CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik, automation och mekatronik

Tentamen i Reglerteknik för F2, ERE091, och för Kf2, ESS016,
lördagen den 7 januari 2006.

Tid: Kl 14.00 - 18.00

Lokal: V

Lärare: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718

Tentamensresultaten anslås senast den 24 januari på avdelningens anslagstavla. Granskning av rättningen kan ske den 24 och 25 januari, kl 12.30 -13.00, på avdelningen för reglerteknik, våning 5 i E-huset. Iakttag granskningstiderna! Den som kommer senare får endast avge klagomål mot rättningen skriftligen.

Tentamen omfattar totalt 30 poäng. Räknefel leder normalt till en poängs avdrag. Ett direkt följdfel (såvida ingen orimlighet "dyker upp") leder inte till ytterligare poängavdrag. Ofullständiga lösningar leder till större poängavdrag. Detta gäller även fullständigt lösta uppgifter där grövre felaktigheter förekommer, alternativt om svaret är fullständigt orimligt. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 12 poäng
betyg FYRA: minst 18 poäng
betyg FEM : minst 24 poäng

Tillåtna hjälpmedel:

1. Kursboken, dvs ***Reglerteknik**-Grundläggande teori*, av Glad och Ljung.
2. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
3. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
4. Valfria räknare med handhavandeinstruktion. Inga "laptop-datorer"!

LYCKA TILL!

1. En vätska strömmar till och från ett kar med det konstanta volymsflödet 1 liter/sekund. Den uppehållna vätskemängden i karet är 100 liter. Vätskans specifika värme är 4 kJ per kg och K, och dess densitet är 1 kg per liter. I karet finns en uppvärmningsanordning, som avger en maximal styrbar effekt på 100 kw, och en omrörningsanordning som kan antas fungera väl.

a) Antag att temperaturen på det ingående flödet är 290 K, och att det utgående flödets temperatur förväntas vara 310 K. Räcker uppvärmningsanordningen för att i ***steady state*** (stationära tillståndet) klara specifikationen?

2 poäng

b) Härled överföringsfunktionerna $G(s)$ och $G_d(s)$, som beskriver hur ändringar i den tillförda effekten respektive i temperaturen på det ingående flödet, ger upphov till ändringar i temperaturen på det utgående flödet.

2 poäng

c) Antag att överföringsfunktionen $G(s)$ ovan är $0,25/(100s + 1)$. Bestäm en PI-regulator så att det återkopplade systemets stigtid blir ungefär en minut.

2 poäng

d) Antag att överföringsfunktionen $G_d(s)$ ovan är $1/(100s + 1)$. Temperaturen på det ingående flödet sjunker plötsligt med 3 K. Bestäm kvarstående felet, då en PI-regulator enligt ovan är inkopplad. Hur mycket kan denna temperatur i värsta fall tillåtas sjunka utan att problem uppstår med att hålla den specificerade temperaturen 310 K?

3 poäng

e) Med G och G_d enligt ovan, bestäm en framkoppling sådan att inverkan av en (inte alltför stor) mätbar störning i temperaturen på det ingående flödet, helt kan släckas ut. Ett tydligt schema över det resulterande styrsystemet skall uppritas för full poäng på denna uppgift!

3 poäng

2. Upprita Nyquistkurvan då systemets kretsöverföringen är

$$L(s) = \frac{1-s}{s+s^2}$$

Avgör utifrån Nyquistkurvan det återkopplade systemets stabilitet. Kan Nyquists förenklade kriterium användas i detta fall? Hur mycket bör kretsförstärkningen ändras (dvs en "extra" P-regulator) för att systemet skall få amplitudmarginalen 8 dB (eller 2,5 gånger)?

4 poäng

3. En process kan (i en viss arbetspunkt) beskrivas med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1+4s}{s(1+s)^2}e^{-s}$$

Upprita ett fullständigt Bodediagram för processen G(s), dvs både belopp- och faskurva skall redovisas. Bestäm en P-regulator (direkt ur Bodediagrammet), så att återkopplade systemets fasmarginal blir 40°.

4 poäng

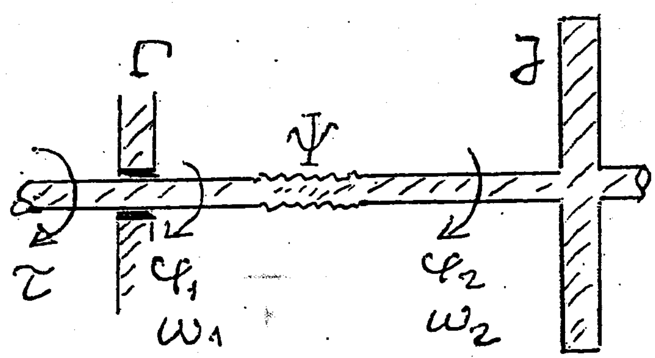
4. I en bioreaktor reagerar substrat med bakterier i cellsyntes. Reaktionshastigheten är en så kallad Monodfunktion av substratkoncentrationen c (mol/liter)

$$r = \frac{r_0 \cdot c}{K+c}$$

där r_0 och K är konstanta parametrar. Reaktorn har konstant volym V (liter) och konstant volymsgenomflöde Q (liter/minut). Koncentrationen av substrat i feed- flödet är c_i (mol/liter). Vid reaktionen förbrukas substrat, så att koncentrations-ändringen per minut är $a \cdot r \cdot X$, där a är en konstant och bakteriekoncentrationen x är en oberoende insignal. Arbetspunkten är c_{i0}, c_0, X_0. Härled i denna arbetspunkt en överföringsfunktion från små variationer i feedens koncentration c_i till motsvarande variationer i substratkoncentrationen c, dvs $\Delta C(s)/\Delta C_i(s)$.

4 poäng

5. Ett tungt svänghjul skall vinkelpositioneras med hjälp av ett servosystem. Ingående axeln påverkas av ett drivande moment τ, som utgör systemets instorhet, och av dynamisk friktion, som ger ett bromsande moment $\Gamma \cdot \omega_1$, och (via en torosionsfjäder) av den utgående axeln som ger ett bromsande moment $\Psi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$, där Γ och Ψ är givna konstanter. Svänghjulet, som är monterat på utgående axel, har ett känt tröghetsmoment, J. Axlarnas vinkellägen och vinkelhastigheter är $\varphi_1, \varphi_2, \omega_1, \omega_2$ respektive.



a) Visa att, då som tillståndsstorheter väljes $x_1 = \varphi_1, x_2 = \varphi_2, x_3 = \omega_2$, tillståndsekvationen

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\psi/\Gamma & \psi/\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \psi/J & -\psi/J & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1/\Gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

uppstår.

2 poäng

b) Tyvärr går inte alla tillståndsstorheter att direkt mäta. Det finns två möjligheter: Den ena är att mäta enbart vinkelhastigheten ω_2, och den andra är att mäta enbart vinkelläget φ_2. Kan någon av dessa två alternativa mätningar användas som insignal till en observatör, avsedd för rekonstruktion av tillståndsvektorn $x(t)$? Bestäm i så fall en observatörsmatris K, sådan att observatörens poler samtliga hamnar i $s = -\nu$.

4 poäng

EREO91 060107

1. <u>Energibalans:</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\rho c_p V T\right) = P + \rho c_p Q\left(T_{in} - T\right)$$

($T_{ut} \approx T$ pga bra omrörning.)

a) Steady state: $0 = P + \rho c_p Q\left(T_{in} - T\right)$

$$\underline{\underline{P}} = \rho c_p Q\left(T - T_{in}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 4\left(310 - 290\right) =$$

$$= \underline{\underline{80\ kW}} \leq 100\ kW \Rightarrow \text{Den räcker!}$$

b) $$\frac{V}{Q}\frac{dT}{dt} + T = T_{in} + \frac{P}{\rho c_p Q}$$

Linjär ekv $\Rightarrow$ kan räkna med "totala" variabler

Laplacetransformera:

$$\left(\frac{V}{Q}s + 1\right)T(s) = T_{in}(s) + \frac{1}{\rho c_p Q}P(s)$$

eller $$\left(\frac{V}{Q}s + 1\right)\Delta T(s) = \Delta T_{in}(s) + \frac{1}{\rho c_p Q}\Delta P(s)$$

Man får direkt att:

$$\underline{\underline{G_d(s) = \frac{1}{\frac{V}{Q}s + 1}}} \quad \text{och} \quad \underline{\underline{G_r(s) = \frac{\left(\rho c_p Q\right)^{-1}}{\frac{V}{Q}s + 1}}}$$

c) $\left(\rho c_p Q\right)^{-1} = \left(1 \cdot 4 \cdot 1\cancel{00}\right)^{-1} = 1/4\cancel{00}$

$V/Q = 100/1 = 100$

$$L(s) = G_r(s)F(s) = \frac{0{,}25}{100s+1} \cdot \overbrace{\frac{k(100s+1)}{100s}}^{t.ex} =$$

$$= \frac{k}{400s} \Rightarrow G_c(s) = \frac{k}{400s + k} \qquad t_r \approx 2{,}2\,\tau = 1$$

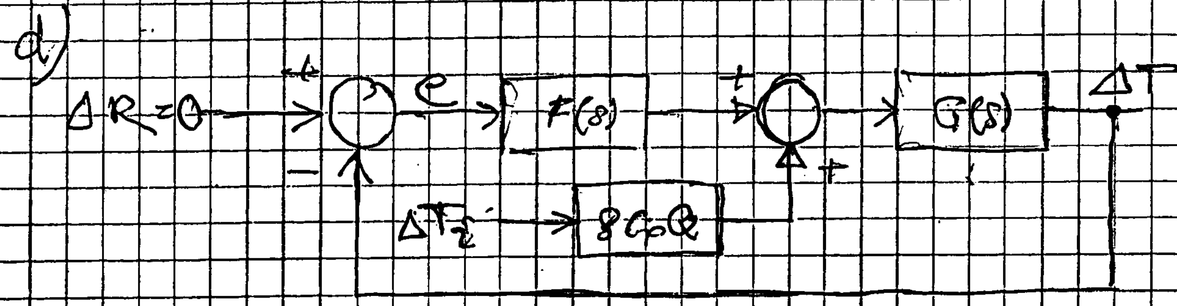
(Angivet = 0,8)

1. c) $t_r = 2{,}2 \cdot \frac{400}{k} = 60 \Rightarrow k = \frac{880}{60}$

forts.

$$k \approx 15 \Rightarrow \underline{F(s) = 15\left(1 + \frac{1}{400s}\right)}$$

d)



$$E = -\Delta T = -G(s)\left[8C_pQ\,\Delta T_i + F(s)E\right]$$

$$[1 + G(s)F(s)]E(s) = -8C_pQ\,G(s)\,\Delta T_i(s) =$$

$$= -G_d(s)\,\Delta T_i(s)$$

$$E(s) = -\frac{G_d(s)}{1 + G(s)F(s)}\,\Delta T_i(s) =$$

$$= -\frac{\frac{1}{100s+1}\,\Delta T_i(s)}{1 + \frac{0{,}25}{100s+1}\cdot\frac{15(100s+1)}{400s}} = -\frac{\Delta T_i(s)}{1 + \frac{15}{400s}}$$

$$= -\frac{80s}{80s+3}\cdot\Delta T_i(s) = -\frac{80s}{80s+3}\cdot\frac{\Delta T_{i0}}{s} =$$

$$= -\frac{80\cdot\Delta T_i}{3 + 80s} = -\frac{\Delta T_i}{s + 3/80}$$

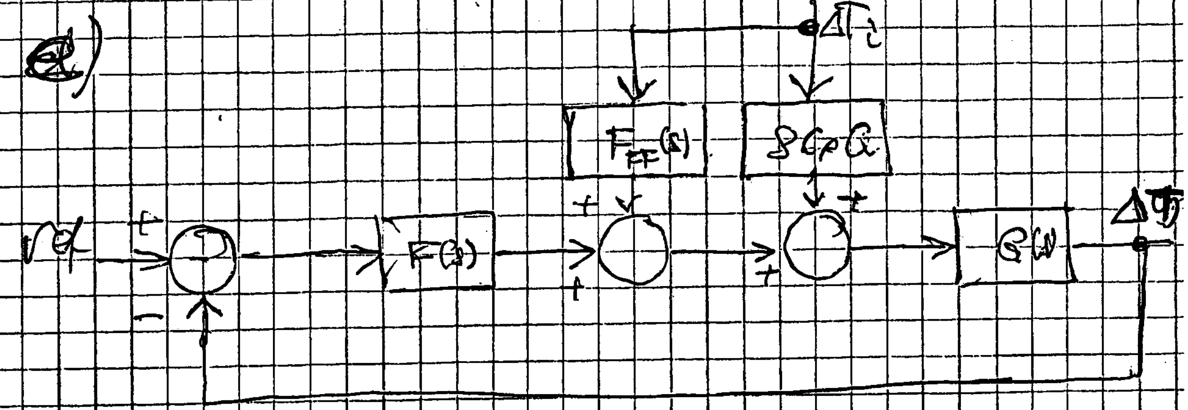
$\underline{\underline{e(\infty)}} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \underline{\underline{0}}$ för $\Delta T_i = -3K$

$$P = 4\cdot(310 - (290 + \Delta T_i)) =$$

$$= 80 - 4\cdot\Delta T_i \le 100 \Rightarrow$$

$$-\Delta T_i \le 5 \Rightarrow \underline{\underline{\Delta T_i \ge -5K}}$$

d)



För att utsläckning av störningen skall ske måste:

$$G(s)\underbrace{\left(F_{FF}(s) + \rho C_p Q\right)}\Delta T_i(s) = \Delta T(s) = 0$$

$$\Rightarrow \quad = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FF}(s) = \underline{\underline{-\rho C_p Q}}$$

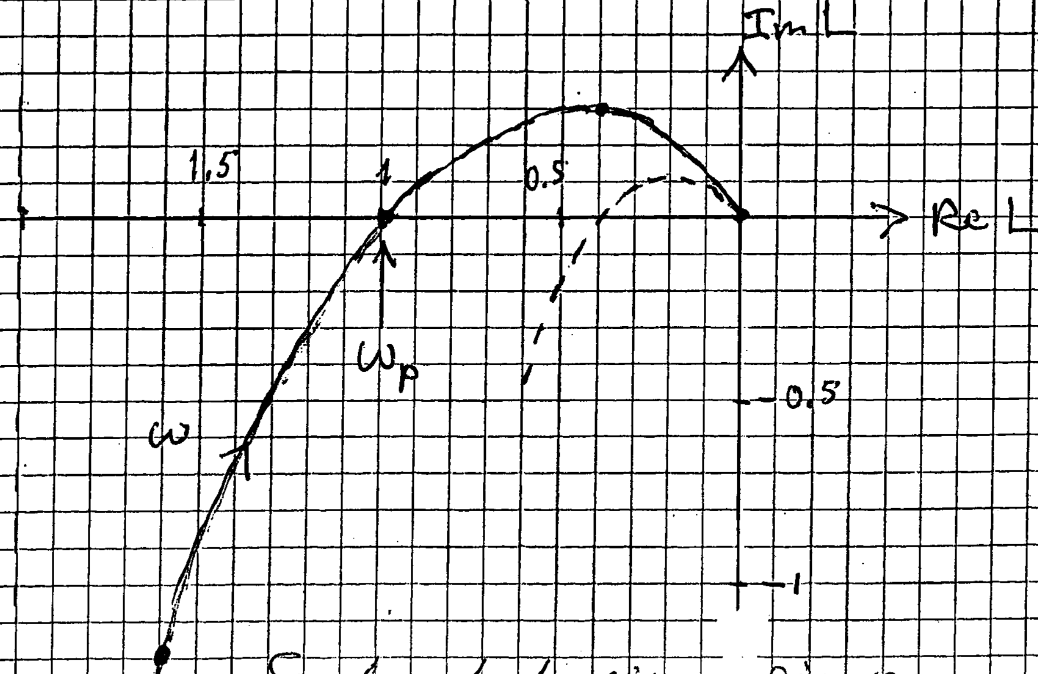
2)
$$L(s) = \frac{1-s}{s(1+s)}$$

Systemet har inga poler i HHP, vilket innebär att Nyquists förenklade kriterium kan användas här.

$$L(j\omega) = \frac{1-j\omega}{j\omega(1+j\omega)} = \frac{(1-j\omega)^2}{j\omega(1+\omega^2)} =$$

$$= \frac{1-\omega^2-j2\omega}{j\omega(1+\omega^2)} = -\frac{2}{1+\omega^2} - j\frac{1-\omega^2}{\omega(1+\omega^2)}$$

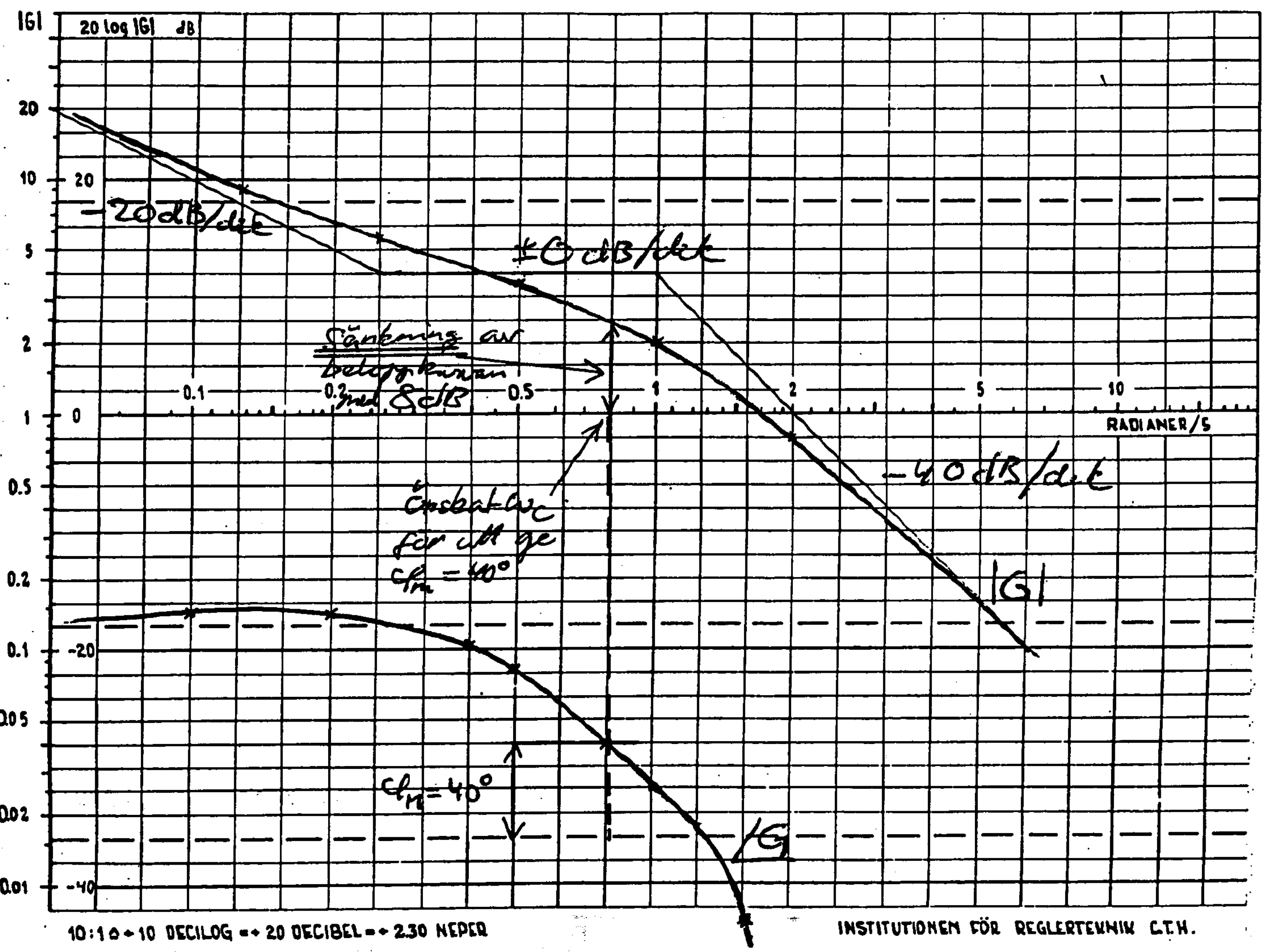
ω	Re $L(j\omega)$	Im $L(j\omega)$
0	−2	−∞
0.5	−1.6	−1,2
1	−1	0
2	−0.4	0.3
∞	0	0



Systemet befinner sig på stabilitetsgränsen, dvs extra

3) $$G(j\omega) = \frac{(1 + j\omega/0{,}25)\, e^{-j\omega}}{j\omega\,(1 + j\omega/1{,}0)^2}$$

$$\arg\{G(j\omega)\} = -90^\circ + \arctan(4\omega) - 2\arctan\omega - \omega \cdot 57{,}3^\circ$$



Sänkning med 8 dB = 2,5 ggr fås med P-regulator $K = 1/2{,}5 = 0{,}4$. Ger $\varphi_m = 40^\circ$.

4) Materialbalans:

$$\frac{d}{dt}\left(V c(t)\right) = Q\left(c_i(t) - c(t)\right) - a r X(t)$$

$$\frac{V}{Q}\frac{dc}{dt} = c_i - c - \frac{aX}{Q}\frac{r_0 c}{K+c} = f(c, c_i, X)$$

$$\frac{V}{Q}\frac{d}{dt}\Delta c = \Delta c_i - \Delta c - \left[\frac{aXr_0}{Q}\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{c}{K+c}\right)\right]_{\substack{X=X_0\\ c=c_0}}\Delta c$$

$$= \Delta c_i - \Delta c - \frac{aX_0 r_0}{Q}\cdot\left[\frac{(K+c)\cdot 1 - c\cdot 1}{(K+c)^2}\right]_{c=c_0}\Delta c$$

$$= \Delta c_i - \Delta c - \frac{aX_0 r_0}{Q}\cdot\frac{K}{(K+c_0)^2}\Delta c$$

Laplacetransformering ger:

$$\left(\frac{V}{Q}s + 1 + \frac{aKX_0 r_0}{Q(K+c_0)^2}\right)\Delta C(s) = \Delta C_i(s)$$

$$\underline{\underline{\frac{\Delta C(s)}{\Delta C_i(s)}}} = \frac{1}{\frac{V}{Q}s + 1 + \frac{aKX_0 r_0}{Q(K+c_0)^2}} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\frac{Q}{V}}{s + \frac{Q}{V} + \frac{aKX_0 r_0}{V(K+c_0)^2}}}}$$

5. a) $\begin{cases} \tau - \Gamma\omega_1 - \Psi(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 & (1) \\ \Psi(\varphi_1 - \varphi_2) - J\dot{\omega}_2 = 0 & (2) \end{cases}$

(1) $\Rightarrow$ $\Gamma\omega_1 = \Gamma\dot{\varphi}_1 = -\Psi(\varphi_1 - \varphi_2) + \tau$

eller $\Gamma\dot{x}_1 = -\Psi(x_1 - x_2) + u$

(2) $\Rightarrow$ $J\dot{\omega}_2 = J\dot{x}_3 = \Psi(x_1 - x_2)$

dessutom är $\omega_2 = \dot{\varphi}_2 = x_3$. Detta ger:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(\Psi/\Gamma)\cdot(x_1 - x_2) + (1/\Gamma)\cdot u \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = (\Psi/J)(x_1 - x_2) \end{cases}$$

dvs

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{\Psi}{\Gamma} & \frac{\Psi}{\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\Psi}{J} & -\frac{\Psi}{J} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

b) A-matrisen har strukturen $\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta & -\beta & 0 \end{pmatrix}$.

Alternativ 1: $C_1 = (0 \ 0 \ 1)$

— " — 2: $C_2 = (0 \ 1 \ 0)$

$$\begin{cases} C_1 A = (0 \ 0 \ 1)\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta & -\beta & 0 \end{pmatrix} = (\beta \ -\beta \ 0) \\ C_1 A^2 = (\beta \ -\beta \ 0)\begin{pmatrix} \ldots \end{pmatrix} = (-\alpha\beta \ \alpha\beta \ -\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 A = (0 \ 1 \ 0)\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta & -\beta & 0 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 1) \\ C_2 A^2 = (\beta \ -\beta \ 0) \end{cases}$$

5. b (forts)

$$\det\{O_1\} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \beta & -\beta & 0 \\ -\alpha\beta & \alpha\beta & -\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & -\beta \\ -\alpha\beta & \alpha\beta \end{vmatrix} = \alpha\beta^2 - \alpha\beta^2 = 0$$

dvs O_1 är inte ranghög $\Rightarrow$ Systemet är inte observerbart!

$$\det\{O_2\} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta & -\beta & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \beta & 0 \end{vmatrix} = -(-\beta) = \beta \neq 0$$

dvs O_2 är ranghög $\Rightarrow$ Systemet är observerbart

! Vi kan rekonstruera tillståndet utifrån mätning av φ_2.

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu + K\left[y - C\hat{x}\right] =$$

$$= \underbrace{(A - KC)}_{\text{denna matris egenv. = observatörens poler}}\hat{x} + Bu + Ky$$

$$A - KC = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta & -\beta & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}(0\ 1\ 0)$$

$$\det\left[\lambda I - A + KC\right] = \begin{vmatrix} \lambda+\alpha & -\alpha+k_1 & 0 \\ 0 & \lambda+k_2 & -1 \\ -\beta & \beta+k_3 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+\alpha)\left[\lambda^2 + k_2\lambda + \beta + k_3\right] + \underbrace{(\alpha-k_1)(-\beta)}_{-\alpha\beta + k_1\beta} =$$

$$= \lambda^3 + (k_2+\alpha)\lambda^2 + (k_3+\beta+\alpha k_2)\lambda + \alpha k_3 + \beta k_1$$

5.6 (forts) $\det[\lambda I - A + KC] = (\lambda + \nu)^3 \Rightarrow$

$$\lambda^3 + (k_2 + \alpha)\lambda^2 + (k_3 + \beta + \alpha k_2)\lambda + \alpha k_3 + \beta k_1 \equiv$$

$$\equiv \lambda^3 + 3\nu\lambda^2 + 3\nu^2\lambda + \nu^3 \Rightarrow$$

$$k_2 + \alpha = 3\nu \Rightarrow k_2 = 3\nu - \alpha$$

$$k_3 + \beta + \alpha k_2 = 3\nu^2 \Rightarrow k_3 = 3\nu^2 - \beta - \alpha k_2 =$$

$$= 3\nu^2 - \beta - \alpha(3\nu - \alpha) = 3\nu^2 - 3\alpha\nu - \beta + \alpha^2$$

$$\alpha k_3 + \beta k_1 = \nu^3 \Rightarrow \beta k_1 = \nu^3 - \alpha k_3 =$$

$$= \nu^3 - 3\nu^2\alpha + 3\nu\alpha^2 + \alpha\beta - \alpha^3$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta}\left[\nu^3 - 3\alpha\nu^2 + 3\alpha^2\nu + \alpha\beta - \alpha^3\right] \\ 3\nu - \alpha \\ 3\nu^2 - 3\alpha\nu - \beta + \alpha^2 \end{bmatrix}$$