CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik, automation och mekatronik

Tentamen i Reglerteknik för F2, ERE091, och för Kf2, ESS016,
tisdagen den 24 maj 2005.

Tid: Kl 08.30 - 12.30

Lokal: V

Lärare: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718

Tentamensresultaten anslås senast den 9 juni på avdelningens anslagstavla. Granskning av rättningen kan ske den 9 och 10 juni, kl 12.30 -13.00, på avdelningen för reglerteknik, våning 5 i E-huset. Iakttag granskningstiderna! Den som kommer senare får endast avge klagomål mot rättningen skriftligen. (Pga sommaren accepterar vi sådana klagomål t o m augusti.)

Tentamen omfattar totalt 30 poäng. Räknefel leder normalt till en poängs avdrag. Ett direkt följdfel (såvida ingen orimlighet "dyker upp") leder inte till ytterligare poängavdrag. Ofullständiga lösningar leder till större poängavdrag. Detta gäller även fullständigt lösta uppgifter där grövre felaktigheter förekommer, alternativt om svaret är fullständigt orimligt. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 12 poäng
betyg FYRA: minst 18 poäng
betyg FEM : minst 24 poäng

Tillåtna hjälpmedel:

1. Kursboken, dvs ***Reglerteknik-Grundläggande teori***, av Glad och Ljung.
2. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
3. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
4. Valfria räknare med handhavandeinstruktion. Inga "laptop-datorer"!

LYCKA TILL!

1. Betrakta det linjära tidsinvarianta systemet med överföringsfunktionen G, där

$$G(s) = \frac{1-2s}{(1+s)^2}$$

a) Är systemet G insignal-utsignalstabilt? Uppritа frekvensfunktionen $G(i\omega)$ i ett fullständigt Bodediagram.

3 poäng

b) Hur kan man se att systemet är av icke-minimumfastyp? Vilken överföringsfunktion har motsvarande minimumfassystem?

2 poäng

c) Systemet $G(s)$ skall P-regleras. Hur stor positiv yttre förstärkning tål det återkopplade systemet innan instabilitet inträffar om man använder Rouths metod, respektive om man använder lågförstärkningssatsen. Ge en förklaring till eventuella skillnader i resultaten.

3 poäng

2. Ett linjärt system som beskrivs av modellen med överföringsfunktionen G, skall PI-regleras.

$$G(s) = \frac{\gamma}{\tau s + 1}, \gamma > 0, \tau > 0$$

a) Regulatorns integrationstid T_i väljs lika med modellens tidskonstant. Bestäm förstärkningen K_p så att det återkopplade systemet får bandbredden $\omega_B = \nu$.

1 poäng

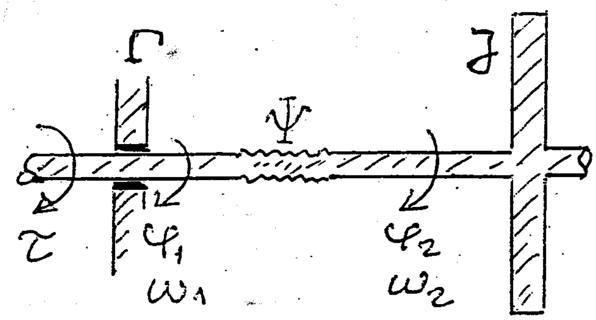
b) Det visar sig att tidskonstanten τ_0 i den verkliga processen är svårbestämd. Man kan anta att $\tau_0 = \tau + \Delta\tau$, där $\Delta\tau$ betecknar parameterfelet. Bestäm den relativa modellosäkerheten ΔG, i den multiplikativa osäkerhetsmodellen, $G_0(s) = (1 + \Delta G(s))G(s)$.

1 poäng

c) Hur stor kan $|\Delta\tau|$ tillåtas vara i förhållande till modellens tidskonstant τ, utan att stabiliteten i värsta fall går förlorad?

3 poäng

3. Ett tungt svänghjul skall vinkelpositioneras med hjälp av ett servosystem. Den ingående axeln påverkas av ett drivande moment τ, som utgör systemets instorhet, och av dynamisk friktion, som ger ett bromsande moment $\Gamma \cdot \omega_1$, och (via en torosionsfjäder) av den utgående axeln som ger ett bromsande moment $\Psi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$, där Γ och Ψ är givna konstanter. Svänghjulet, som är monterat på utgående axel, har ett känt tröghetsmoment, J. Axlarnas vinkellägen och vinkelhastigheter är φ_1, φ_2, ω_1, ω_2 respektive.



a) Välj lämpliga tillståndsstorheter och härled en tillståndsekvation på formen $\dot{x} = Ax + Bu$ sådan att ett styrbart system erhålles. Styrbarheten skall visas.

4 poäng

b) Utred om systemet enligt uppgift a är asymptotiskt stabilt, stabilt eller instabilt?

2 poäng

c) För att få noggrann vinkelpositionering i systemet enligt uppgift a, väljs tillståndsåterkoppling med integrerande verkan på utsignalen, dvs vinkeln φ_2. Skriv upp utvidgade systemets matriser $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$. (Observera att själva reglerdesignen inte behandlas i denna uppgift.)

2 poäng

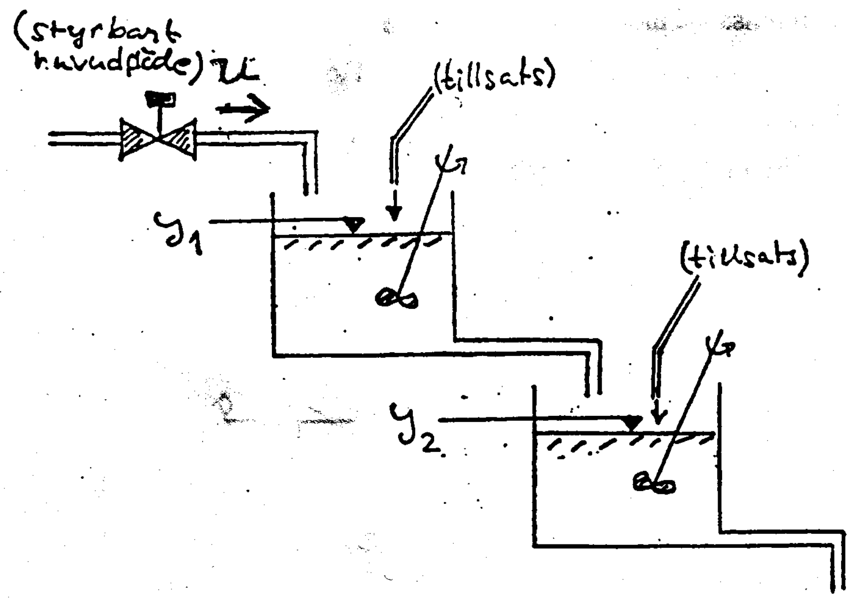
4. Ett system med överföringsfunktionen $G(s)$ skall regleras med P-regulatorn $F(s) = \kappa$.

$$G(s) = \frac{1}{s-1} \cdot e^{-s/2}$$

Föreslå, genom att använda Nyquistskriteriet, lämplig förstärkning κ. För full poäng skall valet av κ tydligt motiveras utgående från Nyquistdiagrammet!

5 poäng

5. Betrakta de vertikalt monterade blandningskaren i nedanstående figur:



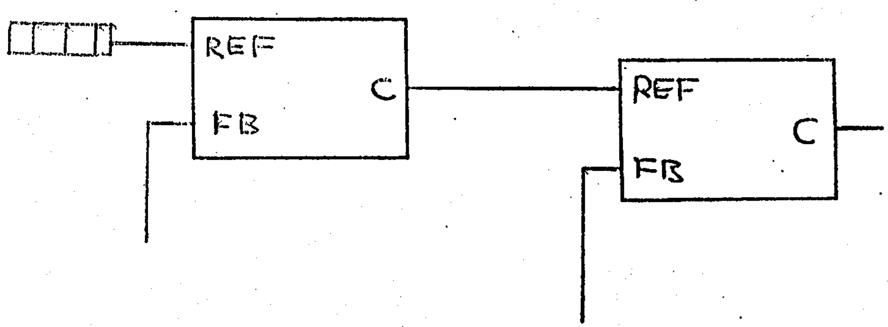
Nivåerna i karen mäts kontinuerligt. Mätsignalerna benämns y_1 och y_2. Vätskeflödet u till tank ett passerar via en reglerventil. Tillsatser av kemikalier kan vid behov ske direkt i båda karen, vilket ju innebär störningar, då konstanta nivåer är önskvärda.

a) I den medskickade (inte helt färdiga) ritningen ges schemat över processen tillsammans med två PID-regulatorer. Systemet skall styras genom kaskadreglering. Komplettera schemat så att en instrumenttekniker ser hur regulatorer och kablage från nivåsensorer och till styrventil skall kopplas ihop. Beskriv utan att använda ekvationer, hur styrsystemet skall fungera.

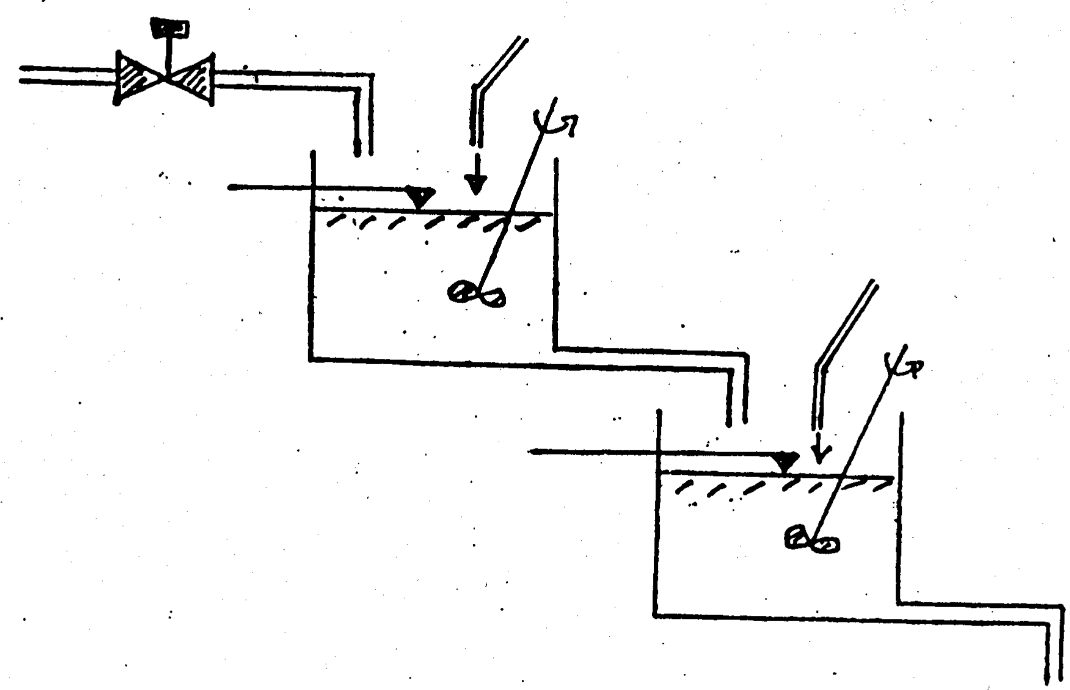
2 poäng

b) Kan båda karen nivåregleras mot specificerade börvärden oberoende av varandra med den föreslagna reglermetoden? Motivera noga. (Några enkla ekvationer kan möjligen vara ett stöd för resonemanget i denna deluppgift.)

2 poäng



REF = reference signal
FB = feedback signal
C = control signal

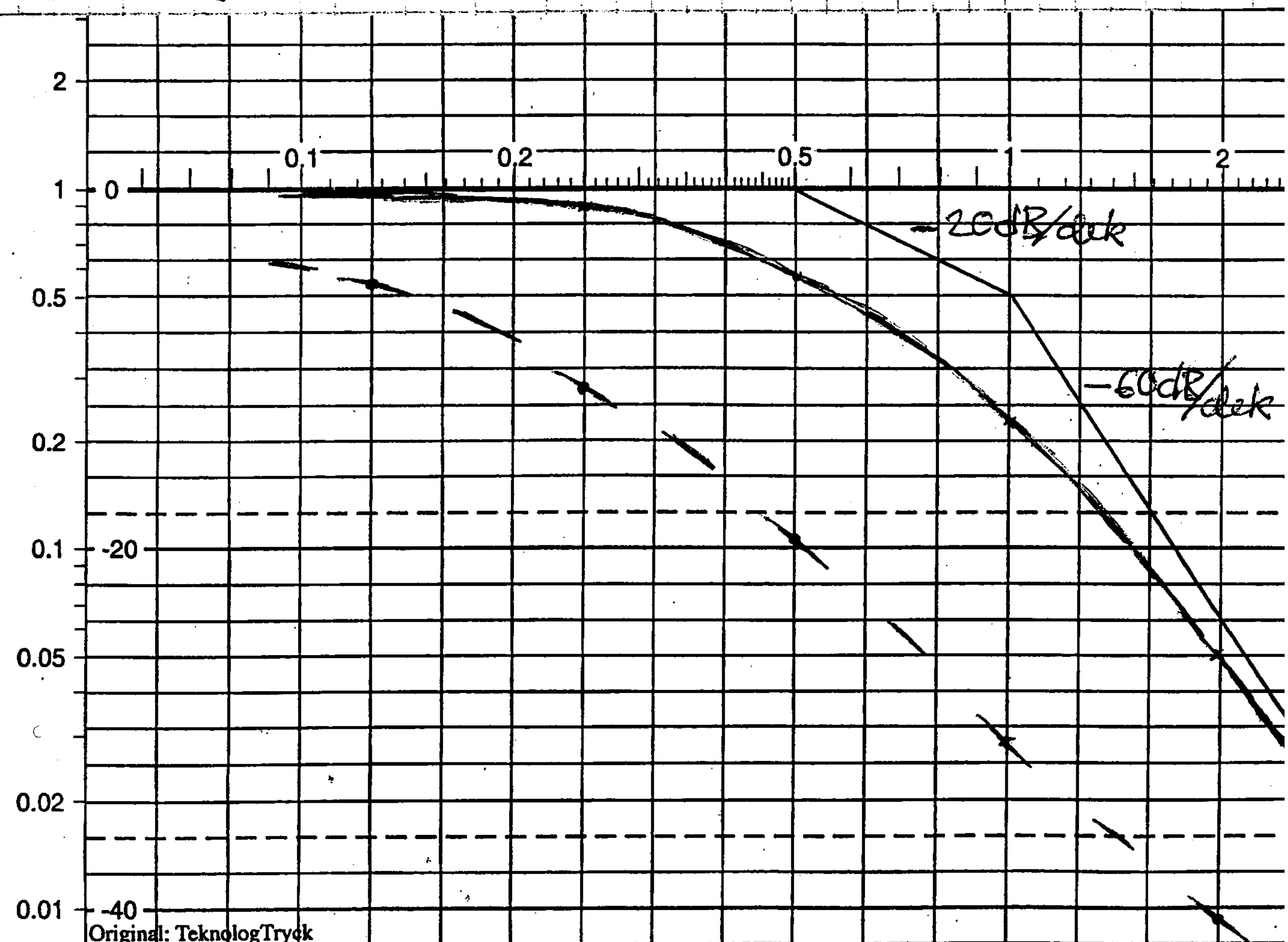


Inlämnas tillsammans med övriga lösningar!

Reglerteknik F, ERE091, tisd. 24 maj 2005. / [illegible]

1\. a) G är insignal-utsignalstabilt, då systemet är asymptotiskt stabilt eftersom polerna ligger strikt i vänstra halvplanet.

$\arg\{G(i\omega)\} = -\operatorname{atan}(2\omega) - 2\operatorname{atan}(\omega)$



b) Nollställe strikt i högra halvplanet ($s = 0.5$).

$$G(s) = \frac{1-2s}{(1+s)^2} = \frac{1-2s}{(1+s)^2} \cdot \frac{1+2s}{1+2s} = \frac{1+2s}{(1+s)^2} \cdot \frac{1-2s}{1+2s}$$

$$G(s) = G_{minfas}(s) \cdot \left(\frac{1-2s}{1+2s}\right)^k, \text{ där } k = 1 \geq 0.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G_{minfas}(s) = \frac{1+2s}{(1+s)^2}}}$$

1. c) <u>Rouths metod</u> $\Rightarrow$

$$kG(s) + 1 = 0$$

$$k(1-2s) + (1+s)^2 = s^2 + 2\underbrace{(1-k)}_{\Rightarrow k<1}s + \underbrace{1+k}_{\Rightarrow k>-1} = 0$$

k positiv $\Rightarrow$ $k < 1$ $\Rightarrow$ Stabilitet!

<u>Lågförstärkningssatsen</u> $\Rightarrow$

$$|kG(i\omega)| \leq k|G(i\omega)| < 1 \text{ för alla } \omega \in R^+$$

$$|G(i\omega)|^2 = \frac{1+4\omega^2}{(1+\omega^2)^2}$$

Studera $f(x) = \dfrac{1+4x}{(1+x)^2}$ för $x \geq 0$:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1+x)^2 \cdot 4 - 2(1+x)(1+4x) = 0$$

$$2(1+x) - (1+4x) = 0$$

$$1 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1/2 = \omega^2$$

$$\therefore |G(i\omega)|^2 \leq \frac{1+4/2}{(1+1/2)^2} = \frac{3}{2.25} = \frac{1}{0.75} = \frac{4}{3}$$

Satsen ger $k \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} < 1 \Rightarrow \underline{\underline{k < \frac{\sqrt{3}}{2}}} = 0.866 < 1$

LFS ger lägre maxförst. än vad Routh ger för stabilt system. LFS är ett konservativt stabilitetsmått!

2. $$G(s) = \frac{\gamma}{\tau s+1}, \quad \gamma > 0, \quad \tau > 0$$

a) $$F(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = K_p \frac{1+\tau s}{\tau s}$$

$$L(s) = G(s)F(s) = \frac{\gamma}{\tau s+1} \cdot K_p \frac{1+\tau s}{\tau s} = \frac{\gamma K_p}{\tau s}$$

$$Q(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\gamma K_p}{\tau s + \gamma K_p} = \frac{1}{1+\frac{\tau s}{\gamma K_p}} = \frac{1}{1+\frac{s}{\nu}}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{\gamma K_p} = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \underline{\underline{K_p = \frac{\tau \nu}{\gamma}}}$$

b), c) $$G_o(s) = G(s)(1+\Delta G(s)) = \frac{\gamma}{(\tau+\Delta\tau)s+1} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\Delta G(s)}} = -1 + \frac{\gamma}{(\tau+\Delta\tau)s+1} \cdot \frac{\tau s+1}{\gamma} = \underline{\underline{\frac{-\Delta\tau \cdot s}{(\tau+\Delta\tau)s+1}}}$$

$$|\Delta G(i\omega)| = \frac{|\Delta\tau| \cdot \omega}{\sqrt{|\tau+\Delta\tau|^2\omega^2+1}} \leq \frac{|\Delta\tau|}{|\tau+\Delta\tau|}, \forall \omega \geq 0$$

$$|Q(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2/\nu^2}} \leq 1, \forall \omega \geq 0$$

Robust stabilitet $\Rightarrow |\Delta G| \cdot \underbrace{|Q|}_{\leq 1} < 1, \forall \omega \geq 0$

$$\because |\Delta G| = \frac{|\Delta\tau|}{|\tau+\Delta\tau|} < 1 \Rightarrow$$

$$|\Delta\tau| < |\tau+\Delta\tau|.$$

men $\big|\tau - |\Delta\tau|\big| \leq |\tau+\Delta\tau| \leq \tau + |\Delta\tau|$

Om vi antar att $\tau \geq |\Delta\tau|$ fås:

$$|\Delta\tau| < \tau - |\Delta\tau| \Rightarrow |\Delta\tau| < |\tau+\Delta\tau|$$

Systemet stabilt för $\underline{\underline{|\Delta\tau| < \tau/2}}$

3. a) Momentbalanser för

axel 1: $\tau - \Gamma\omega_1 - \Psi(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$

axel 2: $\Psi(\varphi_1 - \varphi_2) - J \cdot \dot{\omega}_2 = 0$

Välj $u = \tau$, $x_1 = \varphi_1$, $x_2 = \varphi_2$
och $x_3 = \omega_2$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\varphi}_1 = \omega_1 = \Gamma^{-1}\{\tau - \Psi(\varphi_1 - \varphi_2)\} = \\ \quad = u/\Gamma - \Psi/\Gamma \cdot x_1 + \Psi/\Gamma \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = \dot{\varphi}_2 = \omega_2 \\ \dot{x}_3 = \dot{\omega}_2 = \Psi/J(\varphi_1 - \varphi_2) = \Psi/J\, x_1 - \Psi/J\, x_2 \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\Psi}{\Gamma} & \frac{\Psi}{\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\Psi}{J} & -\frac{\Psi}{J} & 0 \end{bmatrix}}_{=A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B} u(t)$$

b) $\det(\lambda I - A) =$
$\left\langle \frac{\Psi}{\Gamma} = \alpha, \ \frac{\Psi}{J} = \beta \right\rangle$ $\begin{vmatrix} \lambda+\alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -\beta & \beta & \lambda \end{vmatrix} =$

$$= (\lambda+\alpha)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \beta & \lambda \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -\beta & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+\alpha)(\lambda^2+\beta) - \alpha$$

$$= \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \alpha\beta - \alpha\beta = \lambda(\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta) =$$

$\alpha > 0$ och $\beta > 0 \Rightarrow \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta$ har båda sina nollställen strikt i VHP. Dessutom ett egenv. i origo

$\Rightarrow$ Systemet stabilt, men inte asymptotiskt stabilt

3. a (Styrbarheten)

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta & -\beta & 0 \end{pmatrix} \quad B \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow A^2B = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \beta \\ -\alpha\beta \end{pmatrix}$$

$$\det[S] = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & -\alpha\beta \end{vmatrix} = -\beta^2 \neq 0 \Rightarrow \text{Styrbart System!}$$

c)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = \varphi_2 = x_2 \Rightarrow C = (0 \quad 1 \quad 0)$$

Integraltillståndet betecknas t.ex. x_4:

$$x_4(t) = \int e(t)dt = \int (r(t) - y(t))dt \Rightarrow$$

$$\dot{x}_4(t) = r(t) - y(t) = r(t) - Cx(t)$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ \hline x_4(t) \end{bmatrix}}_{\bar{x}(t)} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) + \bar{N}r(t) \\ y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\Psi}{\Gamma} & \frac{\Psi}{\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\Psi}{J} & -\frac{\Psi}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

4. $$G(s) = \frac{e^{-s/2}}{s-1}$$

Vi noterar att G saknar poler i origo (och på övriga imaginäraxeln). Vi kan därför låta Nyquists kontur löpa rätt igenom origo. Om HHP täcks in av konturen, kommer $\mathrm{Re}\{s\} \geq 0 \Rightarrow |e^{-s/2}| \leq 1$

$$|G(s)| \leq \left|\frac{1}{s-1}\right| \to 0 \text{ då } |s| \to \infty.$$

$s = i\omega$:

$$G(s) = \frac{e^{-i\omega/2}}{i\omega - 1} \cdot \frac{(i\omega+1)}{(i\omega+1)} = \frac{(1+i\omega)(\cos\frac{\omega}{2} - i\sin\frac{\omega}{2})}{-\omega^2 - 1}$$

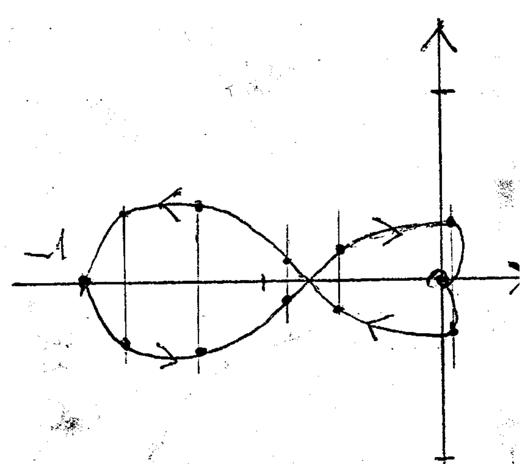
$$= \frac{-(\cos\frac{\omega}{2} - i\sin\frac{\omega}{2} + i\omega\cos\frac{\omega}{2} + \omega\sin\frac{\omega}{2})}{1+\omega^2} =$$

$$= -\frac{\cos(\omega/2) + \omega\sin(\omega/2)}{1+\omega^2} +$$

$$+ i\,\frac{\sin(\omega/2) - \omega\cos(\omega/2)}{1+\omega^2} = R + i\,I$$

ω	R	I
0	−1	0
0.5	−0.874	−0.190
1	−0.679	−0.200
2	−0.444	−0.048
π	−0.289	0.092
2π	+0.025	0.155

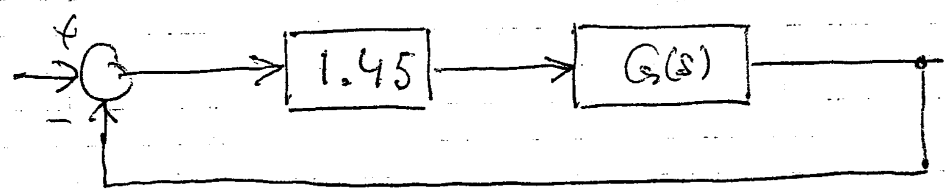
$s = -i\omega$ ger samma kurva men speglad i realaxeln.

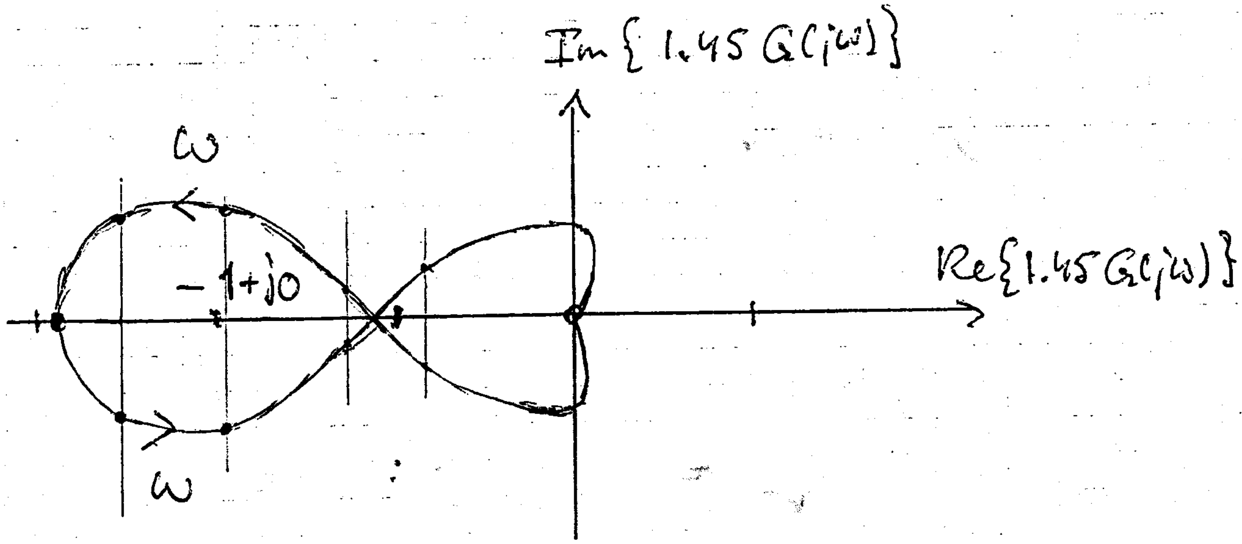


4. (forts.) Nyquistkurvan går genom punkten $-1 + j \cdot 0$ och skär negativa reella axeln även i punkten $-0.38 + j \cdot 0$.

Vi önskar att $-1 + j0$ låg mitt inne i vänstra omslingringen, vilket kan åstadkommas med förstärkningen K:

$$\frac{K \cdot 1 + K \cdot 0{,}38}{2} = 1 \Rightarrow K = \frac{2}{1{,}38} \approx 1.45$$



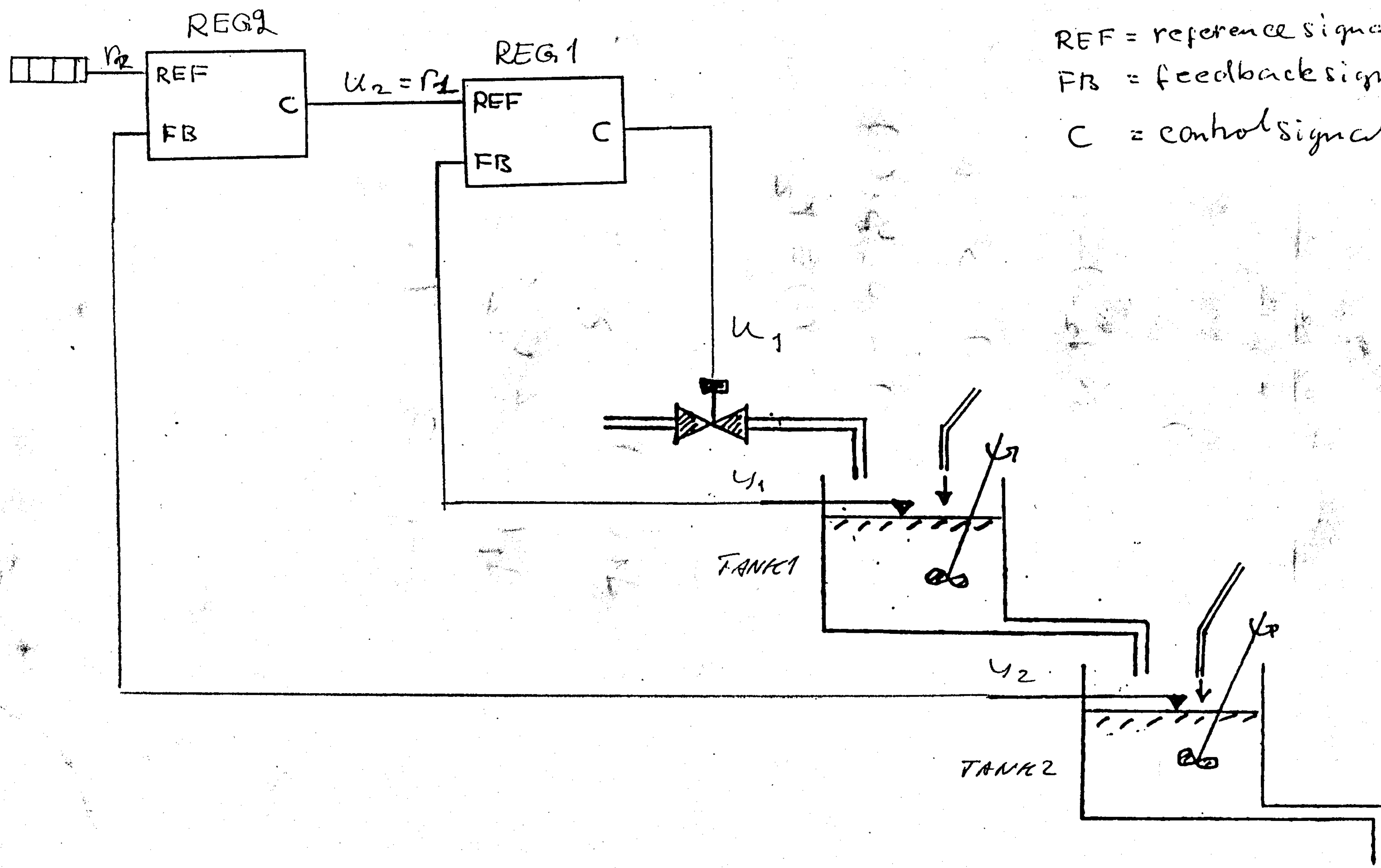


$P = 1$, $N = -1$ (ett varv moturs)

$Z = P + N = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Inga rötter till KE i HHP $\Rightarrow$

Stabilt system enl. Nyquist. (Marginal åt båda hållen!)



REF = reference signal
FB = feedback signal
C = control signal

Inlämnas tillsammans med övriga lösningar!

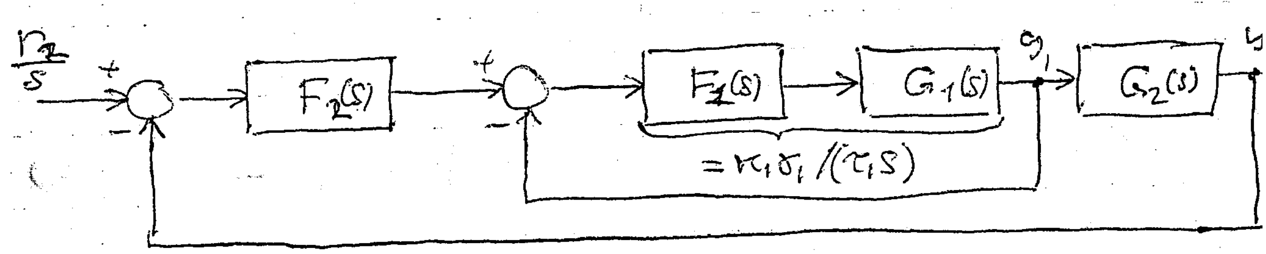
5. a) Utsignalen från regulator 2 (dvs dess styrsignal) utgör en referens för regulator 1 vars styrsignal påverkar reglerventilen att ge precis det flöde som gör att nivån i tank 1 ligger nära dess referens, dvs u_2, som i sin tur (i regulator 2) anpassats att låta nivån i tank 2 anpassa sig till sin referens, r_2.

Observera att då processen är något olinjär, bör reglerparametrarna justeras om ny arbetspunkt väljes för processen. Se styrschemat!

b) Låt för enkelhets skull PID-regulatorerna vara PI-regulatorer. Nära respektive stationära nivåer gäller (approximativt):

$$G_1(s) = \frac{\gamma_1}{1+\tau_1 s} \quad \text{och} \quad G_2(s) = \frac{\gamma_2}{1+\tau_2 s}$$

$$F_1(s) = \frac{K_1(1+\tau_1 s)}{\tau_1 s} \quad \text{och} \quad F_2(s) = \frac{K_2(1+\tau_2 s)}{\tau_2 s}$$



$$y_2(s) = G_2(s)\frac{K_1\gamma_1}{K_1\gamma_1+\tau_1 s}F_2(s)\left(\frac{r_2}{s} - y_2(s)\right) = \frac{K_1\gamma_1 K_2\gamma_2}{\tau_2 s(K_1\gamma_1+\tau_1 s)}(\ldots$$

$$[\tau_2 s(K_1\gamma_1+\tau_1 s) + K_1\gamma_1 K_2\gamma_2]\, y_2(s) = K_1\gamma_1 K_2\gamma_2 r_2/s$$

5. b (forts)

$$y_2(s) = \frac{K_1 \delta_1 K_2 \delta_2 r_2}{s[\tau_2 s(K_1\delta_1 + \tau_1 s) + K_1\delta_1 K_2 \delta_2]}$$

Stabilt system $\Rightarrow$ slutvärdessatsen gäller:

$$y_2(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot y_2(s) = r_2$$

$$y_2(s) = \frac{\delta_2}{1+\tau_2 s} \cdot y_1(s) \Rightarrow$$

$$\tau_2 \dot{y}_2(t) + y_2(t) = \delta_2 y_1(t)$$

Stationärt $\Rightarrow$ $y_2(t) \equiv r_2$ konstant

$$\Rightarrow r_2 = \delta_2 y_1(\infty) \Rightarrow$$

$$y_1(\infty) = \frac{r_2}{\delta_2} = \frac{y_2(\infty)}{\delta_2}$$

$$\Rightarrow y_1(\infty) \neq y_2(\infty)$$

för $\delta_2 \neq 1$.