Reglerteknik

ERE091

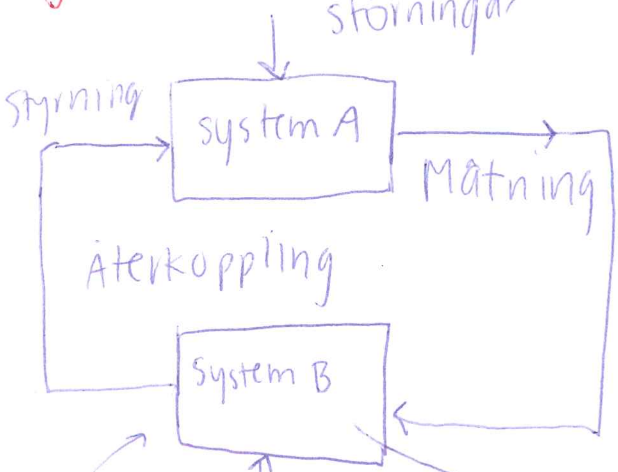
Föreläsare: Claes Breiholtz

Antecknare: Frida Ulander

Lp4 2013

Reglerteknik

18/3



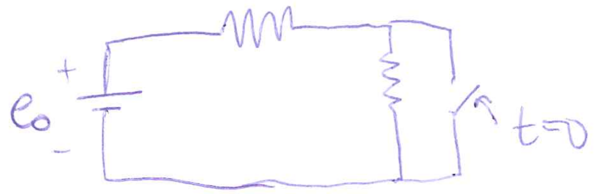
kallas **regulator**

innehåller (oftast) en modell av system A (direkt eller indirekt)

Dynamiska system:

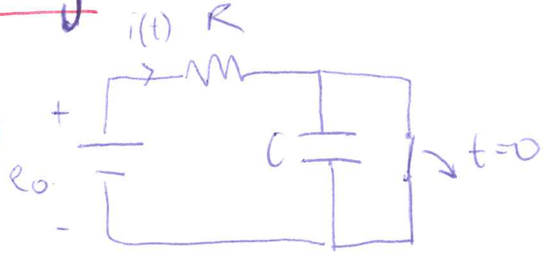
I ett statiskt system kan fysikaliska storheter (tex temperatur, ström, tryck, hastig...) ändras omedelbart

EX



I ett dynamiskt system sker förändringen på ett trögt sätt.

EX



För $t<0$: $i(t) = e_0/R$

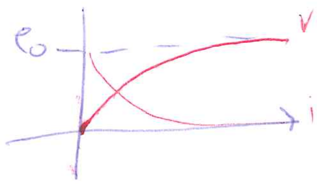
$e_0 - R \cdot i - v = 0$

$i = C\frac{dv}{dt}$

$$RC\frac{dv}{dt} + v = e_0 \quad v(0) = 0$$

$$v(t) = e_0(1 - e^{-t/RC})$$

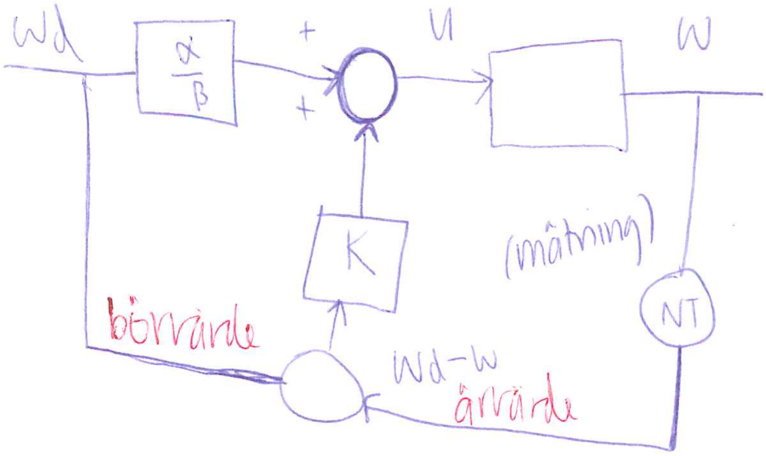
$$i(t) = \frac{e_0}{R} e^{-t/RC}$$



$w(0) = w_d + \Delta w$

$w(t) = w_d + Ce^{-(\alpha+\beta K)t}$ $\quad (C = \Delta w)$

$w(t) = w_d + \Delta w e^{-(\alpha+\beta K)t}$ $\qquad K > 0$

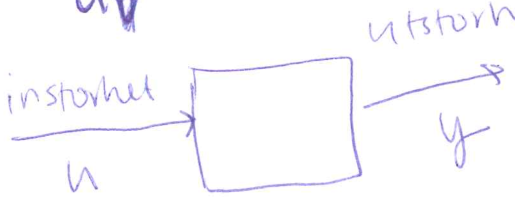


Reglersystem för konst-hållning av hastigheten för en elmotor.

Differentialekvationsmodeller

Kursen fokuserar på tidsinvarianta, ordinära diffekv. av typen

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f\left[\frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}}, y, \frac{d^{(n-1)}u}{dt^{(n-1)}}, \dots, u\right]$$



EX | $n=2$ $\quad \frac{d^2y}{dt^2} = f\left[\frac{dy}{dt}, y, \frac{dy}{dt}, u\right]$

Med jämviktspunkt till systemet menas när ett konstant värdepar (y_0, u_0): $0 = f[0, y_0, 0, u_0]$

Linearisering av systemet i en omgivning av jämviktspunkten. $\Delta y, \Delta u$

$\boxed{20/3}$ $\frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_1 \frac{du}{dt} + b_2 u$

$y(t) = \frac{b_1 p + b_2}{p^2 + a_1 p + a_2} u(t)$ $y(t) = G(p)\, u(t)$

överföringsoperator

$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + a_1 s y(s) - a_1 y(0) + a_2 y(s) =$

$b_1 s u(s) - b_1 u(0) + b_2 U(s)$

$Y(s) = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2} U(s) + \frac{sy(0) + y'(0) + a_1 y(0) - b_1 u(0)}{s^2 + a_1 s + a_2}$

Antag BV är reell.

$Y(s) = G(s) U(s)$

överföringsfunktion

Nämnaren hos $G(s)$ satt $= 0$ kallas systemets karakteristiska ekvation (KE) och dess rötter kallas poler. Täljaren satt till 0 ger nollställena.

poler: $s^2 + a_1 s + a_2 = 0$ nollställen: $b_1 s + b_2 = 0$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(y(s)) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)U(s))$

$y(t) = \int_0^\infty u(t-\tau) g(\tau)\, d\tau = \int_0^\infty g(t-\tau) u(\tau)\, d\tau$

$y(t) = \int_0^t g(\tau) u(t-\tau)\, d\tau$

$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s))$ viktfunktion

$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{för } t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$ $\int_R \delta(t)\, dt = 1$ $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$

Ex

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots a_{n-1} s + a_n}$$

"enkla rötter"

Vi antar (tills vidare) att rötterna är distinkta $\lambda_1 \dots \lambda_n$

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\dots(s-\lambda_n)} = \frac{\mu_1}{s-\lambda_1} + \frac{\mu_2}{s-\lambda_2} + \dots \frac{\mu_n}{s-\lambda_n}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mu_1 e^{\lambda_1 t} + \mu_2 e^{\lambda_2 t} \dots + \mu_n e^{\lambda_n t} \qquad \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}\right]$$

$$|g(t)| = |\mu_1 e^{\lambda_1 t} + \dots| \leq |\mu_1| e^{Re\{\lambda_1\}t} + |\mu_2| e^{Re\{\lambda_2\}t} + \dots |\mu_n| e^{Re\{\lambda_n\}t}$$

ty:

$$\left(|e^{\lambda t}| = |e^{Re\lambda \cdot t + i\, Im\lambda \cdot t}| \leq |e^{Re\lambda t}| \cdot |e^{i Im\lambda t}| \right)$$

reellt

$$\int_0^\infty |g(t)|\,dt \leq |\mu_1| \int_0^\infty e^{Re\{\lambda_1\}t}\,dt + \dots + |\mu_n| \int_0^\infty e^{Re\{\lambda_n\}t}\,dt$$

SATS Systemet är insignal-utsignalstabilt om samtliga poler i dess överföringsfunktion har strikt negativ realdel.
Om åtminstone en pol har positiv (strikt) realdel är systemet instabilt. (gäller även för multipla poler)

Rouths kriterium

Satsen säger att antalet teckenväxl. i vänsterkolumnen = antalet rötter i HHP

EX $\dfrac{b_1 s^3 + \dots b_4}{s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 4s + 3}$

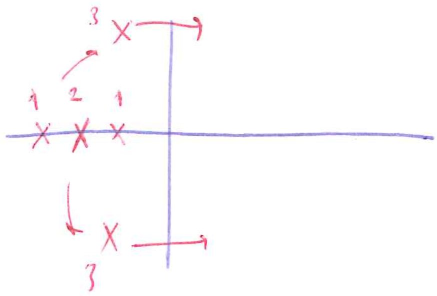
K.E. $s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 4s + 3 = 0$

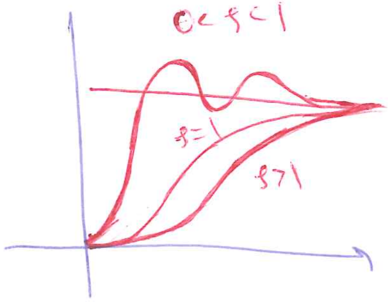
s^4	1	6	3	0
s^3	2	4	0	0
s^2	$\frac{2\cdot 6 - 1\cdot 4}{2} = 4$	$\frac{2\cdot 3}{2} = 3$	0	0
s^1	2,5	0	0	0
s^0	3	0	0	0

Inga teckenväxl!
→ inga poler iHHP!
Stabilt system

Fall 3. $0<\zeta<1$ $s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$

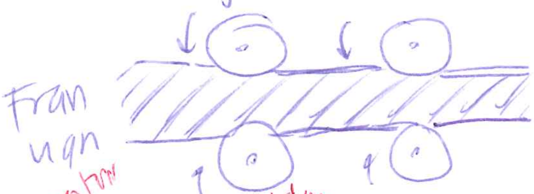
Fall 4. $\zeta<0$ $Re\, s_{1,2} < 0$

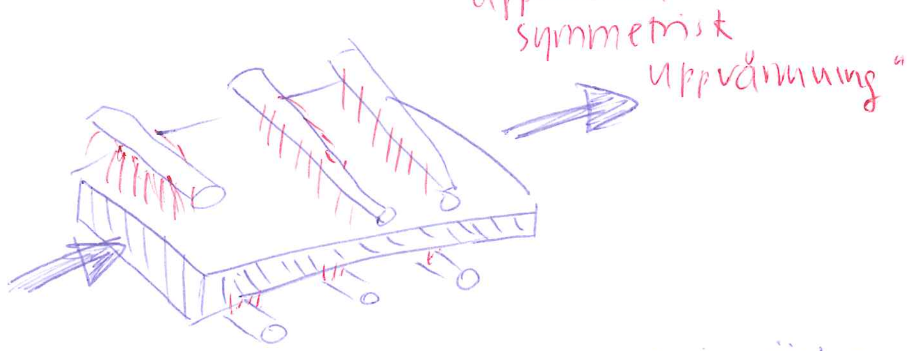


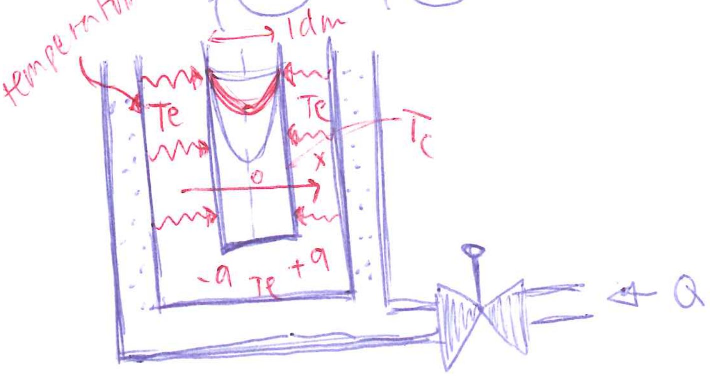


8/4 Modelleringsexempel: Upphettning av stålämne

Ett långt och brett stålämne (10m × 1m × 1dm) skall upphettas i en ugn så att stålet mjuknar (ca 1000°C). Stålämnet skall tunnas ut från 1dm till 1-2 cm (grovplåt). Ämnet pressas genom en serie av valspar, så att det succesivt blir tunnare. Hade stålet inte varit tillräckligt varmt hade det metalliska påkänningarna blivit så stora att lagren (där valsarna är upphängda) "pajat".







Pga antagen symmetri räcker det att studera halva stålämnet, t ex högra halvan.

- Vi önskar närleda en överf. funktion och sätter därför begynnelse temp. fördelning $T(x,0) = T_0 \equiv 0$
- Pga symmetri gäller $\phi(0,t) = \kappa \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$

dvs $T'_x(0,t) = 0$

- Dessutom har man $T(a,t) = T_s(t)$

Olinjär relation mellan bränsleflödet q och T_s.
Vi kan dock anta en (approximativt) linjär relation mellan q och T_e: $\underbrace{\tau_q}_{\text{liten}} \frac{dT_e}{dt} + T_e = \gamma \cdot q$

bestäms experimentellt

$T_e \approx \gamma \cdot q$

Bestäm $\phi_0(t) = \phi(a,t) = \sigma\left(T_e^4(t) - T_s^4(t)\right)$
enligt Stefan-Bolzmanns strålningslag

$(T_e \approx T_s)$

$\phi_0 = \sigma(T_e - T_s)(T_e^3 + T_e^2 T_s + T_e T_s^2 + T_s^3)$

Pyrometri: optisk mätning av yttemperatur

Antag att T_e reglerar till värdet Θ

$\phi_0 \approx 4\Theta^3 \sigma (\Delta T_e - \Delta T_s)$ $\left(\frac{\Delta T_e}{\Theta}, \frac{\Delta T_s}{\Theta} \text{ små}\right)$

$\boxed{\begin{aligned} T_e &= \Theta + \Delta T_e \\ T_s &= \Theta + \Delta T_s \end{aligned}}$

I närheten av Θ:

$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} \Delta T = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta T$ ①

$\Delta T(x,0) = 0$

$\Delta T'_x(x,0) = 0$

$\kappa \Delta T'_x(a,t) = \sigma 4\Theta^3 (\Delta T_e - \Delta T_s) = \sigma 4\Theta^3 (\gamma \cdot \Delta q - \Delta T(a,t))$ ④

$$G(s) = \frac{\Delta \hat{T}_s(B)}{\Delta \hat{q}(s)} = \frac{\gamma}{1+\mu(\beta a)\tanh(\beta a)}$$

$\sqrt{\frac{\rho c_p a^2}{K}} \cdot \sqrt{s}$

$$G = \frac{\gamma \cosh \beta a}{\cosh \beta a + \mu \frac{\sinh \beta a}{\beta a}} = \frac{\gamma\left(1+\frac{\beta^2 a^2}{2!}+\frac{\beta^4 a^4}{4!}+\dots\right)}{\left(1+\frac{\beta^2 a^2}{2!}+\frac{\beta^4 a^4}{4!}\right)+\mu \beta a\left(\beta a+\frac{\beta^3 a^3}{3!}\dots\right)}$$

$$= \frac{\gamma\left(1+\frac{\beta^2 a^2}{2!}+\frac{\beta^4 a^4}{4!}\dots\right)}{1+\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\beta^2 a^2+\left(\frac{\mu}{3!}+\frac{1}{4!}\right)\beta^4 a^4\dots}$$

$$\mu = \frac{K}{4\sigma\theta^3} \qquad \beta^2(s) = \frac{s c_p \rho}{K}$$

För låga frekvenser duger approximationen

$$G(s) = \frac{\gamma(1+\tau s/2+\tau^2 s^2/24)}{1+\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\tau s+\left(\frac{\mu}{6}+\frac{1}{24}\right)\tau^2 s}$$

$$G(s) = \frac{\gamma(1+\tau s/2)}{1+\frac{2\mu+1}{2}\tau s}$$

$\begin{cases} \tau \approx 0{,}426 \text{ min}, \text{ för } w=1000 \\ \mu = 1{,}9235 \end{cases} \rightarrow \quad G(s) = \gamma \frac{1+13}{1+655}$

$u - Ri - V_1 = 0$
$u - Ri - Ri_2 - V_2 = 0$
$i - i_1 - i_2 = 0$

} Kirchoff

$i_1 = C\dot{V}_1 \qquad i_2 = C\dot{V}_2$

$\vdots$

$$\begin{bmatrix}\dot{V}_1\\ \dot{V}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-2}{RC} & \frac{1}{RC}\\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{RC}\\ 0\end{bmatrix}u \quad (1)$$

Detta är ett exempel på en $\boxed{\text{intern modell}}$

$$i = \begin{bmatrix}-1/R & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix} + \left(\frac{1}{R}\right)u \quad (2)$$

Vi kallar vektorn $\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}$ för tillståndsvektor, V_1 och V_2 ~~för~~ tillståndsstorheter (1) för tillståndsekvation och (2) för utsignalekvation. (1) och (2) utgör tillsammans en linjär tillståndsmodell. (LTI-typ)

Allmännare: x är tillståndsvektorn, u insignalen, y utsignalen.

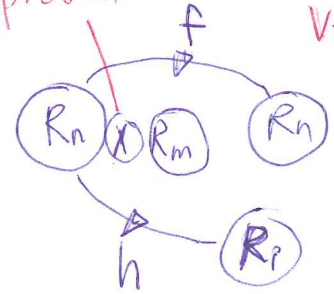
$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & (3)\\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & (4)\end{cases}$$

Linjär LTI-modell

$x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m \quad y \in \mathbb{R}^p \Rightarrow A(n,n), B(n,m), C(p,n), D(p,m)$

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (5)$
$y(t) = h(x(t), u(t)) \quad (6)$

produktrummet



vektorfält med n resp m komponenter

• Siso-fallet

n	$x \in \mathbb{R}^n$
$m = 1$	$u \in \mathbb{R}$
$p = 1$	$y \in \mathbb{R}$

$$\boxed{g(t) = C\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}B + D\cdot\delta(t)}$$

$D=0$ $\quad \underbrace{C=C^T \quad B=b}$ (rad + kolonnvektor)

$$\frac{1}{\det(sI-A)} \qquad G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots \; b_n}{s^n + \dots \; a_n} = 0$$

polynom av grad n.

alla rötter i V.H.P → insignal-utsignalstabilt.

$\det(sI-A)=0$ → poler, egenvärden till matrisen A. ~~strikt stabila egenvärden~~

Om matrisen A har samtliga egenvärden strikt inne i V.K.H.P är systemet (3),(4) stabilt.

$X = TZ$

$\dot{X} = T\dot{Z} = ATZ + BU$

$\dot{Z} = (T^{-1}AT)Z + (T^{-1}B)U$

$Y = (CT)Z + DU$

$G_T(s) = CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D \dots$ $\quad \boxed{(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}}$

$\dots = G(s)$

$$G(s) = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_{n-1} + b_n}{s^n + \dots \dots + a_1 s^{n-1} + \dots a_{n-1} s + a_n} + d$$

- Styrbar kanonisk form

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

SATS Minimal realisation $\longleftrightarrow$ ~~SATS~~ både styrbart, observerbart

$$\dot{x}(t) = \underbrace{A}_{\text{konstanta}} x(t) + \underbrace{B}_{} u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

Def $\Phi(t)$ (n×n-matris) är lösning till följande begynnelsevärdesproblem:

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = A\phi(t), \quad \phi(0) = I$$

$$\Phi(t) = \left[\varphi_{ij}(t)\right] \qquad \varphi_{ij}(0) = \delta_{ij}$$

SATS Lösningen till (1) är:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) Bu(\tau)d\tau$$

Bevis $x(0) = \underbrace{\Phi(0)}_{= x_0 I} x_0 + \underbrace{\int_0^0 \ldots d\tau}_{=0}$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \dot{\Phi}(t)x_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$= A\Phi(t)x_0 + \Phi(\underbrace{t-\tau}_{=0})Bu(t) + \int_0^t \frac{d\Phi(t-\tau)}{d(t-\tau)} \frac{d(t-\tau)}{dt} \cdot Bu(\tau)d\tau$$

$$= A\Phi(t)x_0 + I \cdot Bu(t) + \int_0^t \underbrace{\dot{\Phi}(t-\tau)}_{A\Phi(t-\tau)} \cdot 1 \cdot Bu(\tau)d\tau$$

$$= A\Phi(t)x_0 + Bu(t) + A\int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$= A[\ \ldots\ ] + Bu(t)$$

Sats $\Phi(t_1+t_2) = \Phi(t_1)\cdot\Phi(t_2)$

Sats $\left.\begin{array}{l}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$

Cayley-Hamiltons sats

Varje kvadratisk matris uppfyller **sin** egen karakteristiska ekvation.

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Låt $\lambda = A \Rightarrow A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_nI = 0$

$$A^n = \underline{-a_1A^{n-1} - a_2A^{n-2} \dots - a_{n-1}A - a_nI}$$

$$A^{n+1} = -a_1A^n - a_2A^{n-1} \dots - a_{n-1}A^2 - a_nA = \dots =$$

$$(a_1^2 - a_2)A^{n-1} + (a_1a_2 - a_3)A^{n-2} + \dots + (a_1a_{n-1} - a_n)A + a_1a_nI$$

A^{n+2} etc...

En konsekvens av C-H:s sats är att varje potens av A större än $(n-1)$ kan uttryckas som en summa av formen $\mu_0I + \mu_1A + \dots + \mu_{n-1}A^{n-1}$

$$\Rightarrow e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots \frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = f_0(t)\cdot I + f_1(t)\cdot A + \dots + f_{n-1}(t)A^{n-1}$$

Betrakta LTI-systemet $\dot{x} = Ax + Bu$

En tillst. vektor x^* sägs vara styrbar om det finns en ändlig styrsignal $u(t)$ som på ändlig tid för $x(t)$ från origo till x^*. Om alla tillstånd är styrbara sägs systemet vara styrbart.

Sats| Mängden av styrbara tillståndsvektorer är det linjära rum som spänns av kolonnerna i matrisen $S = [B, AB, \dots A^{n-1}B]$, dvs av dess rangrum.

Speciellt om $u \in \mathbb{R}$, gäller att ~~sägs~~ systemet är styrbart om $\det(S) \neq 0$.

Bevis| Fallet $u \in \mathbb{R}$ $x(T) = e^{At} \cdot \underbrace{x(0)}_{=0} + \int_0^T e^{A(T-t)} Bu(t)dt$

$$= \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1} f_k(T-t) A^k Bu(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} A^k \cdot B \cdot \underbrace{\int_0^T f_k(T-t)\, u(t)dt}_{\mu_k}$$

$$= \mu_0 B + \mu AB + \dots \mu_{n-1} A^{n-1} B$$

17/4 Def| Tillståndsvektorn $x^* \neq 0$ sägs vara icke-observerbar (tyst) om utsignalen $y(t) \equiv 0$ då initialtillståndet är x^* och insignalen $u(t) \equiv 0$.
Systemet sägs vara observerbart om det saknar icke-observerbara tillståndsvektorer.

insignaler r, v

utsignaler e, u, y

$y = G(u+v)$

$E = R - y$

$U = F \cdot E$

$$y(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} \cdot R(s) + \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)} \cdot V(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)F(s)} \cdot R(s) - \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)} \cdot V(s)$$

$$U(s) = \frac{F(s)}{1+G(s)F(s)} R(s) - \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} V(s)$$

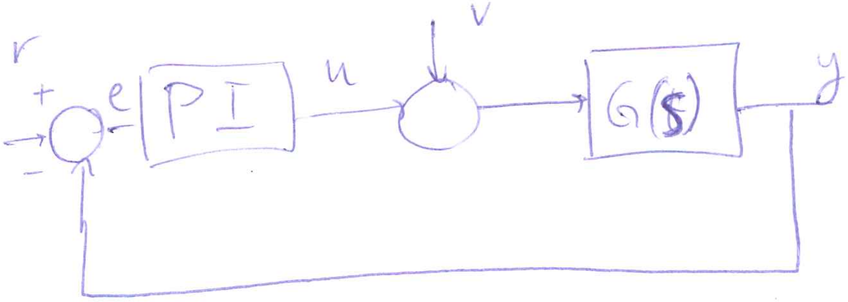
$$\begin{bmatrix} Y \\ E \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ry} & G_{vy} \\ G_{re} & G_{ve} \\ G_{ru} & G_{vu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ V \end{bmatrix}$$

Polerna för det återkopplade systemet ges av dess karakteristiska ekvation:

$$1 + G(s)F(s) = 0$$

$\boxed{\text{EX}}$ $G(s) = \overset{\text{(instabilt)}}{\dfrac{1}{s-1}}$ $\quad F(s) = K$

$\dfrac{K}{s-1} + 1 = 0 \qquad s = 1 - K \quad , K > 1$ förstabilitet.



$v(t) = \sigma(t)$ enhetssteg

$V(s) = \frac{1}{s}$

$F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$ $\quad E(s) = G_{ve}(s) \cdot V(s) = -\frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)} \cdot V(s)$

$$= \frac{-G(s)}{s + G(s)(K_p s + K_i)}$$

$$G(s) = \frac{\gamma^{\neq 0}}{s^l} \cdot G_0(s) \qquad l = 0, 1, 2, (3 \ldots)$$

$$G_0(0) = 1$$

$$G = \frac{s+5}{s^3 + 2s^2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \underbrace{\frac{1 + s/5}{1 + s/2}}_{G_0}$$

$$E(s) = \frac{-\gamma \cdot G_0(s)}{s^{l+1} + \gamma G_0(s)(K_p s + K_i)}$$

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \frac{-\gamma s \underbrace{G_0(s)}_{1}}{s^{l+1} + \gamma \underbrace{G_0(s)}_{1}(K_p s + K_i)}$$

① $K_i \neq 0 \rightarrow e(\infty) = 0$

② $K_i = 0 \rightarrow e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{-\gamma \cancel{s}}{s^{l+\cancel{1}} + \gamma (K_p \cancel{s})} = \begin{cases} -\frac{1}{K_p} & l > 0 \\ -\frac{\gamma}{1 + \gamma K_p} & l = 0 \end{cases}$

Pol i $z=a$ med mult. m.

$$f(z) = (z-a)^{m} g(z)$$

$$\vdots$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \Rightarrow$$

enkel pol m. för $z=a$

med residyn $-m$.

Summan är residyerna vid nollställen är Z

Motsv. summa vid poler är P.

Residysatsen säger att

$$\oint F(z)\,dz = 2\pi i \sum \text{Res}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint F(z)\,dz = Z - P$$

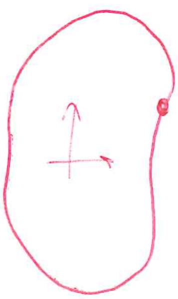
$$\downarrow$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

Man finner att $f'(z)/f(z)$ är en exakt differential

$$\oint_c F(z)\,dz = \oint \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \oint \frac{d}{dz}\left[\log f(z)\right] dz = \Big[\log f(z)\Big]_{z_1}^{z_2}$$

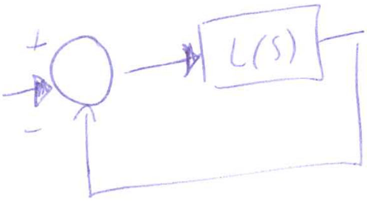
$$\log[f(z)] = \log\left[|f(z)| e^{j\arg(f(z))}\right] = \underbrace{\log|f(z)|}_{0 \text{ för sluten kurva}} + i\arg\{f(z)\}$$

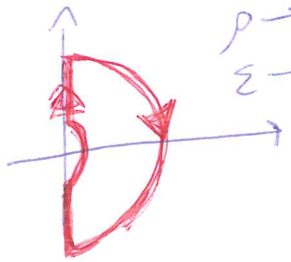


$$= 0 + i\arg\{f(z_2)\} - i\arg\{f(z_1)\} = i\Delta \arg f(z)$$

$$\frac{1}{2\pi}\oint \frac{f'}{f}\,dz = \frac{i\Delta_c(\ldots)}{2\pi} = iN$$

$$L(s) = \frac{1}{s} e^{-s} \quad \left(\approx \frac{1}{s} \frac{1 - s/2}{1 + s/2} \text{ f. låga frekvenser} \right)$$





$s = i\omega$

$$L(s) = L(i\omega) = \frac{e^{-i\omega}}{i\omega}$$

$$|L| = \frac{1}{i\omega} \qquad \angle L = -\frac{\pi}{2} - \omega$$

$$s = -i\omega \rightarrow L(s) = -\frac{e^{i\omega}}{i\omega}$$

$$|L| = \frac{1}{\omega} \qquad \angle L = -\frac{\pi}{2} + \omega$$

$$s = \rho e^{i\theta} \rightarrow \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$$

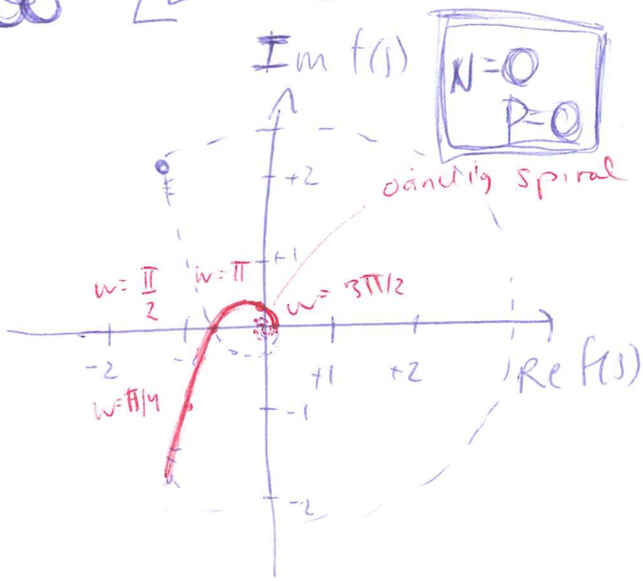
$$\frac{1}{s} e^{-s} = \frac{e^{-i\theta}}{\rho} \cdot e^{\overbrace{-\rho\cos\theta}^{\geq 0}} \cdot e^{-i\rho\sin\theta}$$

$$|L| \underset{\rho \to \infty}{\longrightarrow} 0 \qquad L(s) = \frac{e^{-i\theta}}{\varepsilon} \cdot e^{-\varepsilon\cos\theta} \cdot e^{-i\varepsilon\sin\theta}$$

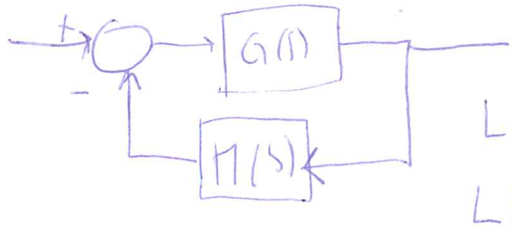
Låt ε bli "extremt" liten

$$L(s) \approx \frac{e^{-i\theta}}{\varepsilon} \qquad |L| \to \infty \qquad \angle L = -\theta$$

ω	$\|L\|$	$\angle L$
0	∞	$-\pi/2$
$\pi/4$	$\frac{4}{\pi} \approx 1{,}27$	$-3\pi/4$
$\pi/2$	$\frac{2}{\pi}$	$-\pi$
π	$1/\pi$	$-3\pi/2$
$3\pi/2$	$0{,}21$	-2π
∞	0	$-\infty$



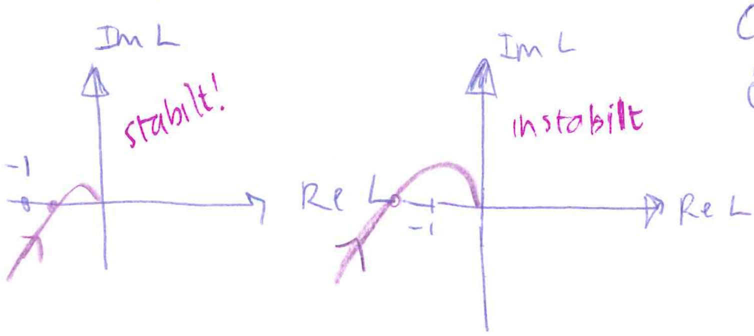
Det förenklade Nyquistkriteriet



Kretsöverf. $L(s) = G(s)H(s)$

$L(s)$ är sådan att frekvensfunktionen $L(i\omega)$ är väldefinierad $\rightarrow P = 0$

Upprita $L(i\omega)$ i ett komplext bildplan för $s = i\omega$ då $\omega \in [0, \infty)$



Om Nyquistkurvan, för ökande frekvens, skär realaxeln till höger om -1 är återkopplade systemet stabilt.

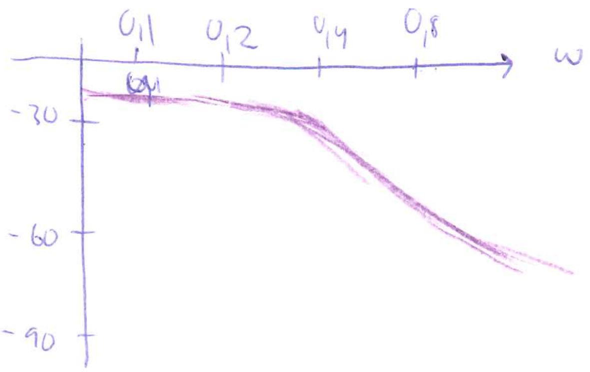
Bodediagram

Antag, som vid förenklade Nyquistkriteriets användning, att frekvensfunktionen $L(i\omega)$ är väldef,

Bodediagrammet innebär uppritning av $|L|$ och $\angle L$ var för sig som fkn av ω. För att få med ett bredare frekvensintervall, används normalt log-skala för frekvensen.

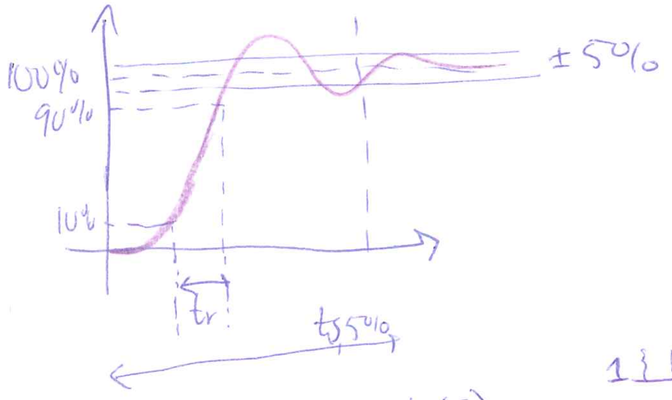
EX] $L(s) = \dfrac{10}{s+2} = \dfrac{5}{(1+s/2)}$

$\angle L = \arg L(i\omega) = -\operatorname{atan}(\omega/2)$

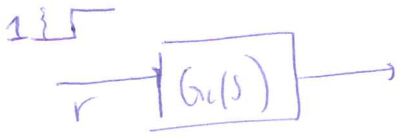


Mått på snabbhet

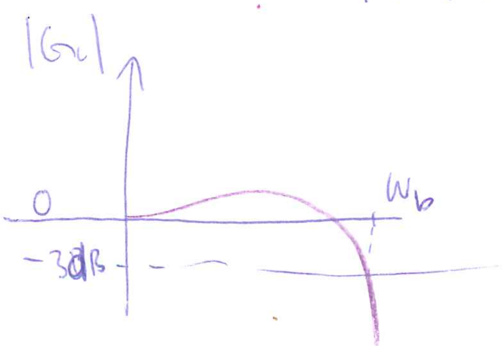
Stigtid (t_r) och insvängningstid t_s i tidsplanet och bandbredd (ω_b) i frekvensplanet



$$G_c(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$



$$y \begin{cases} \dfrac{L(0)}{1+L(0)} & \text{om } L(s) \text{ inte innehålle ngn integration} \\ 1 & \text{om } L(s) \text{ innehålle integration} \end{cases}$$



$$|G_c(i\omega_b)| = \frac{|G_c(0)|}{\sqrt{2}}$$

29/4 Designa av reglersystem

- Mått på noggrannhet: $|e| \le \eta$ $|e(\infty)| \le \varepsilon$
  $\int |e| dt \le \rho$ $\int e^2 dt \le \gamma$
- Mått på snabbhet: stigtid
  insv. tid.
- Mått på stabilitet

Vi utgår då från att förutsättningarna för Nyquists förenklade kriterium gäller, dvs att $\underbrace{L(i\omega)}_{\text{frekvensfunktionen}}$ är väldefinierad.

~~[illegible]~~

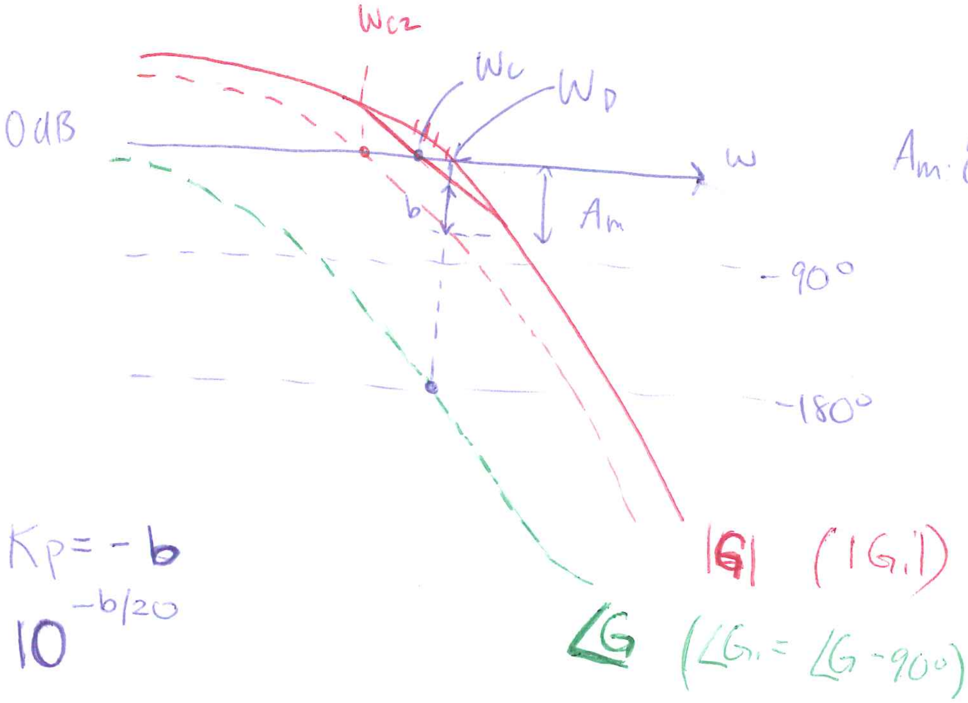
- Metod för I-regulator:

Bilda nu processmodell

$G_i(s) = \frac{G(s)}{s}$ och bestäm sedan K_i som en P-reg.

för G_i istället för G.

EX



A_m: önskad ampl. marg.

$20 \log K_p = -b$

$K_p = 10^{-b/20}$

Design av PI-regulatorer

En regulator m. överf. funktionen

$$F(s) = K_p \frac{1+\tau_i s}{\gamma + \tau_i s}$$

, där $0<\gamma<1$ kallas ett lagfilter

och används för att öka noggrannheten i ett återkopplat system, utan att öka antalet integrationer i kretsen.

Låt $\gamma \to 0 \Rightarrow F(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{\tau_i s}\right)$

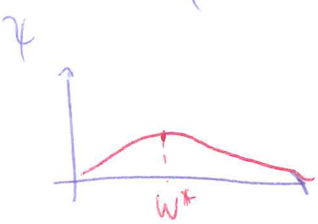
Krav på w_c och φ_m.

$$\varphi_m = 180^\circ + \angle L(i\omega_c) = 180^\circ + \angle F(j\omega_c) + \angle G(j\omega_c) =$$

$$180^\circ + \angle G(i\omega_c) + \psi^* \Rightarrow \boxed{\psi^* < 90^\circ}$$

$$\psi(\omega) = \angle F(j\omega) = \text{atan}(\omega \tau_d) - \text{atan}(\omega \beta \tau_d) \geq 0$$

$$\psi'(\omega) = \frac{\tau_d}{1+(\tau_d \omega)^2} - \frac{\beta \tau_d}{1+(\beta \tau_d \omega)^2} \Rightarrow \omega^* = \frac{1}{\tau_d \cdot \sqrt{\beta}}$$



Välj $w^* = w_c$

$$\Rightarrow \psi^* = \text{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) - \text{atan}(\sqrt{\beta}) > 0$$

$$\tan \psi^* = \frac{\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \sqrt{\beta}}{1 + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot \sqrt{\beta}} \Rightarrow \beta = \left(\frac{1 - \sin \psi^*}{\cos \psi^*}\right)^2$$

$$w_c = w^* = \frac{1}{\tau_d \sqrt{\beta}} \Rightarrow \tau_d = \frac{1}{w_c \sqrt{\beta}}$$

$$|L(jw_c)| = |G(iw_c)| \cdot K_p \cdot \frac{|1 + j/\sqrt{\beta}|}{|1 + j\sqrt{\beta}|} = |G(iw_c)| \cdot \frac{K_p}{\sqrt{\beta}}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_p = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(jw_c)|}}$$

Ex $G(s) = \frac{s-1}{s+2} \cdot \frac{s+1}{s+1} = \frac{s+1}{s+2}\left(\frac{s-1}{s+2}\right) \rightarrow$

Samma beloppsfunktion.

$G_{minfas} = \frac{s+1}{s+2}$

Ex $G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s+1} \Rightarrow G(iw) = \frac{e^{-jw\tau}}{1+jw} \Rightarrow$

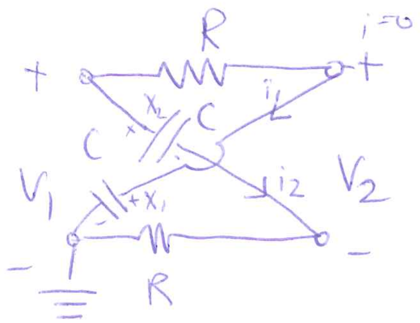
$|G(iw)| = \frac{1}{\sqrt{1+w^2}}$ $\quad \angle G(iw) = -\text{atan}\, w - w\tau$

Padé-approximation:

belopp 1 för alla frekvenser

$$e^{-\tau s} = \frac{e^{-s\tau/2}}{e^{s\tau/2}} = \frac{1-\tau s/2}{1+\tau s/2} \left(= \frac{1-\tau s/2 + \tau^2 s^2/12}{1+\tau s/2 + \tau^2 s^2/12}\right)$$

Ex



$V_1 - Ri_1 - x_1 = 0$

$V_1 - x_2 - Ri_2 = 0$

$V_1 - Ri_1 - V_2 - Ri_2 = 0$

$$\begin{cases} RC\dot{x}_1 + x_1 = V_1 \\ RC\dot{x}_2 + x_2 = V_1 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/RC \\ 1/RC \end{bmatrix} V_1$$

$V_2 = V_1 - RC(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = V_1 - 2V_1 + x_1 + x_2 = x_1 + x_2 - V_1$

$V_2 = [1 \quad 1]x - V_1$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = (1 \quad 1)\begin{pmatrix} s+\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & s+\frac{1}{RC} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{RC} - 1$$

$$= (1 \quad 1)\begin{pmatrix} \frac{1}{s+\frac{1}{RC}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+\frac{1}{RC}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{RC} - 1 =$$

Def • Känslighetsfunktionen $\boxed{S(s) = \frac{1}{1+L(s)}}$ $\left(S = (I+L)^{-1}\right)$

• Komplementära känslighetsfunktionen

$$\boxed{T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}} \quad \left(T = (I+L^{-1})L\right)$$

(Sätt ex. $r(t)=0$)

$Z(s) = T(s)N(s) + S(s)W(s)$ $\qquad S(s) + T(s) = 1$

Man "gör" F så att L blir $\begin{cases} \text{stor för LF} \\ \text{liten för HF} \end{cases}$

För LF $S \approx \frac{1}{L}$ litet.

För HF $S \approx L$ litet

Bodes integralsats

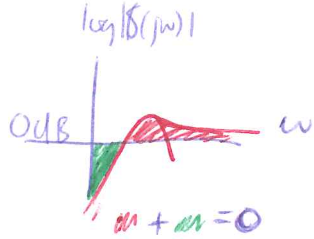
• Betrakta fallet ~~med~~ utan poler hos $L(s)$ i HHP

• $G(s)$ har fler poler än nollställen

• ~~Antag~~ I praktiken är $Y(s) = \frac{1}{1+Ts} Z(s) - N(s)$

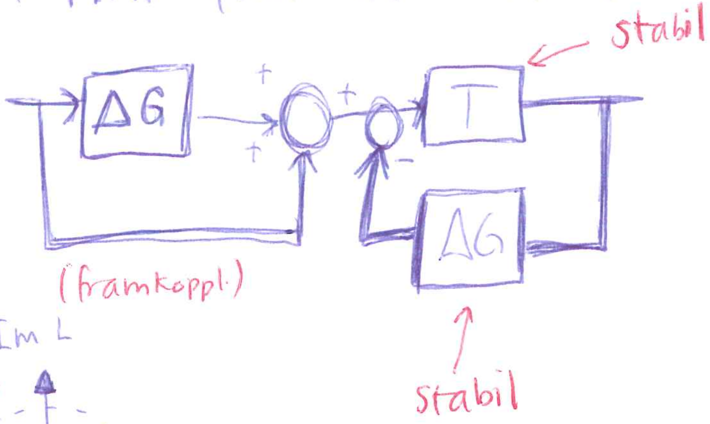
• $\dot{x} = Ax + Bu$ $\qquad Y(s) \approx \frac{Z(s)}{T(s)}$
$y = Cx$ $\qquad G = C(sI-A)^{-1}B \to \frac{\delta}{s}$

$L \to \frac{\text{konstant}}{s^2}$

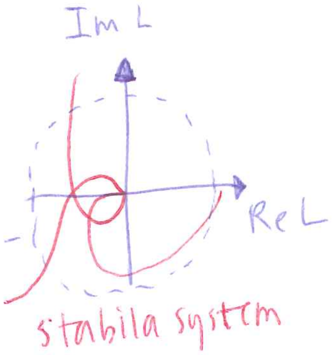


$$20\int_0^\infty \log|S(i\omega)|\,d\omega = 0 \longrightarrow \int_0^\infty |S|_{dB}\,d\omega$$

Vanligen saknar ΔG poler i HHP, även om G_0 har poler i HHP (som då återfinns i modellen G)



$\Rightarrow T \cdot \Delta G$ stabil



$$|T(j\omega)\Delta G(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega \geq 0$$

$$|T(j\omega)\Delta G(j\omega)| \leq |T(j\omega)| \cdot |\Delta G(j\omega)| < 1$$

$$\boxed{|\Delta G(j\omega)| < \frac{1}{|T(j\omega)|}} \quad \forall \omega \geq 0$$

Lågförstärkningssatsen

$\boxed{\text{EX}}$ $L = \dfrac{2s+1}{s^2}$

Kaskadreglering

$\boxed{\text{EX}}$ $G_1 = \dfrac{1}{1+10s} = G_2$

$F_1 = \gamma_1 \cdot \dfrac{1+10s}{10s} \qquad G_1F_1 = \dfrac{\gamma_1}{10s}$

$$\frac{G_1F_1}{1+G_1F_1} = \frac{\gamma_1}{10s+\gamma_1} = \frac{1}{1+\frac{10}{\gamma_1}\cdot s} \qquad \text{t.ex. } \gamma_1 = 5$$

$$= \frac{1}{1+2s}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{ref} \\ u_2^{ref} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$u = u^{ref} - Lx$$

Tillståndsekv. för återkoppl. system

mx n st P-reg. skall väljas.

$$\dot{x} = Ax + B[u^{ref} - Lx] = \underbrace{(A - BL)}_{A_c} x + Bu^{ref}$$

A_c $n \times n \to n$ st. egenvärden $\to n$ st. poler.

Antag att $m = 1$, dvs $u \in \mathbb{R}$

$\boxed{EX}$ $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$

$A_c = A - BL$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (l_1 \; l_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -1-l_2 \end{pmatrix}$

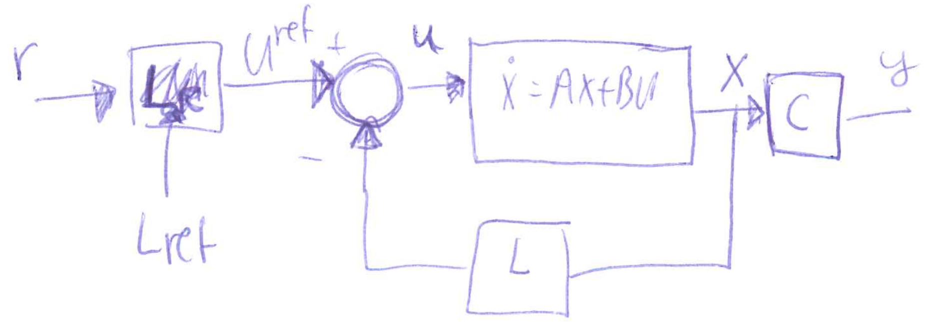
$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ l_1 & \lambda + 1 + l_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (1 + l_2)\lambda + l_1$$

-2 -1

polplacering

$$P(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \to l_1 = 2 \quad l_2 = 2$$

Skalning av referensen:



$x \in \mathbb{R}^n$

$u, y \in \mathbb{R}^m$

$r = r_0$ (konstant)

$$\dot{x} = (A - BL)x + BL_{ref} r_0$$

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} C(sI - A + BL)^{-1} B L_{ref} \frac{1}{\cancel{s}} \cdot r_0 =$$

$$\underbrace{\boxed{C(-A + BL)^{-1} B L_{ref}}}_{= I} r_0 = r_0$$

Linjärkvadratisk optimering

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
$y(t) = Cx(t)$

Vi antar att tillst. modellen är minimal, dvs styr- och observerbar samt att u och y har samma dimension.

$u = L_{ref}\, r - Lx$
$(u = -Lx)$

$\dot{\xi} = f(\xi, \theta) \quad \psi = h(\xi)$
$\xi = \xi_0 + \Delta\xi y$
$\theta = \theta_0 + \Delta\theta u$
$\psi = \psi_0 + \Delta\psi y$

Metoden innebär att en kvadratisk kostnadsfunktional J minimeras med avseende på reglermatrisen L under ett linjärt bivillkor, nämligen $\dot{x} = Ax + Bu$. Vi betraktar endast den enklaste typsituationen, att systemet är i "vila" nära $x=0$, men kan påverkas av impulsformade störningar $\Rightarrow x \neq 0$

$$J = \int_0^\infty [x^T(t) Q_1 x(t) + u^T(t) Q_2 u(t)]\, dt$$

$Q_2 > 0$ nödv. villkor

$Q_1 > 0$ tillr. villkor

$Q_1^T = Q_1, \quad Q_2^T = Q_2$

Välj $L = Q_2^{-1} \cdot B^T \cdot P$

P är den positivt definita lösningen till den algebraiska Riccatiekvationen

$P^T = P$

$$0 = A^T P + PA + Q - PBQ^{-1} B^T P$$

20/5 **Tillståndskonstruktion**

systemet
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Nw(t) & \text{systemstörning} \\ z(t) = Mx(t) & \text{reglerstorheten} \\ y(t) = Cx(t) + n(t) & \text{mätstorheten} \end{cases}$$
(M ofta = C)

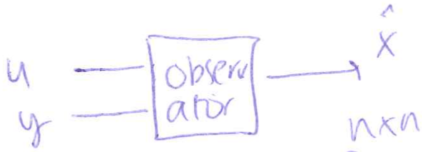
- Vi förutsätter inte längre att vi känner x.
- Vi — " — " — u och y
- Vi antar att störningarna är obekydliga och kan ignoreras.

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + K[y - C\hat{x}]$$

simuleringsdelen — observatörsmatris

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ky(t)$$

Antag att dim $[C] = 1 \times n$



dvs $y \in R$: speca egenv. till $A-KC$ → K entydigt.

$$A - KC = \underset{n\times n}{[\quad]} - \underset{n\times 1}{[\,]}\underset{1\times n}{[\quad]}$$

(1) $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$ $\quad x(0) = x_0$

(2) $\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t)]$ $\quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$

Inför skattningsfelet $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$
$\tilde{x}(0) = x_0 - \hat{x}_0 \neq 0$

$$\frac{d}{dt}(x - \hat{x}) = A(x - \hat{x}) - K[Cx - C\hat{x}]$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\tilde{x} = (A - KC)\tilde{x} \qquad \tilde{x}(0) = x_0 - \hat{x}_0$$

$$\tilde{x}(t) = e^{(A-KC)t} \cdot \tilde{x}(0)$$

Om alla egenv. till $A-KC$ ligger i VHP, gäller att $\|\tilde{x}(t)\| \to 0$ då $t \to \infty$ även om $x_0 - \hat{x}_0 \neq 0$

$\boxed{\text{EX}}$

$$\dot{x}(t) = x(t) + v_1(t)$$
$$y(t) = x(t) + v_2(t)$$

$$Ev_1 = 0 = Ev_2 = Ev_1v_2$$
$$Ev_1^2 = \lambda^2 \qquad Ev_2^2 = \sigma^2$$
$$2P + \lambda^2 = \frac{1}{\sigma^2} \cdot P^2$$
$$P = \sigma^2 \underset{(-)}{\pm} \sqrt{\sigma^4 + \lambda^2\sigma^2}$$
$$K = P \cdot 1 \cdot \sigma^{-2} = 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)^2}$$
$$\frac{d}{dt}\hat{x} = \hat{x} + K[y - \hat{x}] = [1-K]\hat{x} + Ky$$

$$\frac{\hat{X}(s)}{Y(s)} = \frac{K}{s + 1 - K} = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\sigma^2}}}{s + \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\sigma^2}}}$$

$$y \longrightarrow \boxed{K_f} \xrightarrow{\hat{x}}$$

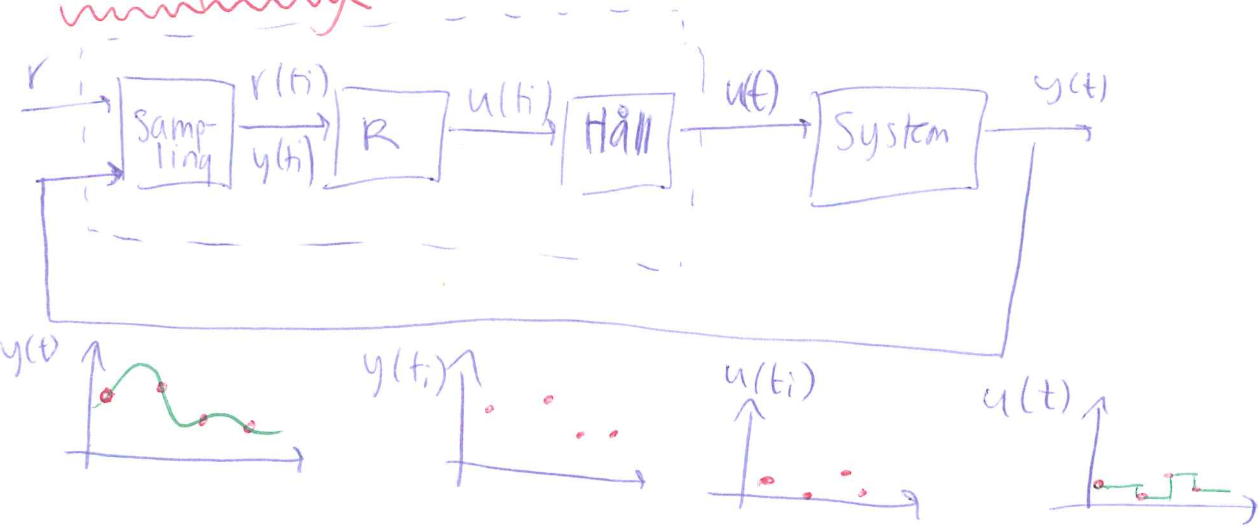
v_2 är vitt brus, $w(t)$ "färgad" störning

$$E(w) = 0 \qquad Ew^2 = \lambda^2$$
$$\Phi(\omega) = \frac{\lambda^2}{\omega^2 + \gamma^2}$$

$$\underset{\lambda^2}{v_1} \longrightarrow \underset{\frac{1}{s+a}}{\boxed{F(s)}} \xrightarrow{w}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -\gamma x_2 + v_1 \qquad y = [1 \ 0]\, x + v_2$$

22/5 Sampling



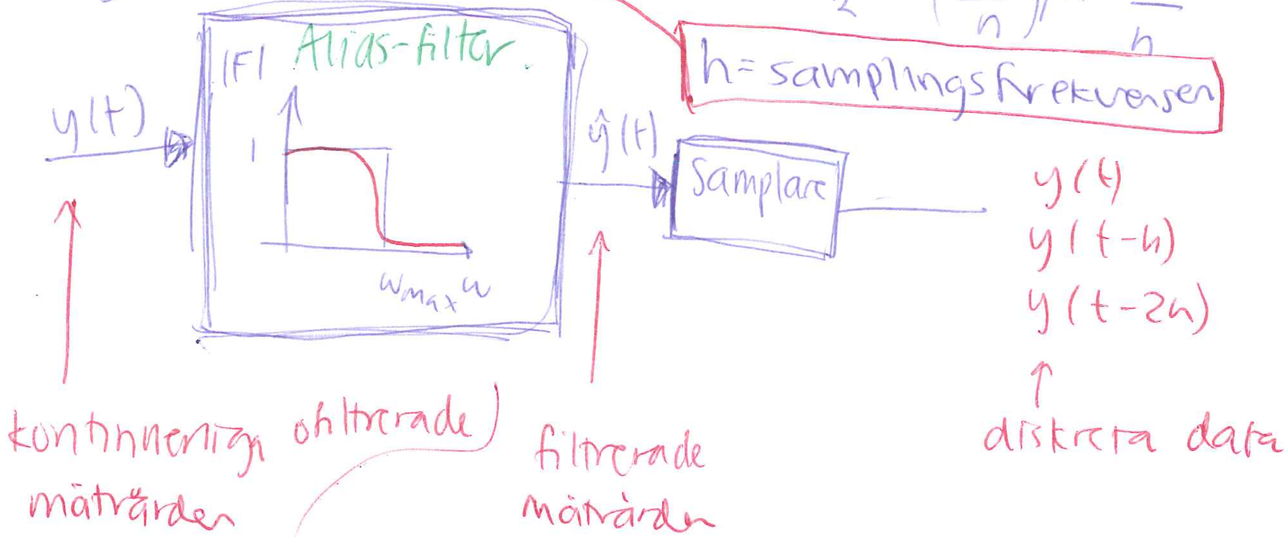
Antag att $G_R(s)$ är beräknad, och att frekvenser högre än ett visst värde ω_{max} inte behöver beaktas)

1° $\omega_{max} = \omega_N$

2° $\omega_N = \frac{\omega_s}{2} = \left(\frac{2\pi}{h}\right)/h = \frac{\pi}{h}$

3° $h = \pi / \omega_{max}$

h = samplingsfrekvensen



Sampla, efter att först ha filtrerat bort frekvenser $>\omega_N$

$$F(s) = K\frac{s+1}{s+0,2}$$

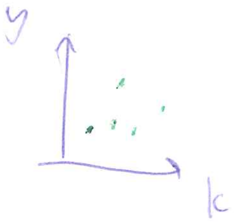
$$U(s) = F(s)E(s)$$

$$\frac{u(t)-u(t-\Delta t)}{\Delta t} \approx \frac{du}{dt}$$

$$(s+0,2)U(s) = K(s+1)E(s)$$

$$\left(\frac{U-U^-}{\Delta t} + 0,2U\right) = K\left(\frac{E-E^-}{\Delta t}\right) + KE$$

$$Z\{y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} = Y(z)$$



$$Z\{y(k-l)\} = z^{-l} Z\{y(k)\}$$

$$X(z) = z^{-1} X(z) + h \cdot z^{-1} E(z)$$

$$(z-1) X(z) = h E(z) \rightarrow X(z) = \frac{h}{z-1} E(z)$$

$$U(z) = K_i X(z) + K_p E(z) = \underbrace{\left[K_p + \frac{K_i * h}{z-1}\right]}_{PI} E(z)$$

$\boxed{EX}$ $G(s) = \frac{v}{s+v}$ $\quad v > 0$

tillst. form $\quad \dot{x}(t) = -v x(t) + v u(t)$

$$\Phi(t) = e^{At} = e^{-vt}$$

$$x(k) = e^{-vh} x(k-1) + \int_{kh-h}^{kh} e^{-vkh+vt} v u(k-1) dt$$

$$= e^{-vh} x(k-1) + (1 - e^{-vh}) u(k-1)$$

$$G(z) = \frac{1-e^{-vh}}{z - e^{-vh}} = \frac{b(h)}{z - a(h)}$$

$$Z\{f(k)\} = f(0) + f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2} \dots \Rightarrow F(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} \dots$$

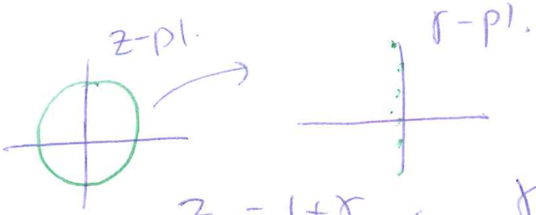
$$f(k) = \begin{cases} 1 & \text{för } k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$ (enhetssteg)

$$= \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Ex1 $\quad G(z)=\frac{1}{z-1} \qquad F(z)=a+\frac{b}{z-1}$

K.E.: $\quad 1+GF=0$

$$z^2+(a-2)z+b-a+1=0$$



$$z=\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \Leftrightarrow \gamma=\frac{z-1}{z+1}$$

$$\gamma=\frac{e^{i\varphi}-1}{e^{i\varphi}+1}=\frac{e^{i\varphi/2}-e^{-i\varphi/2}}{\dots+\dots}=\frac{\sinh i\varphi/2}{\cosh i\varphi/2}$$

(på cirkelranden) $=\frac{i\sin\varphi/2}{\cos\varphi/2}=i\tan\varphi/2$

$$\Rightarrow (4-2a+b)\gamma^2+2(a-b)\gamma+b+1=0$$

{Rouths kriterium - alla koeff >0}

$$\begin{cases} 4-2a+b>0 \\ a-b>0 \\ b+1>0 \end{cases}$$

$b>2a-4$

$b<a$

$b>-1$