CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

onsdag

Tänkbar tentamen i Reglerteknik för F2, ERE091, ~~tisdagen~~ 25 maj 2011.

Tid: Kl 08.30 - 12.30

Lokal: V

Examinator: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718

Tentamensresultat meddelas senast den 8 juni genom personligt e-mail. Granskning av rättning är möjlig den 9 och den 10 juni, 12.30 -13.00, på plan 3 i E-huset (vid Hörsals- vägen). Iakttag granskningstiderna!

Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Räknefel leder normalt till en poängs avdrag. Direkta följd-fel (såvida ingen orimlighet "dyker upp") leder inte till ytterligare poängavdrag. Ofullständiga lösningar leder till större poängavdrag. Detta gäller även fullständigt lösta uppgifter där grövre felaktigheter förekommer, alternativt om svaret är helt orimligt. Notera också att svaret på en ställd fråga alltid måste motiveras för poängbidrag. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 10 poäng
betyg FYRA: minst 15 poäng
betyg FEM : minst 20 poäng

<u>Tillåtna hjälpmedel</u>:

1. Kursboken, ***Reglerteknik-Grundläggande teori***, av Glad och Ljung, <u>utan anteckningar</u>.
2. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
3. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
4. Valfria räknare med handhavandeinstruktion. <u>Inga "laptop-datorer" är tillåtna!</u>

LYCKA TILL!

1. a) Vilka av följande linjära system är minimumfassystem? Motivera kort för var och en!

$$\text{system A: } G(s) = \frac{s-1}{s+2} + \frac{1}{s+1}$$

$$\text{system B: } G(s) = 1 - \frac{2}{s+1}$$

$$\text{system C: } G(s) = \frac{s+2}{s^2-1}$$

3 poäng

b) Upprita Nyquistkurvan för system C ovan, och kommentera stabiliteten utgående från det uppritade Nyquistdiagrammet.

3 poäng

2. Ett instabilt linjärt system har överföringsfunktionen $G(s) = 1/(s-1)$. Systemet skall regleras med regulatorn $F(s) = K_p + K_i/s$, där parametrarna valts till $K_p = 4, K_i = 2$.

a) Vilka poler får det återkopplade systemet med regulatorparametrarna valda enligt ovan?

1 poäng

b) Uppskatta maximala värdet på beloppet av komplementära känslighetsfunktionen $T(j\omega)$ (i enheten dB) i ett Bodediagram.

2 poäng

c) En närmare analys visar att systemet har en liten dödtid, dvs att överföringsfunktionen borde vara $G_0(s) = \exp(-\tau s)/(s-1)$. Ange den relativa osäkerheten $\Delta G(s)$ i en sk *multiplikativ osäkerhetsmodell* $G_0(s) = (1 + \Delta G(s))G(s)$. Ange också maximala värdet på $|\Delta G(j\omega)|$.

2 poäng

d) Man kan inse att om dödtiden ovan är tillräckligt liten borde (samma regulatorparametrar) det återkopplade systemet vara stabilt (vilket kan visas med Nyquistkriteriet). Kan någon slutsats om det återkopplade systemets stabilitet dras utgående från lågförstärkningssatsen?

1 poäng

3. Ett linjärt tidsinvariant system beskrivs på formen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

där den "vanliga" tillståndsformen erhålles efter multiplikation från vänster med inversen till diagonalmatrisen. Emellertid är tidskonstanten ε så liten att direkt invertering av denna matris blir numeriskt riskabel.

Låt i stället $\varepsilon \to 0$ direkt (dvs så att en *differentialalgebraisk ekvation* uppstår) och beräkna därefter överföringsfunktionen $G(s)$ från insignal *u* till utsignal *y*.

4 poäng

4. Ett envariabelt system (utan styrterm) beskrivs av följande linjära differentialekvation:

$$\frac{d}{dt}z(t) + 2 \cdot z(t) = 0$$

Ett problem är att vid mätning av z adderas en konstant men okänd offset b till z, dvs att

$$y(t) = z(t) + b$$

Detta problem kan lösas genom att beskriva systemet på tillståndsform där $x_1 = z, x_2 = b$.

a) Formulera en tillståndsmodell för systemet och visa att detta är observerbart.

2 poäng

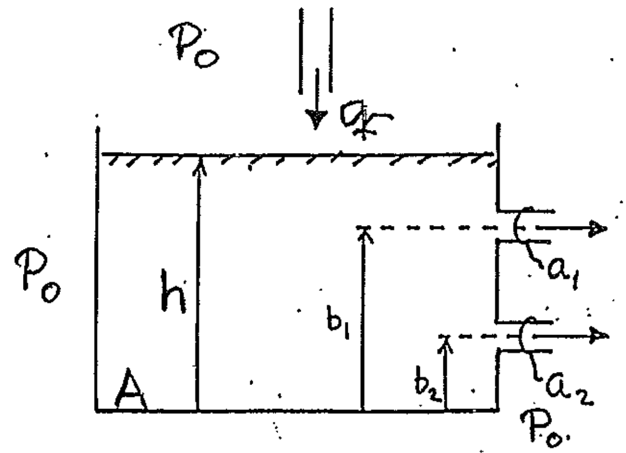
b) Bestäm en observatör sådan att polerna placeras i $s = -1 + j, s = -1 - j$, och ange ett skattningsfilter $F(s)$, sådant att $\hat{Z}(s) = F(s)Y(s)$ där den ursprungliga variabeln z skattas genom att mätsignalen y filtreras.

3 poäng

5. Figuren visar en tank med två avlopp som har tvärsnittsarean A. Avloppen, vars tvärsnittsareor är a_1 respektive a_2, befinner sig på höjderna b_1 respektive b_2 ovanför botten. Tanken är fylld med vätska av densiteten ρ, till höjden $h > b_1 > b_2$. Utströmningshastigheten, w, genom ett avlopp på höjden b ovanför ett referensplan, bestämmas med Bernoullis ekvation:

$$P_0 + \rho g h = P_0 + \rho g b + \frac{\rho w^2}{2}$$

Man kan anta att potentiella energin vid referensplanet är noll, liksom att rörelseenergin vid vätskeytan är noll (vilket framgår av ekvationen). P_0 betecknar det externa atmosfärstrycket, och g är tyngdaccellerationen. Tillflödet i tanken är q, och man har valt tanknivån $h = h_0$.



På grund av variationer $\Delta q(t)$ i tillflödet uppstår variationer $\Delta h(t)$ runt den valda nivån h_0. Bestäm överföringsfunktionen från flödesvariationer Δq till nivåvariationer Δh.

4 poäng

Reglerteknik F2, ERE091, 25/5 - 11 /EB

1.(a) <u>A</u> $G(s) = \frac{s-1}{s+2} + \frac{1}{s+1} = \ldots = \frac{s^2+s+1}{(s+1)(s+2)}$

G(s), som är stabilt ($s_1 = -1$, $s_2 = -2$), har komplexa nollställen med negativ realdel, som alltså ligger strikt inne i VHP, varför <u>systemet är ett minimumfassystem</u>.

<u>B</u> $G(s) = 1 - \frac{2}{s+1} = \frac{s-1}{s+1}$

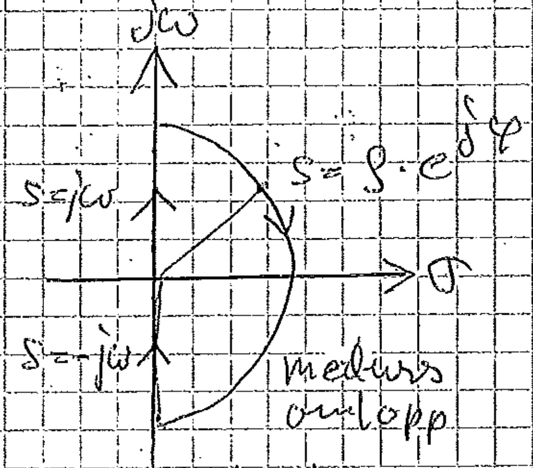
G(s), är stabilt ($s = -1$), men har ett nollställe för $s = +1 \in HHP$, varför <u>detta system är av typen icke-minimumfas</u>.

<u>C</u> $G(s) = \frac{s+2}{s^2-1} = \frac{s+2}{(s-1)(s+1)}$

G(s), är <u>instabilt</u> pga polen i $s = +1$, varför frekvensfunktionen $G(j\omega)$ inte kan definieras. Begreppen minimumfas och icke-minimumfas "saknar då innebörd".

∴ <u>Endast A beskriver ett min.fassystem.</u>

1.(b)

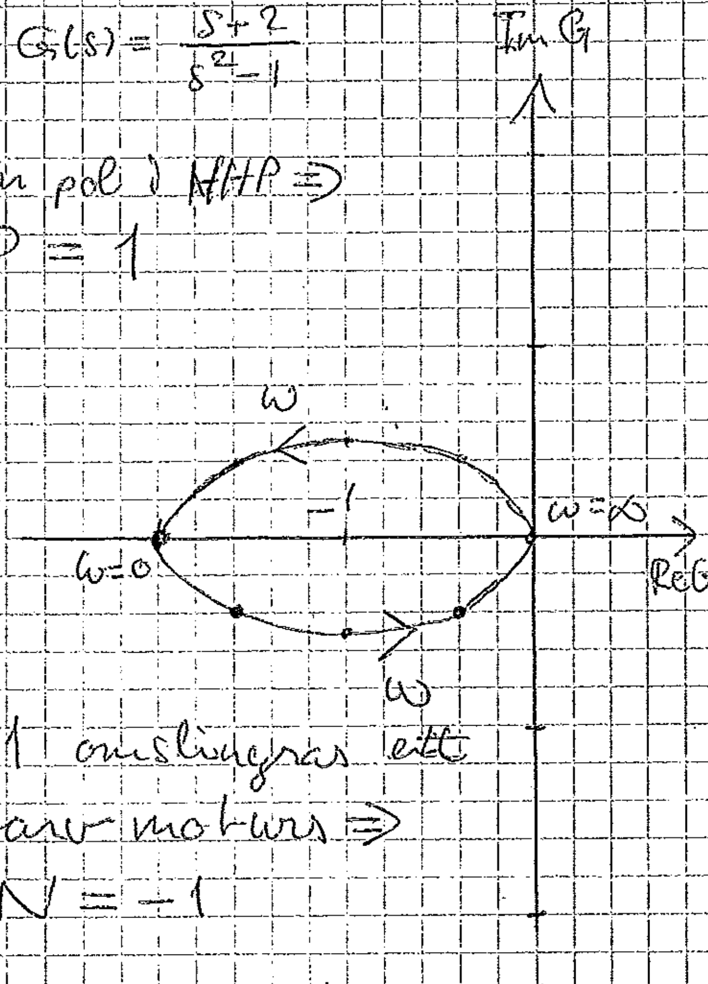


Nyquists kontur

$G(s) = \frac{s+2}{s^2-1}$

En pol i HHP ⇒

$P = 1$



−1 omslingras ett varv moturs ⇒

$N = -1$

$Z = P + N = 1 - 1 = 0$

⇒ Stabilt system!

$s = j\omega \Rightarrow G(s) = G(j\omega) =$

$= \frac{2 + j\omega}{(j\omega + 1)(j\omega - 1)} =$

$= \frac{2 + j\omega}{-1 - \omega^2} =$

$= -\frac{2}{1+\omega^2} - j\frac{\omega}{1+\omega^2}$

ω	Re G	Im G
0	−2	0
0.5	−1.6	−0.4
1	−1	−0.5
2	−0.4	−0.4
3	−0.2	−0.3
∞	0	0

$s = \rho \cdot e^{j\varphi} \Rightarrow$

$G(s) = \frac{\rho e^{j\varphi} + 2}{\rho^2 e^{j2\varphi} - 1} =$

$= \frac{e^{j\varphi} + 2/\rho}{\rho e^{j2\varphi} - 1/\rho} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{e^{-j\varphi}}{\rho} \rightarrow 0$ då $\rho \to \infty$

$s = -j\omega \Rightarrow$ "Spegling"

2. (a) $L(s) = \frac{4s+2}{s} \cdot \frac{1}{s-1}$; $L(s)+1=0 \Rightarrow$

$s^2 - s + 4s + 2 = s^2 + 3s + 2 =$

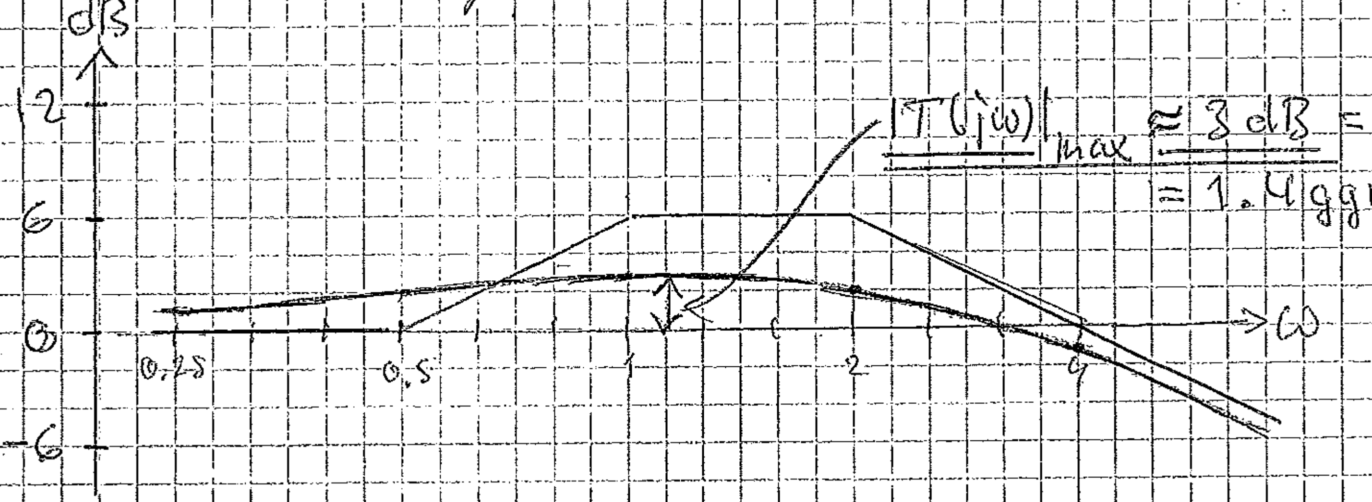
$= (s+1)(s+2) = 0$

De sökta polerna är $\underline{\underline{s=-1 \text{ och } s=-2}}$.

(b) $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{4s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{\cancel{2}(1+2s)}{\cancel{2}(1+s)(1+s/2)}$

$$T(j\omega) = \frac{1+j\omega/0.5}{(1+j\omega/1)(1+j\omega/2)}$$

Bode-diagrammet (beloppskurvan):



(c) $G_0(s) = G(s) \cdot e^{-\tau s} = [1+\Delta G(s)] \cdot G(s)$

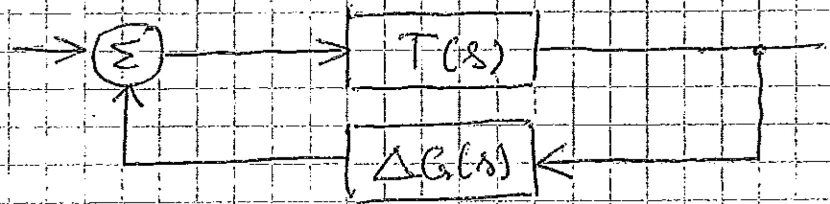
$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta G(s) = e^{-\tau s} - 1}}$

$|\Delta G(j\omega)|^2 = |1 - e^{-j\omega\tau}|^2 = |1-\cos\omega\tau + j\sin\omega\tau|^2$

$= (1-\cos(\omega\tau))^2 + \sin^2\omega\tau = 2 - 2\cos\omega\tau \leq 4$

$\therefore$ $\underline{\underline{|\Delta G(j\omega)| \leq 2}}$ (som alltså är oberoende!)

2. (d) Lågförstärkningssatsen säger, att om $T(s)$ och $\Delta G(s)$ båda är stabila var för sig, gäller att kretsen



är stabil om det gäller att

$$\underbrace{|T(j\omega)|}_{\leq 1.4} * \underbrace{|\Delta G(j\omega)|}_{\leq 2} < 1 \quad \text{för alla } \omega.$$

≤ 2.8 säger inget!

Oavsett dödtiden τ ger alltså satsen <u>ingen vägledning</u>!

3.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \varepsilon \cdot \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

Låt $\varepsilon \to 0$ dvs nedre ekvationen blir

$$0 = x_1 - 2x_2 - u \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}u$$

övre ekvationen blir

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + 2u =$$

$$= -x_1 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}u + 2u =$$

$$= -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 - x_2 = x_1 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}u$$

$$= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}u$$

Dvs då $\varepsilon \to 0$ fås en ny tillst. modell (av ordning 1):

$$\begin{cases} \dot{x} = -0.5x + 1.5u \Rightarrow A = -0{,}5,\ B = 1{,}5 \\ y = 0.5x + 0.5u \Rightarrow C = 0.5,\ D = 0{,}5 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{G(s)}} = C(sI - A)^{-1}B + D =$$

$$= 0.5(s + 0.5)^{-1}1.5 + 0.5 =$$

$$= \frac{0.75}{s + 0.5} + \frac{1}{2} = \frac{1.5 + (s + 0.5)}{2(s + 0.5)} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2 + s}{1 + 2s}}}$$

4. $$\left.\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -2\cdot z(t) \\ y(t) &= z(t) + b \end{aligned}\right\}\ \text{Infor}: \ x_1 = z(t),\ x_2 = b$$

(a) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = x_1 + x_2 \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix};\ \det(\mathcal{O}) = 2 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Full rang $\Rightarrow$ Observerbart system!

(b) $$\frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + K[y - C\hat{x}] = (A - KC)\hat{x} + Ky$$

$$A - KC = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}(1\ \ 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k_1 - 2 & -k_1 \\ -k_2 & -k_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A + KC) = \begin{vmatrix} \lambda + k_1 + 2 & k_1 \\ k_2 & \lambda + k_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + (k_1 + k_2 + 2)\lambda + 2k_2 \equiv$$

$$\equiv (\lambda + 1 - j)(\lambda + 1 + j) = (\lambda + 1)^2 + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

$$\Rightarrow 2k_2 = 2 \Rightarrow k_2 = 1;\ k_1 + 1 + 2 = 2 \Rightarrow k_1 = -1$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\hat{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} y;\quad \hat{z} = (1\ \ 0)\hat{x} \Rightarrow$$

$$F(s) = (1\ \ 0)\begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}\underbrace{(1\ \ 0)\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}}_{=(s+1\ \ 1)}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{F(s) = \frac{-s}{s^2 + 2s + 1}}}$$

5. Utströmningshastigheten vid avlopp:

$$\cancel{p_0} + \rho g h = \cancel{p_0} + \rho g b + \rho w^2/2$$

$$w^2/2 = gh - gb \Rightarrow w^2 = 2g(h-b)$$

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}(Ah) = -a_1 w_1 - a_2 w_2 + q$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{a_1}{A}\sqrt{2g(h-b_1)} - \frac{a_2}{A}\sqrt{2g(h-b_2)} + \frac{q}{A}$$

Arbetspunkt: (h_0, q_0)

$$q_0 = a_1\sqrt{2g(h_0-b_1)} + a_2\sqrt{2g(h_0-b_2)}$$

(efterfrågas inte!)

$$\frac{d}{dt}\Delta h = -\frac{a_1}{A}\frac{2g\,\Delta h}{2\sqrt{2g(h_0-b_1)}} - \frac{a_2}{A}\frac{2g\,\Delta h}{2\sqrt{2g(h_0-b_2)}} + \frac{\Delta q}{A}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta h + \left[\left(\frac{a_1}{A}\right)\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2(h_0-b_1)}} + \left(\frac{a_2}{A}\right)\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2(h_0-b_2)}}\right]\Delta h = \frac{\Delta q}{A}$$

$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{1}{As + \frac{a_1\sqrt{g}}{\sqrt{2(h_0-b_1)}} + \frac{a_2\sqrt{g}}{\sqrt{2(h_0-b_2)}}}$$

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för F2, ERE091, torsdagen 18 augusti 2011.

Tid: Kl 14.00 - 18.00

Lokal: V

Examinator: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718

Tentamensresultat meddelas senast den 7 september genom personligt e-mail. Granskning av rättning är möjlig den 8 och den 9 september, 12.30 -13.00, på plan 3 i E-huset (vid Hörsalsvägen). Iakttag granskningstiderna!

Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Räknefel leder normalt till en poängs avdrag. Direkta följdfel (såvida ingen orimlighet "dyker upp") leder inte till ytterligare poängavdrag. Ofullständiga lösningar leder till större poängavdrag. Detta gäller även fullständigt lösta uppgifter där grövre felaktigheter förekommer, alternativt om svaret är helt orimligt. Notera också att svaret på en ställd fråga alltid måste motiveras för poängbidrag. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 10 poäng
betyg FYRA: minst 15 poäng
betyg FEM : minst 20 poäng

Tillåtna hjälpmedel:

1. Kursboken, ***Reglerteknik-Grundläggande teori***, av Glad och Ljung, utan anteckningar.
2. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
3. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
4. Valfria räknare med handhavandeinstruktion. Inga "laptop-datorer" är tillåtna!

LYCKA TILL!

1. a) Vilka av följande linjära system är insignal/utsignalstabila? Motivera kort för var och en!

$$\text{system A: } G(s) = \frac{s-3}{s^2+2s+6}$$

$$\text{system B: } G(s) = \frac{s+3}{s^2+2s}$$

$$\text{system C: } G(s) = \frac{s-3}{s^2+6}$$

3 poäng

b) Kan system C stabiliseras med hjälp av en P-regulator, $F(s) = K_p$? Kan system C stabiliseras med hjälp av en I-regulator, $F(s) = K_i/s$? Ange i båda dessa fall vilka parameterval som leder till stabila återkopplade system.

2 poäng

2. Ett autonomt (utan insignal) biologiskt system har två komponenter A och B, med koncentrationerna C_A respektive C_B (mol/liter), som tillväxer eller avtar. Processen kan beskrivas av de två kopplade differentialekvationerna

$$\frac{dC_A}{dt} = -C_A + \alpha C_A C_B$$

$$\frac{dC_B}{dt} = -C_B + \beta C_A C_B$$

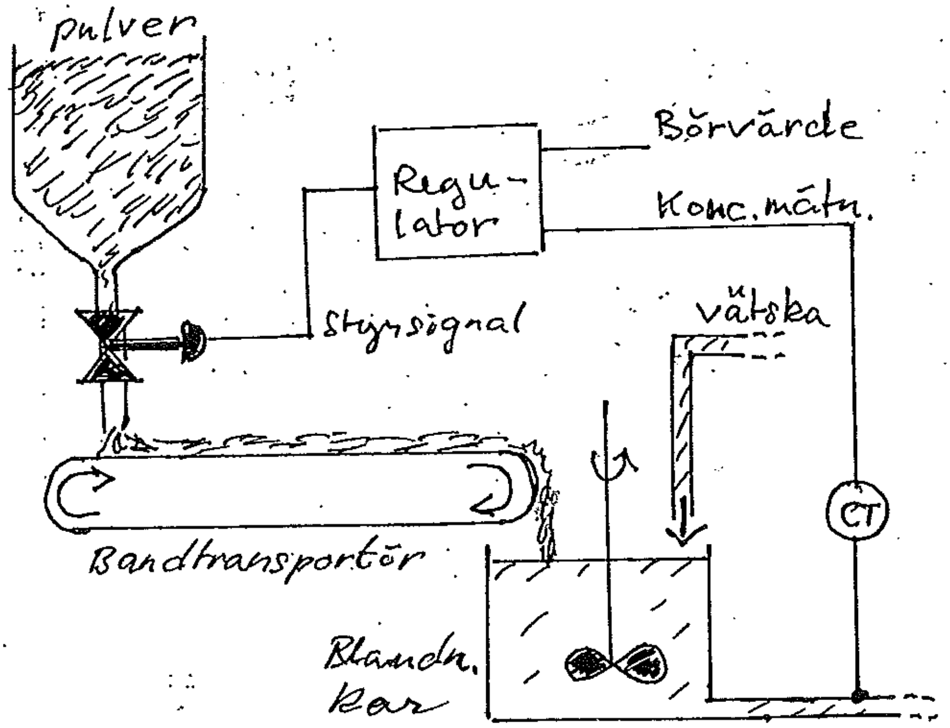
a) Bestäm systemets två möjliga jämviktspunkter, och uppställ motsvarande linjära tillståndsekvationer för dessa arbetspunkter.

3 poäng

b) Avgör de linjäriserade tillståndsekvationernas stabilitet för olika kombinationer av processparametrarna α och β.

2 poäng

3.



Ovanstående figur visar ett system för koncentrationsreglering. Blandningskaret matas med ett pulver av varierande sammansättning. Genom att styra matningsventilen vill man åstadkomma konstant koncentration hos den utgående blandningen. Följande överföringsfunktioner för de olika delsystemen samt PI-regulatorn kan antas (tider i minuter):

Blandningskaret (dvs från materialflöde in i karet till koncentration ut):

$$G_1(s) = \frac{\gamma_1}{\tau_1 s + 1}, \gamma_1 > 0, \tau_1 > 0$$

Transportören (dvs från ventiländring till materialflöde in i karet):

$$G_2(s) = \gamma_2 \exp(-\tau_2 s), \gamma_2 > 0, \tau_2 > 0$$

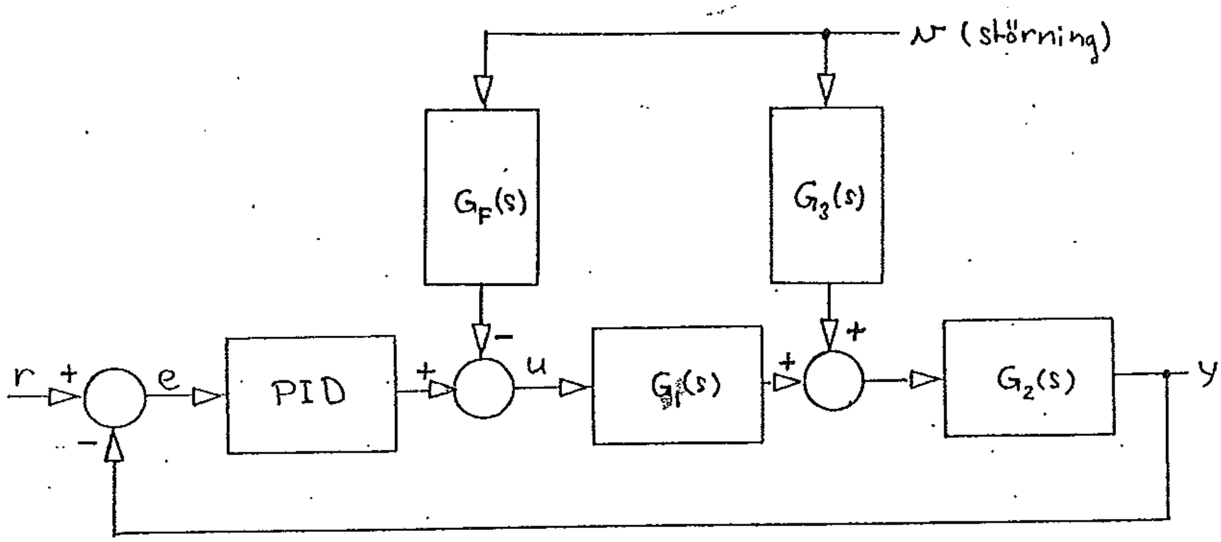
Regulatorn

$$F(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

Rita först ett tydligt blockschema över reglersystemet. Ange rimliga värden på PI-regulatorns parametrar K_p och T_i uttryckta i processparametrarna $\gamma_1, \gamma_2, \tau_1, \tau_2$, så att resulterande system får fasmarginalen $\pi/4$ radianer. (En enkel designmetod baseras på förkortning av stabila poler.)

5 poäng

4. Figuren nedan visar ett styrsystem innehållande såväl återkoppling som framkoppling:



a) Antag att PID-regulatorn är lämpligt inställd, och att processens tre överföringsfunktioner $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ är stabila minimumfassystem. Härled uttrycket för framkopplingsfiltret, $G_F(s)$, så att effekten av den mätbara störningen $v(t)$ (dvs idealt sett) släcks ut fullständigt.

2 poäng

b) Antag som tidigare att $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ är stabila, men att endast precis <u>två av dom</u> är minimumfassystem. Kan detta leda till besvärligheter vid idrifttagningen av styrsystemet? (Notera att det finns tre olika fall att ta ställning till!)

3 poäng

5. Betrakta det linjära tidsinvarianta systemet (där tillståndet i detta fall är en skalär storhet)

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x(t) + u(t) + v_1(t) \text{ och } y(t) = x(t) + v_2(t)$$

De stokastiska störningarna v_1 och v_2 är båda Gaussiska, vita, med medelvärden noll och varianser ett (för enkelhets skull).

En allmän observatör till ett linjärt system kan som bekant skrivas

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t)]$$

Den observatör som är ***optimal***, både med beaktande av systemets dynamik och på tillgänglig statistisk information om system- och mätstörningar, kallas ***Kalman-filter***. I detta fall väljer vi speciellt observatörsmatrisen

$$K = PC^T R_2^{-1}$$

där $n \times n$ -matrisen P är lösningen till den så kallade *Riccatiekvationen*

$$AP + PA^T + R_1 = PC^T R_2^{-1} CP$$

som är en andra gradens matrisekvation, och där den *positivt definita lösningen* skall väljas. (I specialfallet då $n = 1$ är *positivt definit* och > 0 samma sak.)

Kalmanfiltret (liksom även andra observatörer) kan uttryckas på formen

$$\hat{X}(s) = H_y(s)Y(s) + H_u(s)U(s)$$

Bestäm i ovanstående fall Kalmanfiltrets överföringsfunktioner, H_y, H_u, samt upprita ett enkelt blockdiagram som visar hur $\hat{x}(t)$ erhålles ur signalerna $y(t)$ och $u(t)$.

5 poäng

Reglerteknik ESS017 och ERE091 2011-08-18/BB

1\. a) $G_A(s) = \frac{s-3}{s^2+2s+6}$ Poler i $-1 \pm j\sqrt{5} \in$ VHP $\Rightarrow$ Stabilt system!

$G_B(s) = \frac{s+3}{s^2+2s}$ Poler i 0 resp -2, dvs en pol på imag. axeln $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ marg. stabilt endast!

$G_C(s) = \frac{s-3}{s^2+6}$ Poler i $\pm j\sqrt{6}$ dvs på imag. axeln $\Rightarrow$ marg stabilt endast

$\therefore$ Endast system A är insignal/utsignal-stabilt!

b) $F(s) = K_p \Rightarrow L(s) = \frac{K_p(s-3)}{s^2+6} \Rightarrow$ KE

$L(s)+1 = 0 : s^2 + K_p s + \underbrace{(6-3K_p)}_{3(2-K_p)} = 0$

Systemet kan stabiliseras för $0 < K_p < 2$.

$F(s) = K_i/s \Rightarrow L(s) = \frac{K_i(s-3)}{s(s^2+6)} \Rightarrow$ KE

$L(s)+1=0 \quad s^3 + (6+K_i)s - K_i 3 = 0$

Lägg till termen $\varepsilon \cdot s^2$ och låt sedan $\varepsilon \to 0$.

Routh:

1	$-K_i 3$	0		1
ε	$6+K_i$	0		0
$-\frac{3K_i\varepsilon + 6 + K_i}{\varepsilon}$	0	0	$\Rightarrow$	$-\infty$
$6+K_i$	0	0		$6+K_i$

Teckenväxlingar går ej att undvika, dvs alltid instabilt

2. $\begin{cases} \dot{C}_A = -C_A + \alpha C_A C_B = f_A(C_A, C_B) \\ \dot{C}_B = -C_B + \beta C_A C_B = f_B(C_A, C_B) \end{cases}$

a) Jämviktspkter: $\begin{cases} C_A^0(\alpha C_B^0 - 1) = 0 \\ C_B^0(\beta C_A^0 - 1) = 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} C_A^0 = 0 \Rightarrow C_B^0 = 0 \\ C_A^0 = 1/\beta \Rightarrow C_B^0 = 1/\alpha \end{array}\right\}$ dvs jv-pkterna är:

$(0, 0)$ resp $(1/\beta, 1/\alpha)$

$\frac{\partial f_A}{\partial C_A} = -1 + \alpha C_B \qquad \frac{\partial f_A}{\partial C_B} = \alpha C_A$

$\frac{\partial f_B}{\partial C_A} = \beta C_B \qquad \frac{\partial f_B}{\partial C_B} = -1 + \beta C_A$

De linjäriserade systemen blir då:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{C}_A \\ \Delta\dot{C}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_A \\ \Delta C_B \end{bmatrix} \text{ resp.}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{C}_A \\ \Delta\dot{C}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha/\beta \\ \beta/\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_A \\ \Delta C_B \end{bmatrix}$$

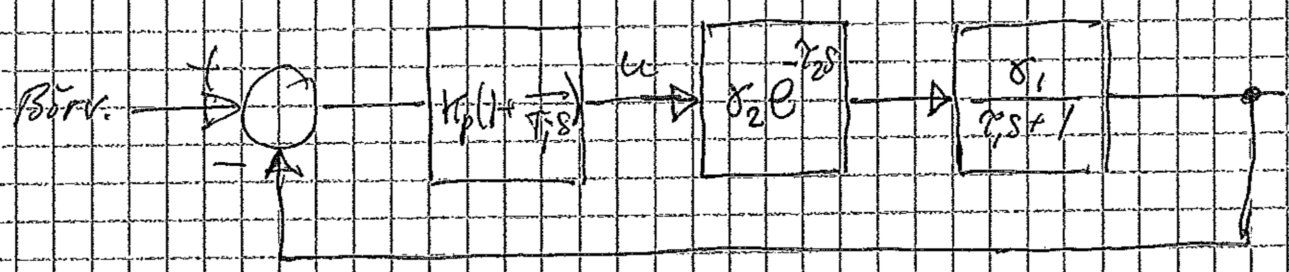
b) Stabiliteten avgörs av egenvärdena för systemmatriserna, dvs:

$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$
två stabila egenv.

$\begin{vmatrix} \lambda & -\alpha/\beta \\ -\beta/\alpha & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$
ett instabilt egenv.

Jämviktspkten $(0, 0)$ är stabil för alla α, β.
" $(1/\beta, 1/\alpha)$ är instabil " " α, β.

3.



$$L(s) = \frac{K_p(T_i s+1)}{T_i s}\cdot \gamma_2 e^{-\tau_2 s}\cdot \frac{\gamma_1}{\tau_1 s+1}$$

Låt oss välja integrationstiden $T_i = \tau_1$!
Efter förkortning av faktorn $(\tau_1 s+1)$ fås:

$$L(s) = \frac{K_p\gamma_1\gamma_2}{\tau_1}\cdot\frac{e^{-\tau_2 s}}{s} = K\cdot\frac{e^{-\tau_2 s}}{s}$$

$$\varphi_m = \pi + \arg\{L(j\omega_c)\} =$$

$$= \pi - \pi/2 - \tau_2\omega_c = \pi/4 \Rightarrow$$

$$\tau_2\omega_c = \pi/4 \Rightarrow \omega_c = \pi/(4\tau_2)$$

$$|L(j\omega_c)| = K\cdot\left|\frac{e^{-j\omega_c\tau_2}}{j\omega_c}\right| = \frac{K}{\omega_c} = \frac{4\tau_2 K}{\pi} = 1$$

$$\Rightarrow K = \frac{\pi}{4\tau_2} = \frac{K_p\gamma_1\gamma_2}{\tau_1} \Rightarrow K_p = \frac{\pi\tau_1}{4\tau_2\gamma_1\gamma_2}$$

$$\therefore\ \underline{\underline{F(s) = \frac{\pi\tau_1}{4\tau_2\gamma_1\gamma_2}\left(1+\frac{1}{\tau_1 s}\right)}}$$

4. a) $Y = G_2\left[G_3 V + G_1\left(PID * (R - Y) - G_F V\right)\right]$

$$\left[1 + G_1 G_2 PID\right] Y = G_1 G_2 PID * R +$$

$$+ \; G_2 (G_3 - G_1 G_F) V$$

Vi önskar att Y (eller $E = R - Y$) skall vara oberoende av störsignalen V. Detta kan åstadkommas om $G_3 - G_1 G_F = 0$, dvs

$$\underline{\underline{G_F(s) = \frac{G_3(s)}{G_1(s)}}}$$

b) G_1 och G_2 minfas (G_1, G_2, G_3 stabila)

$\Rightarrow$ G_F stabilt

G_1 och G_3 minfas

$\Rightarrow$ G_F stabilt

G_2 och G_3 minfas

$\Rightarrow$ G_1 icke-minfas, dvs nollst i HHP

$\Rightarrow$ G_F instabilt, dvs poler i HHP

Slutsatsen är att om $\underline{G_1(s)}$ är ett <u>icke-minfassystem</u>, blir framkopplingsfiltret <u>$G_F(s)$ instabilt</u>, vilket med säkerhet leder till problem!

5. $AP + PA^T + R_1 = PC^T R_2^{-1} CP$, $K = PC^T R_2^{-1}$

I detta specialfall gäller att:

$A = -1$, $B = 1$, $C = 1$, $R_1 = 1$, $R_2 = 1$

$-2p + 1 = p^2 \Rightarrow p^2 + 2p - 1 = 0$

dvs $p = -1 \pm \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow K = \sqrt{2} - 1$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = -\hat{x}(t) + u(t) + (\sqrt{2}-1)\left[y(t) - \hat{x}(t)\right]$$

$$= -\sqrt{2}\,\hat{x}(t) + u(t) + (\sqrt{2}-1)\,y(t)$$

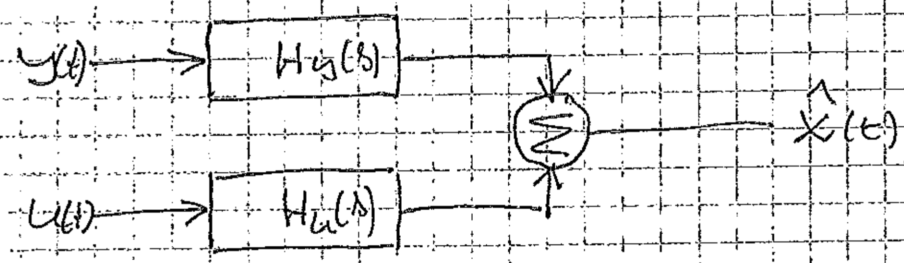
Laplacetransformering ger:

$$(s + \sqrt{2})\hat{X}(s) = U(s) + (\sqrt{2}-1)Y(s)$$

dvs $\hat{X}(s) = H_y(s)\cdot Y(s) + H_u(s)\cdot U(s) \Rightarrow$

$$\underline{\underline{H_y(s) = \frac{\sqrt{2}-1}{s+\sqrt{2}}}}$$

$$\underline{\underline{H_u(s) = \frac{1}{s+\sqrt{2}}}}$$



CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för F2, ERE091, onsdagen 11 januari 2012.

Tid: Kl 08.30 - 12.30

Lokal: M

Examinator: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718

Tentamensresultaten meddelas senast den 25 januari genom personligt e-mail. Granskning av rättningen är möjlig den 30 och 31 januari, 12.30 -13.00, på plan 3 i E-huset (närmast Hörsalsvägen). Iakttag granskningstiderna!

Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Räknefel leder normalt till en halv poängs avdrag. Direkta följdfel leder inte till ytterligare avdrag såvida ingen orimlighet uppstår. Ofullständig lösning leder till större poängavdrag. Det gäller även fullständigt löst uppgift där grövre felaktigheter förekommer, eller om svaret är orimligt. Notera även att svaret på en ställd fråga alltid måste motiveras för poängbidrag. Följande betygskala gäller:

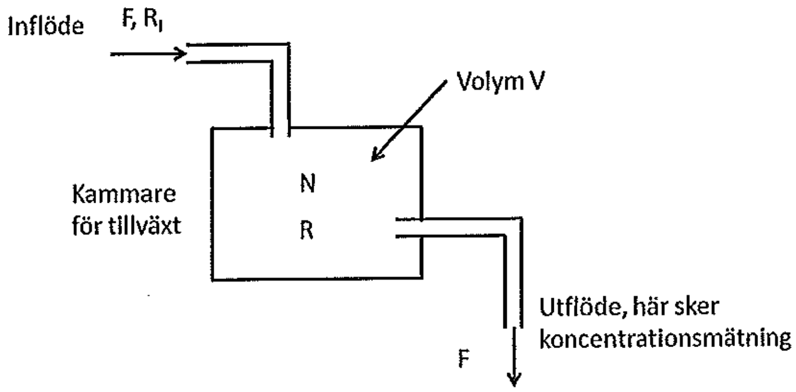
betyg TRE : minst 10 poäng
betyg FYRA: minst 15 poäng
betyg FEM : minst 20 poäng

Tillåtna hjälpmedel:

1. Kursboken, ***Reglerteknik-Grundläggande teori***, av Glad och Ljung, utan anteckningar.
2. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
3. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
4. Valfria räknare med handhavandeinstruktion. Inga "laptop-datorer"!

LYCKA TILL!

1. Figuren nedan visar en schematisk bild över en så kallad kemostat, ett experimentellt system i vilket kontinuerlig tillväxt av mikroorganismer sker.



där N = koncentration av mikroorganismer [kg/m^3]
R = koncentration av näring för mikroorganismerna [kg/m^3]
R_I = inflödeskoncentration av näring [kg/m^3]
F = flödeshastighet [m^3/s]
V = volym [m^3]

Tillväxtkammaren antas vara idealt omrörd. Det innebär att inga koncentrationsgradienter uppstår i kammaren, samt att utflödeskoncentrationerna är de samma som koncentrationerna inne i själva kammaren. Tillgången på näring är avgörande för tillväxten av mikroorganismerna. Dynamiken i systemet kan beskrivas av följande ekvationssystem där de olika termerna relaterar till inflöde, utflöde, konsumtion och produktion:

$$\frac{dVR}{dt} = FR_I - FR - \kappa RN$$

$$\alpha\frac{dVN}{dt} = \kappa RN - \alpha FN$$

- där κ, med enheten [(m^3)^2/(kg · s)], är en parameter som relaterar till konsumtionen av näring, κ antas här vara konstant
- där α är en dimensionslös konstant som påverkar tillväxthastigheten i processen.

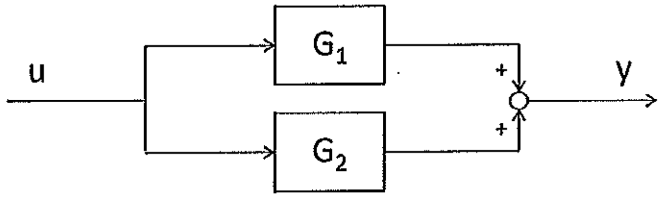
a) Antag att flödeshastigheten F, liksom volymen V, är konstanta. Identifiera den naturliga insignalen samt ett lämpligt antal tillståndsvariabler för systemet. Ange tänkbara utsignaler, samt välj en av dessa. För poäng krävs kort motivering av valen. (1p)

b) Sätt κ = 0.5 (m^3)^2/(kg · s), α = 0.8, F = 0.1 m^3/s och V = 4 m^3. Ta fram en linjäriserad tillståndsmodell för inflödeskoncentrationen R_I = 0.4 kg/m^3. (3p)

c) Bestäm motsvarande överföringsfunktion, G(s), mellan små variationer i insignal respektive utsignal. (2p)

2. Betrakta figuren nedan där $G_1(s)$ och $G_2(s)$ är två delsystem med följande överföringsfunktioner:

$$G_1(s) = \frac{2}{1+s} \qquad G_2(s) = \frac{1}{1+2s}$$



Utsignalen y återkopplas och jämförs med en referenssignal r. Ta fram en regulator som kan generera styrsignalen u så att följande kriterier är uppfyllda

- Inga kvarstående fel vid stegformade ändringar i referensen
- Kretsöverföringen skall ha en fasmarginal på 60 grader och en överkorsningsfrekvens på 1.0 rad/s

(4p)

3. Ett instabilt system modelleras som

$$G(s) = \frac{(s+1)}{(s-1)^2}$$

Utred om systemet kan styras med en PI-regulator, $F(s) = K\,(1 + 1/s)$, för någon inställning av regulatorparametern K. Analysen skall utföras med hjälp av Nyquistkriteriet. (5p)

4. Betrakta följande tillståndsmodell

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

a) Undersök om modellen utgör en minimal realisation. (2p)

b) Utför design av en observatör som skattar tillstånden. Placera observatörens poler i $s = -2 \pm 3j$. (3p)

5. Ett system som modelleras av en ren integrator, $G(s) = 1/s$, styrs med P-regulatorn $F(s) = k$ där $k > 0$.

a) Bestäm största värdet av komplementära känslighetsfunktionen i detta fall. (1p)

b) I verkligheten är överföringsfunktionen lite mer komplicerad:

$$G_0(s) = G(s)\frac{(1+d)s+1}{(1-d)s+1}$$

där beloppet av osäkerhetsparametern d < 1.

Bestäm största värdet av beloppet av Δ_G i den multiplikativa osäkerhetsmodellen

$$G_0(s) = \big(1 + \Delta_G(s)\big)G(s) \qquad \text{(2p)}$$

c) Mellan vilka värden i intervallet {-1, 1} får parametern d variera för att robust stabilitet skall garanteras enligt lågförstärkningssatsen

$$|\Delta_G(j\omega)| < \frac{1}{|T(j\omega)|} \quad \forall\, \omega \qquad \text{(2p)}$$

ESS017 och ERE091

TENTAMEN I REGLERTEKNIK, 11 jan. 2012

(1) a) <u>Insignal</u>: R_I, inflödeskoncentrationen $\boxed{R_I = u}$
påverkar systemet utifrån, variabel (då ej annat angetts)

<u>Utsignal</u>: N, konc. av mikroorg., $\boxed{N = y}$
eller R, konc. av näring $\boxed{R = y}$ konc. mätning sker vid utflödet.

<u>Tillstånd</u>: R och N, de bägge koncentrationerna varierar i tiden enligt givet ekv. syst. $\boxed{\begin{matrix} R = x_1 \\ N = x_2 \end{matrix}}$

b) Bestäm arbetspunkten!

$u_0 = R_{I,0} = 0.4$ kg/m^3

I arb.pkt. är tidsderivatorna $= 0 \implies$

$$\begin{cases} FR_{I,0} - FR_0 - \kappa R_0 N_0 = 0 & (1) \\ \kappa R_0 N_0 - \alpha F N_0 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \implies \frac{1}{2} R_0 N_0 - 0.8 \cdot 0.1 N_0 = 0$$

$$N_0\left(\frac{R_0}{2} - 0.08\right) = 0 \implies \underline{\underline{R_0 = 0.16 \text{ kg/m}^3}}$$

$$(1) \implies 0.1 \cdot 0.4 - 0.1 \cdot 0.16 - \frac{1}{2} 0.16 N_0 = 0$$

$$\implies \underline{\underline{N_0 = 0.30 \text{ kg/m}^3}}$$

Det olinjära ekv. syst.:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dR}{dt} = \frac{1}{V}(FR_I - FR - \kappa RN) = f_1(R_I, R, N) = f_1(u, x)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{dN}{dt} = \frac{1}{V}\left(\frac{\kappa RN}{\alpha} - FN\right) = f_2(R_I, R, N) = f_2(u, x)$$

Partiella derivator utvärderade i arbetspunkten:

$$f_1: \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_0 = \frac{1}{V}(-F - \kappa N_0) = \frac{1}{4}\left(-0.1 - \frac{1}{2} \cdot 0.3\right) = -\frac{1}{16} = -0.0625$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_0 = \frac{1}{V}(-\kappa R_0) = \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.16 = \frac{-2}{100} = \frac{-1}{50} = -0.02$$

(b) forts)

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_0 = \frac{F}{V} = \frac{0,1}{4} = \frac{1}{40} = 0,025$$

f_2: $$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_0 = \frac{1}{V}\left(\frac{\kappa N_0}{\alpha}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{8} = \frac{3}{64} = 0,0469$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_0 = \frac{1}{V}\left(\frac{\kappa R_0}{\alpha} - F\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{100}\cdot\frac{10}{8} - \frac{1}{10}\right) = 0$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_0 = 0$$

Linjäriserad tillståndsmodell:

$$\Delta\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} & -\frac{1}{50} \\ \frac{3}{64} & 0 \end{bmatrix}\Delta x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{40} \\ 0 \end{bmatrix}\delta u(t)$$

$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\Delta x(t) \quad \text{om} \quad y = R$$

$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\Delta x(t) \quad \text{om} \quad y = N$$

c) $$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s-a_{11}) - a_{21}a_{12}}\begin{bmatrix} s & a_{12} \\ a_{21} & s-a_{11} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = C\cdot\frac{1}{s(s-a_{11}) - a_{21}a_{12}}\begin{bmatrix} \frac{s}{40} \\ a_{21}\cdot\frac{1}{40} \end{bmatrix} =$$

$$= C\cdot\frac{1}{s^2 + \frac{s}{16} + \frac{3}{3200}}\begin{bmatrix} \frac{s}{40} \\ \frac{3}{2560} \end{bmatrix}$$

$$\Delta y = \Delta R \Rightarrow G(s) = \frac{s}{40s^2 + 2,5s + 0,0375}$$

$$\Delta y = \Delta N \longrightarrow G(s) = \frac{3}{2560s^2 + 160s + 2,4}$$

(2) $Y(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) = \underbrace{(G_1 + G_2)}_{=G(s)} U(s)$

$$G(s) = G_1 + G_2 = \frac{2}{1+s} + \frac{1}{1+2s} = \frac{5s+3}{(1+s)(1+2s)}$$

PI-reg: $F(s) = \frac{K(1+\tau_i s)}{\tau_i s}$ Integrerande verkan krävs för att eliminera konstantende fel.

$\varphi_m = \angle \mathcal{L}(j\omega_c) + 180^\circ$

$|\mathcal{L}(j\omega_c)| = 1$

$\mathcal{L}(s) = F(s)G(s)$

Specifikationer:

$\omega_c = 1$ rad/s

$\varphi_m = 45^\circ$

$$\varphi_m = \operatorname{atan} \tau_i\omega_c - 90^\circ + \operatorname{atan}\frac{5\omega_c}{3} - \operatorname{atan}\omega_c$$

$$- \operatorname{atan} 2\omega_c + 180^\circ = 45^\circ \implies \tau_i \approx 0.35$$

$$|\mathcal{L}(j\omega_c)| = \frac{K}{\tau_i\omega_c}\sqrt{1^2 + (\tau_i\omega_c)^2} \cdot \frac{\sqrt{(5\omega_c)^2 + 3^2}}{\sqrt{1^2+\omega_c^2}\sqrt{1^2+(2\omega_c)^2}} = 1$$

$$\implies K \approx 0.18$$

$$F(s) = \frac{0.18(1+0.35s)}{0.35s} = \underline{\underline{\frac{0.51(1+0.35s)}{s}}}$$

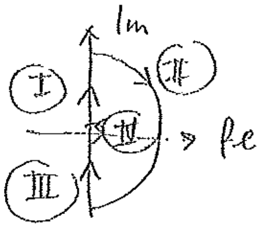
3) $G(s) = \dfrac{s+1}{(s-1)^2}$, $F(s) = K\left(1 + \dfrac{1}{s}\right) = \dfrac{K(1+s)}{s}$

$$L(s) = \frac{K}{s}\frac{(s+1)^2}{(s-1)^2} = \frac{K}{s}\frac{(s^2+2s+1)}{(s^2-2s+1)}$$

Sätt tex. $K=1$ och rita Nyquistkurvan.

Kretsöverföringen $\mathcal{L}(s)$ har en pol i origo, samt två poler i HHP. $\Longrightarrow$ $P=2$ $\Longrightarrow$ Fullständiga Nyquistkurvan!

Nyquist kontur:



(I) $s = j\omega$ där ω går från 0^+ till $+\infty$

$$\mathcal{L}(j\omega) = \mathrm{Re}(\mathcal{L}(j\omega)) + j\cdot \mathrm{Im}(\mathcal{L}(j\omega)) =$$

$$= \frac{4\omega(1-\omega^2)}{n(\omega)} + j\cdot\frac{(4\omega^2-(1-\omega^2)^2)}{n(\omega)}$$

där $n(\omega) = \omega\left((1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\right)$

Tabell:

ω	Re	Im
0.1	3.9	-9.2
0.2	3.6	-3.5
0.5	1.9	0.56
0.8	0.53	1.1
1.0	0	1.0
1.2	-0.30	0.78
1.5	-0.47	0.47
2.0	-0.48	0.14
4.0	-0.20	-0.14
10	-0.04	-0.09

(II) $s = Re^{j\varphi}$, $R \longrightarrow \infty$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ till $-\frac{\pi}{2}$

R stor: $\mathcal{L}(Re^{j\varphi}) \longrightarrow \dfrac{1}{Re^{j\varphi}}$

$R \to \infty$: $\mathcal{L} \longrightarrow 0$ oavsett φ-värde.

Hela (II) avbildas i origo

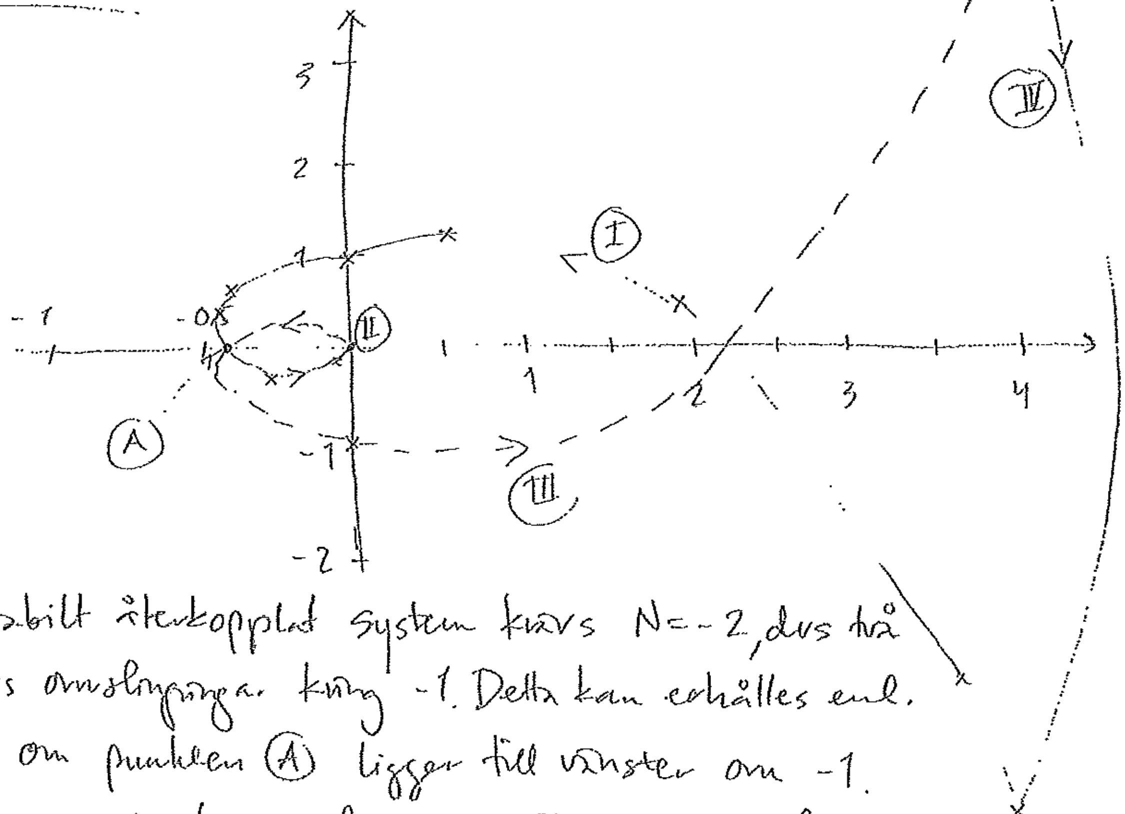
(III) $s = j\omega$ där ω går från $-\infty$ till 0^-. Spegling av (I) i Re-axeln.

(IV) $s = re^{j\theta}$, $r \to 0$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$ till $\frac{\pi}{2}$

Litet r: $\mathcal{L}(re^{j\theta}) \longrightarrow \frac{1}{re^{j\theta}} = \frac{1}{r}e^{-j\theta}$

$r \to 0$ ger $\frac{1}{r} \to \infty$; vinkelläge från $+\frac{\pi}{2}$ till $-\frac{\pi}{2}$

Rita kurvan!



För stabilt återkopplat system krävs $N = -2$, dvs två moturs omslingringar kring -1. Detta kan erhålles enl. figur om punkten (A) ligger till vänster om -1.

Enligt tabell ligger, för $K = 1$, (A) mellan frekvenserna $\omega = 2$ och $\omega = 4$ rad/s.

Numerisk iterering eller algebraisk lösning (av $\mathrm{Im}(\mathcal{L}(j\omega)) = 0$) eller avläsning i graf ger att skärningen sker för $\omega \approx 2.4$ rad/s vid $\mathrm{Re}(\mathcal{L}(j \cdot 2.4)) \approx -0.415$.

Skärning i -1 fås då:

$$K \cdot \mathrm{Re}(\mathcal{L}(j \cdot 2.4)) = -1 \implies K = 2.41$$

För $K > 2.4$ erhålls stabilt återkopplat system.

④ a) Styrbarhet: $S(A,B) = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\det S = 0$ Ej styrbart!

Observerbarhet: $\mathcal{O}(A,C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\det \mathcal{O} = -2$ Observerbart!

b) Observatör: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) =$

$= (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$

där $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$

Skattningsfelets dynamik ges av: $\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$

$A - KC = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} [0 \;\; 1] = \begin{bmatrix} -2 & -k_1 \\ 2 & -1-k_2 \end{bmatrix}$

Observatörens poler ges av $\det(sI - (A - KC)) = 0$

$\begin{vmatrix} s+2 & k_1 \\ -2 & s+1+k_2 \end{vmatrix} = (s+2)(s+1+k_2) + 2k_1 =$

$= s^2 + s(3+k_2) + 2(1+k_1+k_2) = 0$

Önskad polplacering: $(s - (-2+3j))(s - (-2-3j)) =$

$= s^2 + 4s + 13$

Jämför koefficienter: $3 + k_2 = 4 \Longrightarrow k_2 = 1$

$2(1+k_1+k_2) = 13 \longrightarrow k_1 = 4.5$

Observatören blir:

$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$ med $K = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 1 \end{bmatrix}$

(5) a) $T(s) = \dfrac{L(s)}{1+L(s)}$; $L(s) = G(s)F(s) = \dfrac{k}{s}$, $k > 0$

$$T(s) = \frac{k}{s+k} \qquad |T(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{\omega^2+k^2}}$$

$|T(j\omega)|_{max} = 1$ då $\omega \to 0$

b) $$(1+\Delta_G(s)) = \frac{(1+d)s+1}{(1-d)s+1}$$

$$\Delta_G = \frac{(1+d)s+1-((1-d)s+1)}{(1-d)s+1} =$$

$$= \frac{s+ds+1-s+ds-1}{(1-d)s+1} = \frac{2ds}{(1-d)s+1}$$

$$|\Delta_G(j\omega)| = \left| \frac{2d\omega}{(1-d)j\omega+1} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{(2d\omega)^2}}{\sqrt{(1-d)^2\omega^2+1^2}}$$

Maxvärde för $|\Delta_G(j\omega)|$ fås då $\omega \to \infty$

$$|\Delta_G(j\omega)|_{max} = \frac{2d}{1-d}$$

c) $|\Delta_G(j\omega)| < \dfrac{1}{|T(j\omega)|}$ $\forall\ \omega$ innebär stabilitet

med $|T(j\omega)|_{max}$ fås lägsta värde för $\dfrac{1}{|T(j\omega)|}$ och med

$|\Delta_G(j\omega)|_{max}$ fås värsta tänkbara fall.

$\rightarrow$

(c) forts)

$$|\Delta G(j\omega)|_{max} < \frac{1}{|T(j\omega)|_{max}}$$

Undersök för d i intervallet $\{-1, 1\}$

Betrakta $|d|$ i olikheten ovan:

$$\frac{2|d|}{1-|d|} < 1$$

$$3|d| < 1$$

$$|d| < \frac{1}{3} \implies -\frac{1}{3} < d < \frac{1}{3}$$

ger robust stabilitet