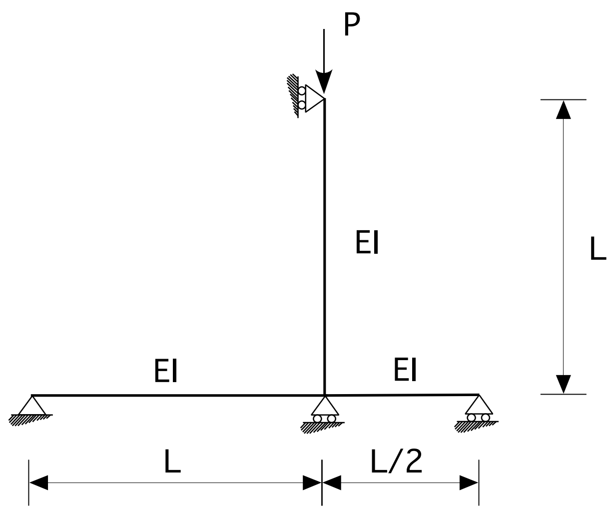
3 Konstruktionen i figuren kan böjknäcka endast i figurens plan.

a: Härled knäckekvationen för konstruktionen, dvs den ekvation varur det för böjknäckning kritiska värdet på kraften (knäckkraften) $P = P_\mathrm{k}$ kan bestämmas.

(4p)

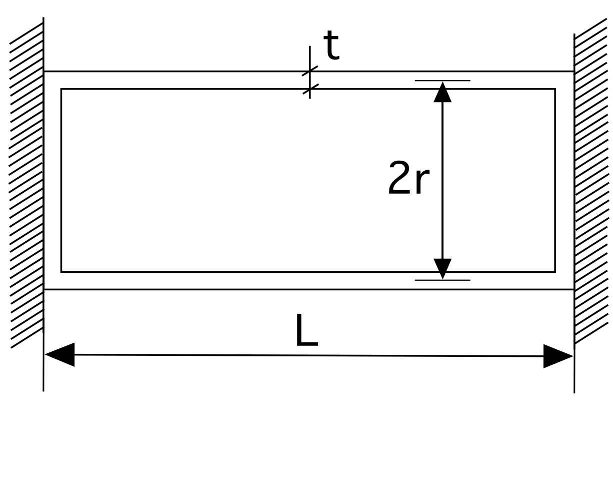
b: Ge övre och undre gränser för knäckkraften med hjälp av Eulerfallen. Motivera.

(1p)



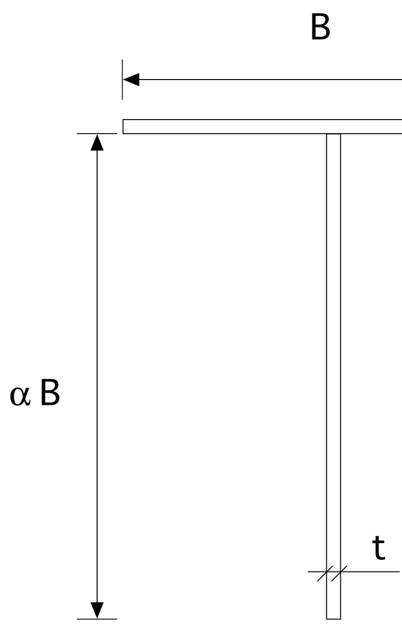
4 En lång, tunnväggig, cylindrisk tank, enligt figur, passar precis mellan två stela väggar när den är tryckfri. Uppskatta kraften som väggarna utsätts för när trycket i tanken stiger till p. Antag att tanken består av ett linjärelastiskt material.

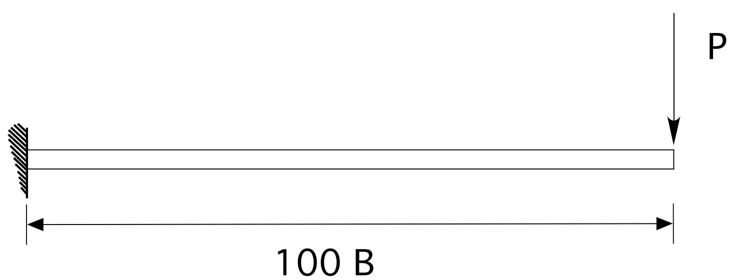
(5p)



5 En konsolbalk, vars enkelsymmetriska tvärsnitt består av en horisontell del limmad på en vertikal del med mått enligt figur (antag att $t << B$), belastas med en punktlast längst ut enligt figur. Vi betecknar sträckgränsen för delarna med σ_f och skjuvsträckgränsen för limfogen med τ_f. Om $\sigma_f = 200\,\tau_f$, vad måste α anta för värde för att sträckgränsen i limfogen skall nås samtidigt som sträckgränsen i delarna?

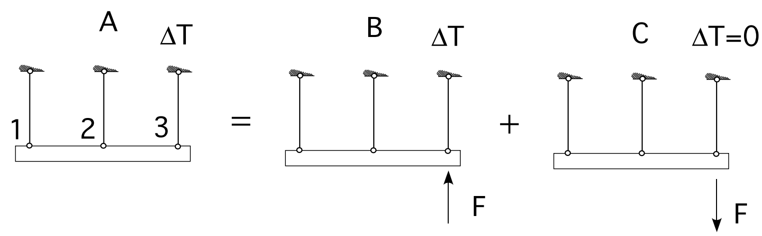
(5p)





Lösningar, 040528

1 En stel, viktlös, balk hänger i tre stänger, alla med samma elasticitetsmodul E och tvärsnittsarea A, från ett stelt tak. Temperaturen i den högra stången höjs med ΔT grader. Värmeutvidgningskoefficienten är α. Bestäm spänningarna i stängerna till följd av uppvärmningen.



Lösningsförslag: Dela upp fall A i summan av fall B (där en kraft F har införts som förhindrar förlängning av den uppvärmda stången) och fall C.

Fall B: Hookes lag ger

$$\varepsilon_3^{\mathrm{B}} = \frac{\sigma_3^{\mathrm{B}}}{E} + \alpha\Delta T = 0 \Rightarrow \sigma_3^{\mathrm{B}} = -E\alpha\Delta T \Rightarrow F = EA\alpha\Delta T.$$

Vi har också $\sigma_1^{\mathrm{B}} = 0$ och $\sigma_2^{\mathrm{B}} = 0$.

Fall C: Geometrin ger att förlängningarna n_1, n_2, n_3 måste uppfylla

$$n_2 - n_1 = \frac{1}{2}(n_3 - n_1).$$

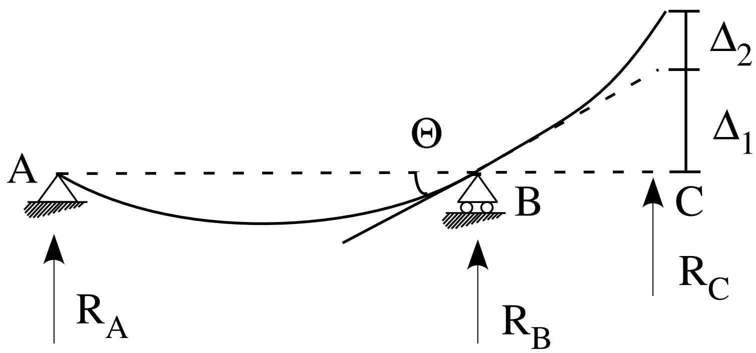
Jämvikt ger $N_1 + N_2 + N_3 = F$ samt $N_2 + 2N_3 = 2F$. Tillsammans får vi alltså

$$\left.\begin{array}{rcl} n_1 - 2n_2 + n_3 &=& 0 \\ n_1 + n_2 + n_3 &=& FL/EA \\ n_2 + 2n_3 &=& 2FL/EA \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} n_1 &=& -\dfrac{FL}{6EA} \\ n_2 &=& \dfrac{FL}{3EA} \\ n_3 &=& \dfrac{5FL}{6EA} \end{array}\right.$$

och vi får spänningarna

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1 &=& \sigma_1^{\mathrm{B}} + \sigma_1^{\mathrm{C}} = En_1/L = -\dfrac{F}{6A} = -\dfrac{E\alpha\Delta T}{6} \\ \sigma_2 &=& \sigma_2^{\mathrm{B}} + \sigma_2^{\mathrm{C}} = En_2/L = \dfrac{F}{3A} = \dfrac{E\alpha\Delta T}{3} \\ \sigma_3 &=& \sigma_3^{\mathrm{B}} + \sigma_3^{\mathrm{C}} = En_3/L - E\alpha\Delta T = -\dfrac{E\alpha\Delta T}{6} \end{array}$$

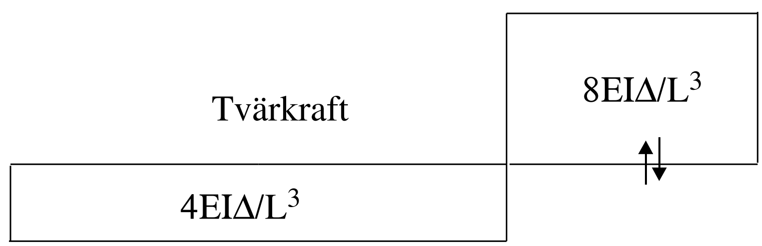
2 En balk med böjstyvhet EI är fäst på tre stöd enligt figur. Stödet längst till höger utsätts för en stödförskjutning sträckan Δ uppåt. Bestäm stödreaktionerna samt rita moment- och tvärkraftsdiagram.

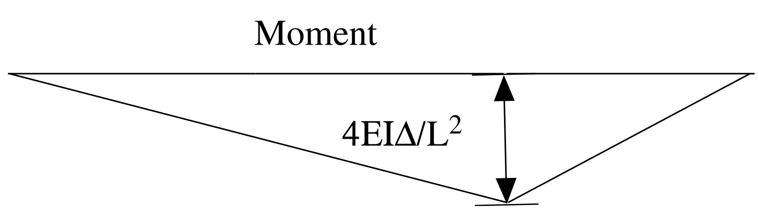


Lösningsförslag: Ansätt stödreaktionen i stöd C som statisk övertalig. Vi har relationerna

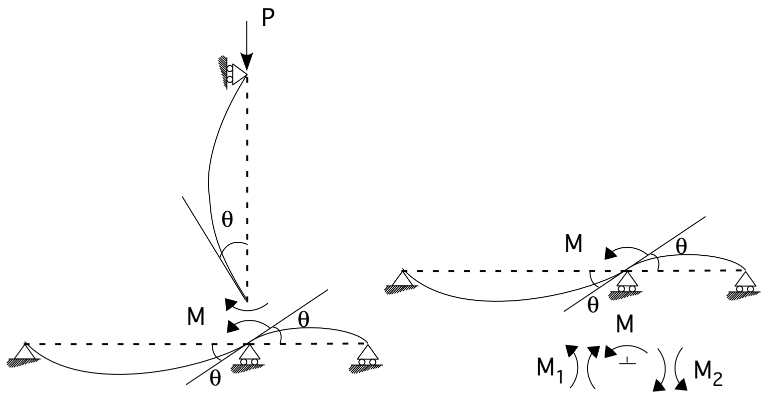
$$M_B = \frac{R_C L}{2}, \quad \Theta = \frac{M_B L}{3EI}, \quad \Delta_1 = \frac{\Theta\, L}{2}, \quad \Delta_2 = \frac{R_C (L/2)^3}{3EI}.$$

Med $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ får vi $R_C = 8EI\Delta/L^3$. Jämvikt ger sedan $R_A = 4EI\Delta/L^3$, $R_B = -12EI\Delta/L^3$.





3 Konstruktionen i figuren kan böjknäcka endast i figurens plan.
a: Härled knäckekvationen för konstruktionen, dvs den ekvation varur det för böjknäckning kritiska värdet på kraften (knäckkraften) $P = P_\mathrm{k}$ kan bestämmas.
b: Ge övre och undre gränser för knäckkraften med hjälp av Eulerfallen. Motivera.



Lösningsförslag: a) Ansätt utböjning enligt figur. Den horisontella balken fungerar som en rotationsfjäder som har konstitutivt samband $\theta = kM$. Vi bestämmer först k. Dela upp M i de två momenten M_1 och M_2. Jämvikt ger $M = M_1 + M_2$, elementarfall ger

$$\theta = \frac{M_1 L}{3EI} = \frac{M_2 L}{6EI} \Rightarrow M_2 = 2M_1 \Rightarrow M = 3M_1 \Rightarrow \theta = \frac{ML}{9EI} \Rightarrow k = \frac{L}{9EI}.$$

Lättast är att använda Berryfunktionerna för att bestämma knäckekvationen. För $M \neq 0$ har vi att utböjningen ges av

$$\theta = -\frac{ML}{3EI}\varphi(\gamma) = \frac{ML}{9EI} \Rightarrow \varphi(\gamma) = -\frac{1}{3}.$$

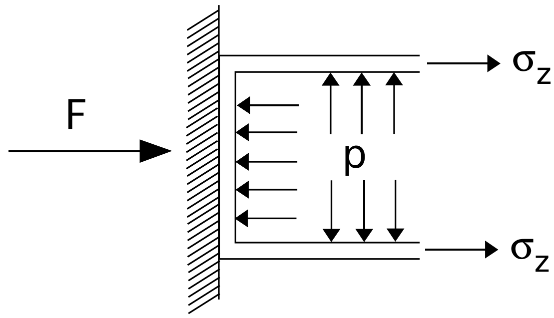
Eftersom $\varphi(\gamma) = 3(1/\gamma - \cot(\gamma))/\gamma$ får vi knäckekvationen

$$\cot(\gamma) - \frac{\gamma}{9} - \frac{1}{\gamma} = 0 \Rightarrow \gamma \approx 4,1 \Rightarrow P_\mathrm{kr} \approx 1,705\frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

b) Knäcklasten måste ligga någonstans mellan Euler 2 och Euler 3, dvs

$$\frac{\pi^2 EI}{L^2} < P_\mathrm{kr} < 2.05\frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

4 En lång, tunnväggig, cylindrisk tank, enligt figur, passar precis mellan två stela väggar när den är tryckfri. Uppskatta kraften som väggarna utsätts för när trycket i tanken stiger till p. Antag att tanken består av ett linjärelastiskt material.



Lösningsförslag: Horisontell jämvikt ger

$$2\,\pi r\,t\,\sigma_z - p\,\pi\,r^2 + F = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = \frac{pr}{2t} - \frac{F}{2\pi rt}.$$

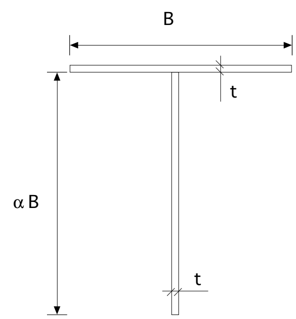
Enligt ångpanneformlerna: $\sigma_\theta = pr/t$, $\sigma_r = 0$.
Hookes lag:

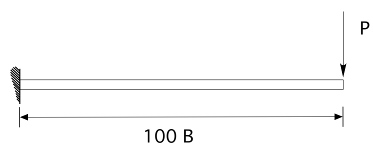
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)\right).$$

Vi har ingen deformation i z–led, så

$$0 = \frac{1}{E}\left(\frac{pr}{2t} - \frac{F}{2\pi rt} - \nu\frac{pr}{t}\right) \Rightarrow F = \pi\,p\,r^2(1-2\nu).$$

5 En konsolbalk, vars enkelsymmetriska tvärsnitt består av en horisontell del limmad på en vertikal del med mått enligt figur (antag att $t << B$), belastas med en punktlast längst ut enligt figur. Vi betecknar sträckgränsen för delarna med σ_f och skjuvsträckgränsen för limfogen med τ_f. Om $\sigma_f = 200\,\tau_f$, vad måste α anta för värde för att sträckgränsen i limfogen skall nås samtidigt som sträckgränsen i delarna?





Lösningsförslag: Vi vill ha

$$200 = \left|\frac{\sigma^{\max}}{\tau^{\max}}\right| = \frac{|M^{\max}|\,|z^{\max}|}{I}\frac{It}{|T^{\max}|\,S} = \frac{100PB\,z\,t}{PS} = \frac{100B\,z\,t}{S}.$$

Vi måste alltså räkna ut statiska momentet S med avseende på den horisontella delen. Räkna först ut z_{TP} räknat från tvärsnittets underkant (använd $t << B$).

$$\frac{\alpha B}{2}\alpha B\,t + \alpha B\,B\,t = z_{\mathrm{TP}}\,(\alpha B\,t + B\,t) \Rightarrow z_{\mathrm{TP}} = \frac{\alpha(2+\alpha)B}{2(1+\alpha)}.$$

Vi får alltså

$$S = B\,t\left(\alpha B - \frac{\alpha(2+\alpha)B}{2(1+\alpha)}\right) = \frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}B^2 t.$$

Srörsta normalspänning fås vid underkant, $z = -z_{\mathrm{TP}}$, och vi får

$$2 = \frac{B\,\frac{\alpha(2+\alpha)B}{2(1+\alpha)}\,t}{\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}B^2 t} = \frac{2+\alpha}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 2.$$