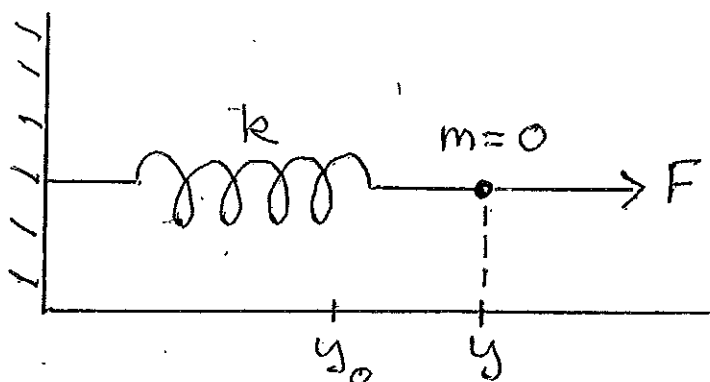


Dynamik, styrning och reglering

Betrakta ett mekaniskt system där en fjäder dras ut (eller trycks ihop):

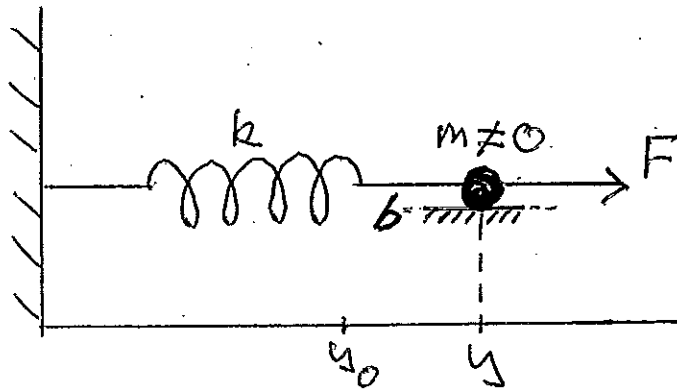


Vi antar först att en yttre kraft påverkar fjädern i en masspunkt som vi antar kan försummas. Punktens läge är y . Om $y = y_0$ antas fjädern vara i viloläge. En matematisk beskrivning, om vi låter $y - y_0 = x$, är:

$$0 = -k \cdot x + F \Rightarrow x = F/k$$

Detta är en **linjär statistisk beskrivning** av systemet: Om kraften F , t ex ökar med 25 %, så kommer punktens position omedelbart (dvs enligt antagen modell) att öka med 25 %. Om fjäderparametern varit lägesberoende, $k = k(x)$, kommer även då punktens position omedelbart att förändras, men vi har då en **olinjär statistisk beskrivning** av systemet.

Dynamik, styrning och reglering



Vi antar nu att en yttre kraft påverkar fjädern i en punktmassa $m > 0$. Förutom fjäderkraften antar vi att det finns ytterligare en dämpande kraft, proportionell mot massans hastighet. Vi får nu följande modell (fjäderparametern antages konstant):

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -k \cdot x(t) - b \cdot \dot{x}(t) + F(t)$$

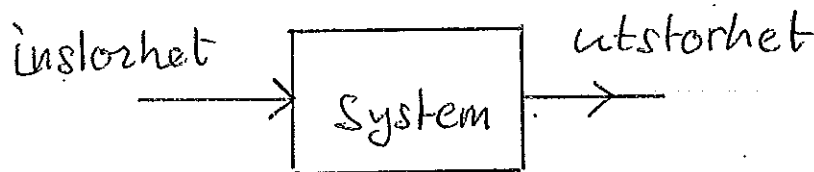
Vi vet från mekaniken att då kraften ändras kommer positionen x att påverkas men inte omedelbart, utan på ett *trögt* eller *dynamiskt* sätt. Modellen är nu en *linjär dynamisk beskrivning* av systemet.

Dynamik, styrning och reglering

Betrakta massa/fjäder-systemet vars position är y och pålagd kraft är F . Modellen för systemet är som ovan (p är deriveringsoperatoren map tid):

$$mp^2(y(t) - y_0) + bp(y(t) - y_0) + k(y(t) - y_0) = F(t)$$

Man kan säga att kraften F är *instorhet* (stimulus) till systemet, eftersom systemet påverkas av F , medan F inte påverkas av systemet. Positionen y påverkas däremot av insignalen via systemet, och är därför *utstorhet* till systemet. Symboliskt kan detta beskrivas av ett block (rektangulär låda) där in- och utstorheter representeras av pilar (till och från lådan):

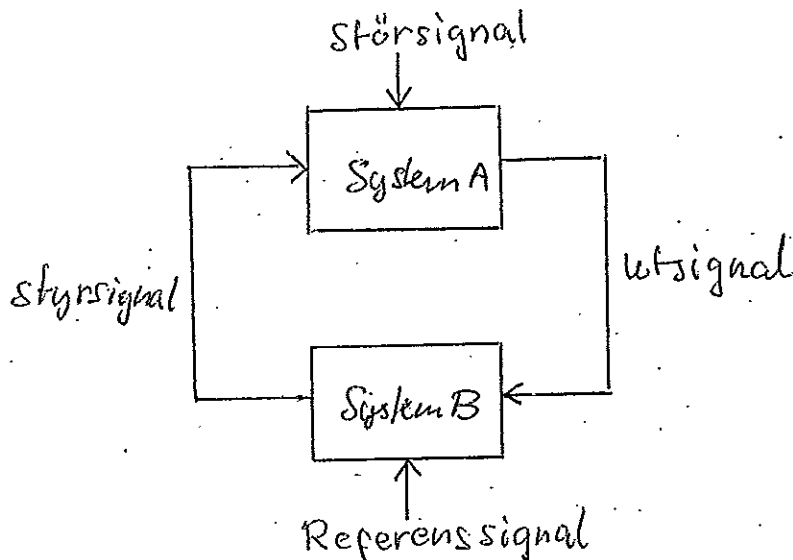


Om en viss egenskap hos systemet (t ex en massas position) kan påverkas eller styras av instorheten (t ex en yttre kraft) kallas denna en *styrsignal*. Man kan också tänka sig att en instorhet kan representera en ej önskvärd yttre påverkan av systemet. En sådan instorhet kallas en *störsignal*.

Dynamik, styrning och reglering

Styrning innebär att om man känner alla instorheter till systemet, och man har tillgång till en exakt modell av systemet, kan alla utstorheter bestämmas exakt. **Modeller ger dock aldrig en exakt beskrivning av systemet, och som dessutom alltid påverkas av störsignaler.**

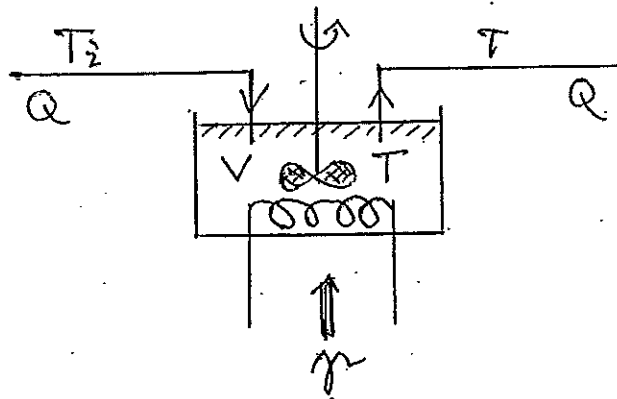
En bättre ansats är att låta utsignalen *påverka* insignalen. Detta är principen för **återkoppling**. Betrakta system A och B i återkopplingsstruktur:



System A är det system som skall styras, **processen**. System B är det system där det bestäms (automatiskt) hur system A skall påverkas genom val av styrsignal. System B innehåller (direkt eller indirekt) en modell av det system som skall styras (dvs A), samt information om **önskat resultat** av styrningen. System B kallas för **regulator**. Styrmetoden kallas **reglering**.

Dynamik, styrning och reglering

Betrakta ett system för uppvärmning av vätska. Vi antar en mycket väl omrörd tank, där temperaturgradienter kan försummas. Vätskevolymen är V (liter) och det konstanta genomflödet är Q (liter/sekund). Tanken värms genom tillförd varierbar effekt p (Joule/sekund) som är systemets styrsignal. Temperaturen hos ingående vätska, T_i , kan här uppfattas som en störsignal, medan temperaturen på utgående vätska, T , är en mätbar utsignal, som skall styras mot ett önskat (valbart) referensvärde, T_{ref} .



En modell för processen fås genom en energibalans

$$\frac{d}{dt}(V\rho c_p T) = Q\rho c_p(T_i - T) + p$$

där ρ och c_p betecknar densitet och specifikt värme, respektive.

Dynamik, styrning och reglering

Ett naturligt sätt att styra vore att beräkna vilken stationär effekt p_0 som krävs för värmning till den konstanta temperaturen $T = T_{ref}$:

$$p_0 = Q\rho c_p(T_{ref} - T_{i0})$$

En lämplig styrlag vore då att till p_0 addera ett variabelt bidrag som är proportionellt mot skillnaden mellan önskad och verklig temperatur, dvs

$$p = p_0 + K_p(T_{ref} - T)$$

Implementera styrlagen i processmodellen:

$$\frac{d}{dt}(V\rho c_p T) = Q\rho c_p(T_i - T) + Q\rho c_p(T_{ref} - T_{i0}) + K_p(T_{ref} - T)$$

Vi kan, med notationen $\sigma = K_p / Q\rho c_p$ skriva om denna ekvation som

$$\frac{V}{Q} \cdot \frac{dT}{dt} = T_i - T + T_{ref} - T_{i0} + \sigma(T_{ref} - T)$$

Dynamik, styrning och reglering

Inför vidare beteckningarna $\tau = V/Q$ och $w = T_i - T_{i0}$. Vi kan nu ange en differentialekvation, som beskriver återkopplade systemets dynamik.

$$\tau \dot{T}(t) + (1 + \sigma)T(t) = (1 + \sigma)T_{ref} + w(t)$$

Låt oss, för att förenkla analysen, anta att $w(t) \equiv w_0$. Det finns då en partikulär lösning till ekvationen som är $T_p = T_{ref} + w_0/(1 + \sigma)$ och en lösning till motsv. homogena ekvation $T_h(t) = C \exp\{-(1 + \sigma)t/\tau\}$.

Utsignalen efter en referensändring till T_{ref} från initialtemperaturen $T(0)$ blir då om $\tau_{FB} = \tau/(1 + \sigma)$:

$$T(t) = (1 - e^{-t/\tau_{FB}})[T_{ref} + w_0/(1 + \sigma)] + T(0)e^{-t/\tau_{FB}}$$

Vi ser att efter lång tid (σ antas positivt) $T \rightarrow T_{ref} + w_0/(1 + \sigma)$. Om beloppet av störningen w_0 alltså är liten och förstärkningen σ är stor, blir den resulterande temperaturen T nära T_{ref} . Om störningen, dvs skillnaden mellan antagen temperatur hos inflödet och motsv. verkliga temperatur, kommer $T \rightarrow T_{ref}$.

Dynamik, styrning och reglering

Notera att σ kan uppfattas som en designparameter: Om σ väljs positivt blir $\tau_{FB} < \tau$. Om σ väljs negativt men större än -1 blir $\tau_{FB} > \tau$. Om σ väljs mindre än -1 blir reglersystemet *instabilt*. Man skulle kunna tro att genom att välja σ mycket stort ($\sigma \rightarrow \infty$) skulle reglersystemet bli hur snabbt som helst för alla avvikelser w_0 . Om vi tittar på återkopplade systemets diff. ekvation så stämmer detta. Problemet är dock att för mycket snabba förändringar, beskriver inte längre modellen systemet.

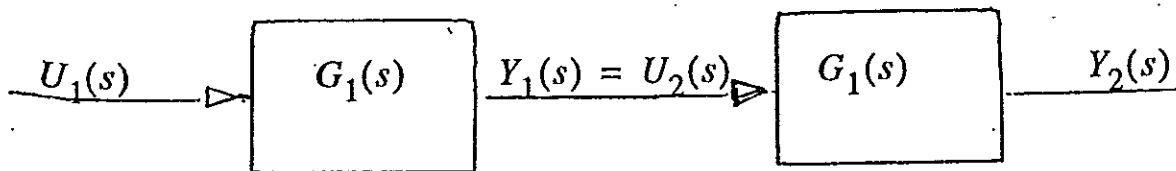
Man kan i stället modifiera styrlagen, så att man förutom att ha en term proportionell mot avvikelserna mellan *börvärde* och *ärvärde*, så adderas ytterligare en term proportionell mot tidsintegralen av avvikelserna:

$$p = p_0 + K_p(T_{ref} - T) + K_I \int (T_{ref} - T) dt$$

Detta är ett exempel på en proportionell och integrerande regulator, en så kallad *PI-regulator*, som torde vara världens vanligaste regulator inom framför allt processindustrin.

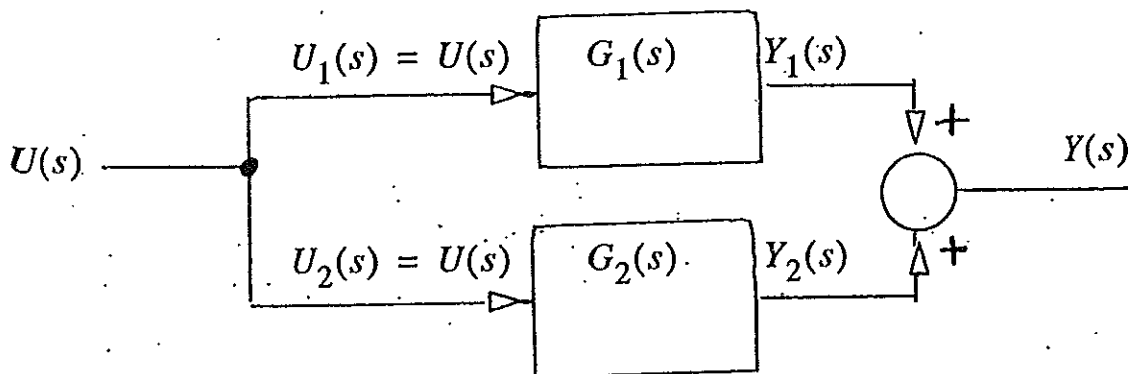
Blockdiagram

Seristruktur



$$Y_2(s) = G_2(s)U_2(s) = G_2(s)G_1(s)U_1(s) \Rightarrow G(s) = G_2(s)G_1(s)$$

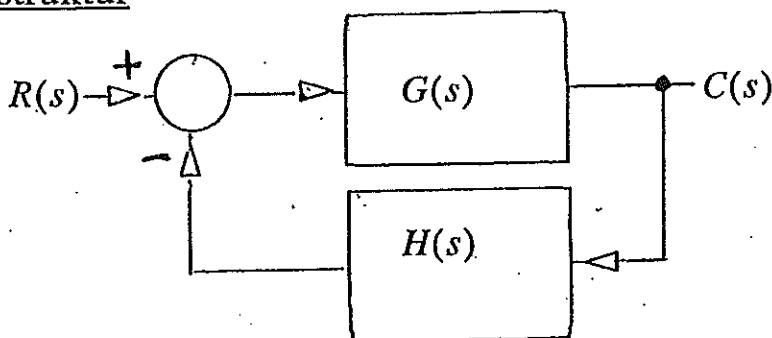
Parallelstruktur



$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s)U_1(s) + G_2(s)U_2(s) \Rightarrow G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

s

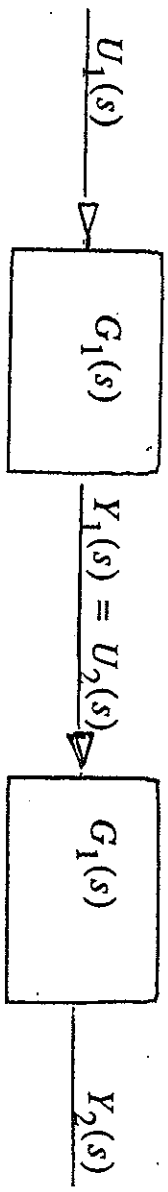
Äterkopplingsstruktur



$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)] \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

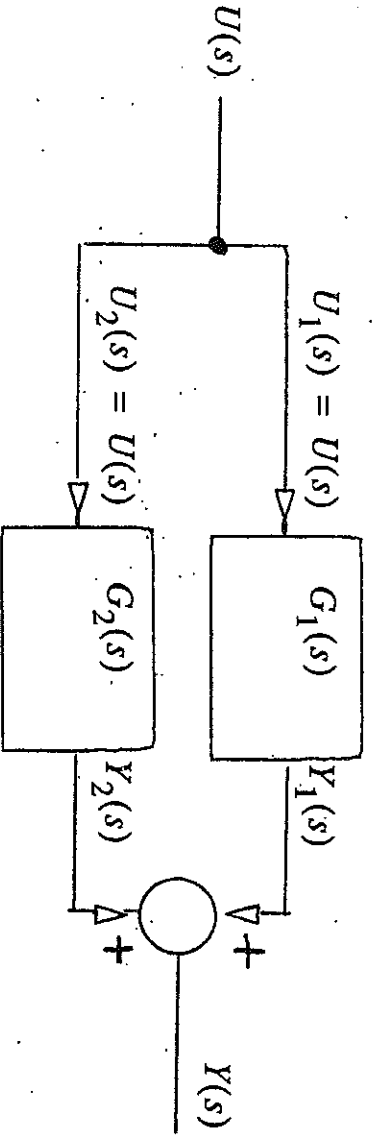
Blockdiagram

Seriestructur



$$Y_2(s) = G_2(s)U_2(s) = G_2(s)G_1(s)U_1(s) \Rightarrow G(s) = G_2(s)G_1(s)$$

Parallellstruktur



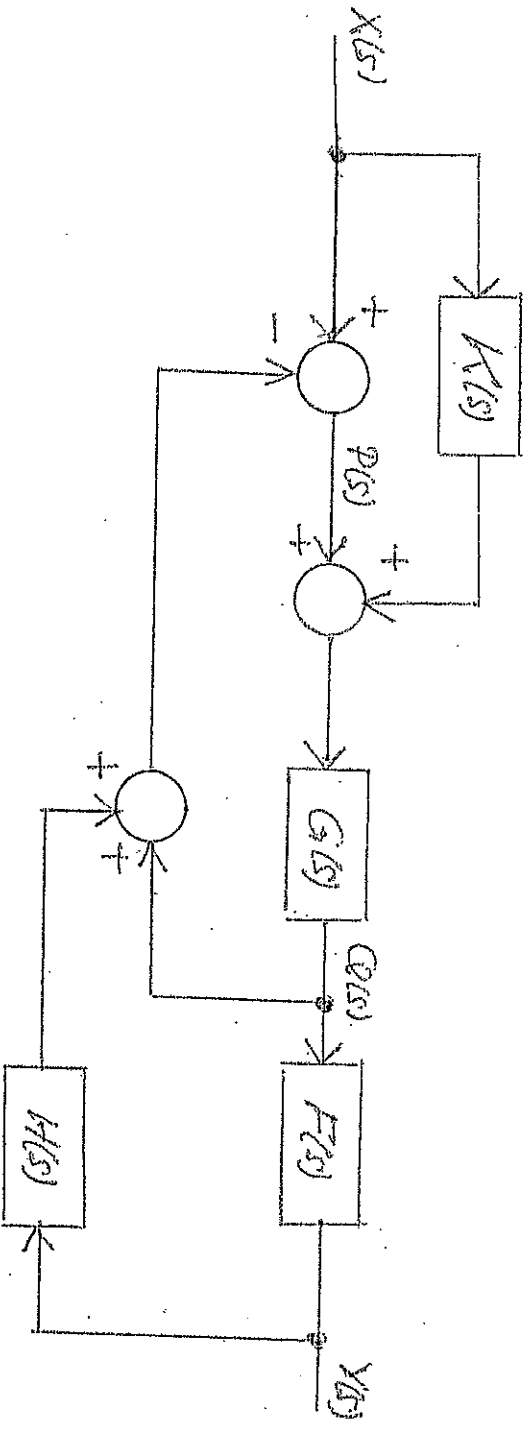
$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s)U_1(s) + G_2(s)U_2(s) \Rightarrow G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

Återkopplingsstruktur



Reduktion av blockdiagram

Vi söker överföringsfunktionen från $X(s)$ till $Y(s)$ i nedanstående system. Inför hjälpvariabler, här t ex $P(s)$ och $Q(s)$, vid motsv. antal "knutpunkter":



Man får sambanden: $P = X - (Q + HY)$, $Q = G(P + KX)$, $Y = FQ$. Detta ger

$$Q = G(X - Q - HY + KX), Q = \frac{Y}{F} \Rightarrow \frac{Y}{F} = GX - G\frac{Y}{F} - GHY + GKX$$

Omgruppering av termer ger $Y(1 + G + FGH) = FG(1 + K)X$ och den sökta överföringsfunktionen är:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{F(s)G(s)(1 + K(s))}{1 + G(s)(1 + F(s)H(s))}$$

PD-regulatorer eller lead-filter

Betrakta en PD-regulator som är fysikaliskt realiserbar, dvs

$$F(s) = K_P \left(1 + \frac{T_d s}{1 + T_f s} \right), T_d > 0, T_f > 0 \quad (1)$$

Vi söker en alternativ parametrering av PD-regulatorn, och skriver:

$$F(s) = K_P \frac{1 + (T_d + T_f)s}{1 + T_f s}$$

Inför de nya parametrarna $\tau_D = (T_d + T_f)$ och $\beta = T_f / (T_d + T_f) < 1$.

Vi kan nu skriva om PD-regulatorn på den sk *leadfilterformen*:

$$F(s) = K_P \cdot F_{PD}(s) = K_P \cdot \frac{1 + \tau_D s}{1 + \beta \tau_D s} \quad (2)$$

Notera att β är en dimensionslös faktor. Ibland brukar man kalla $1/\beta$ för filtrets *leadkvot*. Vi ser att leadkvoten alltid är större än ett.

Design med leadfilter

Antag att systemet $G(s)$ är givet tillsammans med systemspecifikationer:

Krav på *Stabilitet* och *snabbhet* i termer av t ex fasmarginal respektive det återkopplade systemets bandbredd skall formuleras. Oftast kan detta omtolkas till krav på överkorsningsfrekvens. Vid 45° fasmarginal gäller approximativt att $\omega_c \approx 0,6\omega_b$. Ett leadfilter skall bestämmas, sådant att systemspecifikationerna uppnås (vilket ibland är omöjligt).

Det för den begärda fasmarginalen φ_m nödvändiga *fastillskottet* ψ^* fås ur sambandet $\varphi_m = 180^\circ + \arg\{G(i\omega_c)\} + \psi^*$. (Om krav på $\psi^* > 90^\circ$ uppkommer är det omöjligt att lösa problemet med hjälp av leadfilter!)

Betrakta fasfunktionen för leadfiltret enligt ekvation (2):

$$\psi(\omega) = \arg\{F(i\omega)\} = \text{atan}(\tau_D\omega) - \text{atan}(\beta\tau_D\omega) \quad (3)$$

Man inser för $0 < \beta < 1$ att $\psi(0) = 0$, att $\psi(\infty) = 0$, och att det uppstår ett maximum för en frekvens ω^* däremellan. Maximum bestäms genom derivering av fasfunktionen:

$$\frac{d\psi}{d\omega} = \frac{\tau_D}{1 + (\tau_D\omega)^2} - \frac{\beta\tau_D}{1 + (\beta\tau_D\omega)^2} = 0 \Rightarrow \omega^* = \frac{1}{\tau_D\sqrt{\beta}}$$

Vi får nu resultatet:

$$\omega^* = 1/(\tau_D \sqrt{\beta}) \Rightarrow \psi^* = \text{atan}(1/\sqrt{\beta}) - \text{atan}(\sqrt{\beta}) \quad (4)$$

Tangens för båda leden ger

$$\tan \psi^* = \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \sqrt{\beta} \right) / 2 \Rightarrow (\sqrt{\beta})^2 + 2(\tan \psi^*)\sqrt{\beta} - 1 = 0$$

$$\beta = \left[\frac{1 - \sin \psi^*}{\cos \psi^*} \right]^2 \quad (5)$$

Om vi exempelvis väljer $\omega^* = \omega_c$, fås deriveringstiden τ_D som:

$$\tau_D = 1/(\omega_c \sqrt{\beta}) \quad (6)$$

Betrakta nu kretsöverföringens belopp vid överkorsningsfrekvensen ω_c :

$$|G(i\omega_c)F(i\omega_c)| = |G(i\omega_c)|K_P \left| \frac{1 + i/\sqrt{\beta}}{1 + i\sqrt{\beta}} \right| = |G(i\omega_c)| \frac{K_P}{\sqrt{\beta}} = 1$$

Man får då följande värde på förstärkningen K_P :

$$K_P = \sqrt{\beta} / |G(i\omega_c)| \quad (7)$$

Exempel

$$G(s) = \frac{1}{s} e^{-s}$$

Antag att vi kräver $\omega_c = 1,6$ och $\phi_m = 35^\circ$. Beräkna först nödvändigt faslyft ψ^* :

$$\psi^* = -\arg\{G(i1,6)\} - 145^\circ = 90^\circ + 1,6\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) - 145^\circ \approx 37^\circ$$

Insättning i (5), (6) och (7) ger: $\beta = 0,25$, $\tau_D = 1,25$, $K_P = 0,80$

Det resulterande leadfiltret blir då:

$$F(s) = 0,8 \left(\frac{1 + 1,25s}{1 + 0,3125s} \right) = 0,8 \left(\frac{1 + s/0,8}{1 + s/3,2} \right)$$

PI-regulatorer och lag-filter

Ett lagfilter används för att öka det återkopplade systemets noggrannhet. Överföringsfunktionen för ett lagfilter, där parametern $\gamma \in (0, 1)$, är:

$$F(s) = K_P \left(\frac{1 + \tau_I s}{\gamma + \tau_I s} \right) \quad (8)$$

För att få lagverkan krävs att $\gamma < 1$. Parametern $1/\gamma$ brukar kallas för filtrets *lagkvot*. Vi skall här fokusera på det principiellt intressanta fallet att $\gamma \rightarrow 0$, varvid lagfiltret övergår i en PI-regulator:

$$F(s) = K_P \frac{1 + \tau_I s}{\tau_I s} \quad (9)$$

Ett skäl till att använda ett lagfilter, kan vara att man har ett högt krav på noggrannhet, men att man av "stabilitetsskäl" inte vill införa ytterligare integrationer i kretsen (dvs en integrerande regulator).

Design med PI-regulator

Antag att systemet $G(s)$ är givet tillsammans med systemspecifikationer i termer av t ex fasmarginal och överkorsningsfrekvens, dvs φ_m, ω_c .

Kravet på φ_m är överordnat kravet på ω_c , eftersom egenskapen stabilitet är överordnad egenskapen snabbhet. Antag att systemets nämnarpolynom innehåller faktorer av formen $1 + \tau s$, där τ är reell och positiv. En enkel designmetod är då: Gör i (9) valet $\tau_I = \tau$ Kretsöverföringen L blir då:

$$L(s) = F(s)G(s) = K_P \frac{1 + \tau s}{\tau s} \cdot \frac{G_r(s)}{1 + \tau s} = \frac{K_P}{\tau s} G_r(s)$$

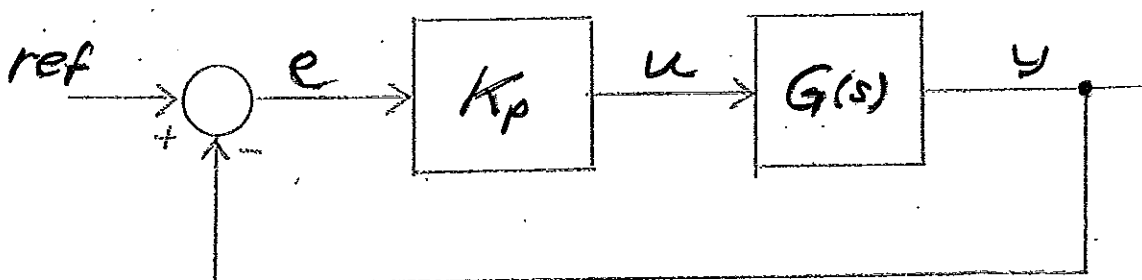
$$\varphi_m = 180^\circ + \arg\{L(i\omega_c)\} = 90^\circ + \arg\{G_r(i\omega_c)\}$$

Enklaste sättet att lösa ut ω_c är att i ett Bodediagram plotta faskurvan för det reducerade systemet $\arg\{G_r(i\omega_c)\}$, varefter ω_c fås som frekvensen där faskurvan skär linjen $\varphi_m - 90$. Välj sedan $K_P = \tau \omega_c / |(G_r(i\omega_c))|$. Notera att man får acceptera den snabbhet, dvs ω_c , som följer av valet!

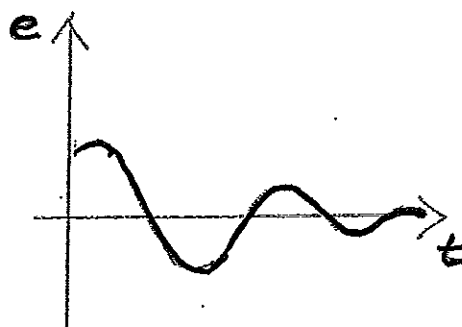
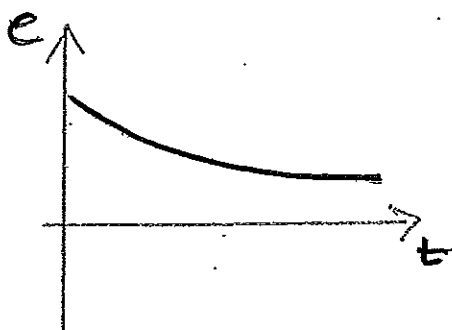
En annan metod är att bestämma ω_p , frekvensen där processens faskurva skär linjen -180° , välja $\tau_I = 1 / \omega_p$, beräkna ω_c så önskad fasmarginal uppnås, och därefter bestämma K_P så att $|L(i\omega_c)| = 1$. Blir ω_c för lågt, kan (eventuellt) kravet på φ_m sänkas något.

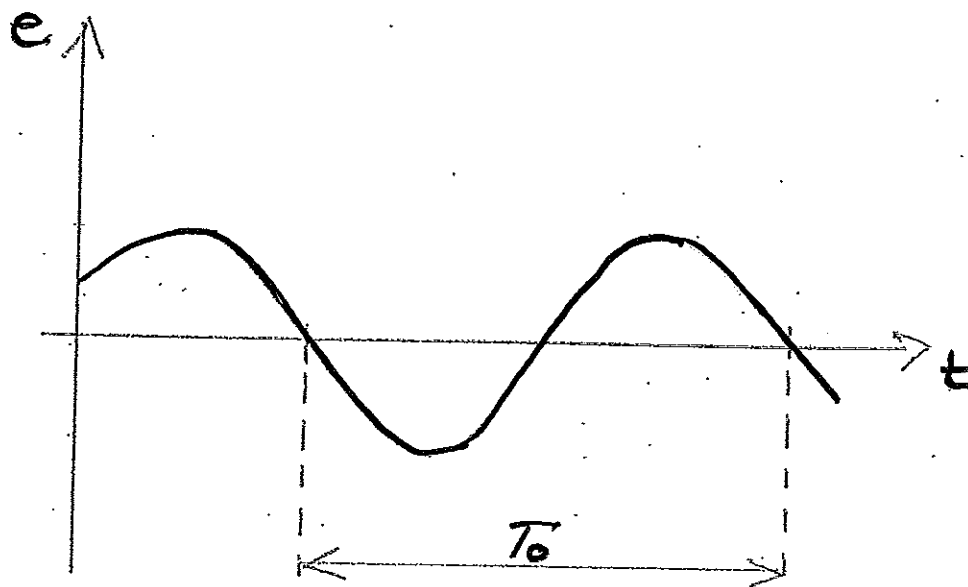
Ziegler-Nichols svängningsexperiment

Betrakta ett återkopplat system som är försett med en P-regulator, och där vi antar att reglerobjektet kan beskrivas av en stabil överföringsfunktion:



Ställ in en låg förstärkning på K_p och initiera små störningar, t ex. genom att ändra referensen eller genom att "addera pulser" vid processingången. Normalt kommer felet att avta monotont. Om K_p ökas succesivt kommer felet att avta snabbare men (sannolikt) på ett oscillativt sätt. Om K_p ökas ytterligare kommer felet mer och mer närma sig en odämpad svängning. (Ytterligare förstärkningsökningar ger ett instabilt återkopplat system!)





Notera det K_p -värde som "precis" gav en odämpad svängning, K_0 , samt motsvarande periodtid, T_0 . Utgående från Ziegler-Nichols svängningsexperiment och värdeparet (K_0, T_0) kan regulatorinställningar rekommenderas:

Regulatorotyp	K_p	T_i	T_d
P	$0.50K_0$		
PI	$0.45K_0$	$T_0/1.2$	
PID	$0.60K_0$	$T_0/2$	$T_0/8$

En viss varning bör utfärdas för tabellens inställningar, speciellt då för PI. (I extrema fall kan systemet till och med bli instabilt!)

Frekvensfunktioner och Bodediagram

Betrakta ett linjärt tidsinvariant system, vars överföringsfunktion $G(s)$ saknar poler i högra halvplanet, liksom poler och nollställen på imaginäraxeln utanför origo.

Med *frekvensfunktionen* till $G(s)$ menas mappningen från R^+ till C , från den reella icke-negativa frekvensen ω till det komplexa talet $G(i\omega)$ med beloppfunktionen $|G(i\omega)|$ och fasfunktionen $\arg\{G(i\omega)\}$, från R^+ till R^+ respektive från R^+ till R .

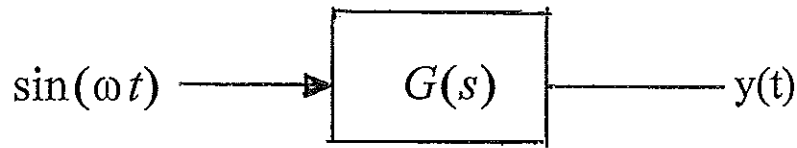
Tolkningen av frekvensfunktionen är att insignalen $\sin(\omega t)$ antas ha påverkat det stabila systemet $G(s)$ sedan $t = -\infty$. Utsignalen är då

$$y(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg\{G(i\omega)\})$$

dvs en sinussignal av samma frekvens ω , förstärkt med $|G(i\omega)|$ och fasvriden med $\arg\{G(i\omega)\}$ (oftast negativ). Man talar då om det *sinusformade stationärtillståndet* (jämför ellärans $j\omega$ -metod för växelström).

Bodediagrammet innebär avbildning av *frekvensfunktionens* belopps- och fasfunktioner, var och en för sig. Då vi utgår från frekvensfunktioner, ritas alltså inte Bodediagram för instabila system!

Bevis



G saknar poler och nollställen på imaginäraxeln utanför origo, och saknar poler i högra komplexa halvplanet. Dessutom gäller $L^{-1}\{G(s)\} = g(t)$. Insignalen antages "ha funnits" sedan $t = -\infty$. Utsignalen blir:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} g(\tau) \sin(\omega t - \omega \tau) d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau) \operatorname{Im}\{e^{i(\omega t - \omega \tau)}\} d\tau = \\ &= \operatorname{Im}\left\{ \int_0^{\infty} g(\tau) e^{i(\omega t - \omega \tau)} d\tau \right\} = \operatorname{Im}\left\{ \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \cdot e^{i\omega t} \right\} = \end{aligned}$$

där integralen tolkas som L -transformen av G i specialfallet $s = i\omega$, dvs

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Im}\{G(i\omega) \cdot e^{i\omega t}\} = |G(i\omega)| \operatorname{Im}\{e^{i \arg G(i\omega)} \cdot e^{i\omega t}\} = \\ &= |G(i\omega)| \operatorname{Im}\{e^{i(\arg G(i\omega) + \omega t)}\} = |G(i\omega)| \sin(\arg G(i\omega) + \omega t) \end{aligned}$$

Betrakta ett linjärt tidsinvariant återkopplat system, vars kretsöverföring $L(s)$ saknar poler i HHP, liksom poler och nollställen på imaginäraxeln utanför origo. Motsvarande frekvensfunktion $L(i\omega)$ är då väldefinierad.

Fasfunktionen $\arg\{L(i\omega)\}$ visas ofta grafiskt i en logaritmisk frekvensskala, så att ett större frekvensområde täcks in.

Exempel:
$$L(s) = \frac{16}{s(s+4)} \Rightarrow L(i\omega) = \frac{16}{i\omega(i\omega+4)}$$

Kretsöverföringen har inga poler i HHP.

Vi kan direkt formulera (och skissera) fasfunktionen:

$$\arg\{L(i\omega)\} = -90^\circ - \text{atan}(\omega/4)$$

ω (rad/sek)	$\arg\{L(i\omega)\}$ (grader)
0	-90, 0
1	-104, 0
2	-116, 6
4	-135, 0
8	-153, 4
∞	-180, 0

Notera att varje term i fasfunktionen kombineras additivt!

Beloppfunktionen $|L(i\omega)|$ återges också den i logaritmisk frekvensskala, men medan fasfunktionens olika delar adderas eller subtraheras, kommer beloppsfunktionens motsvarande delar *multiplieras eller divideras*. För att också här få additiva bidrag, anger vi beloppfunktionen i *decibel*, eller dB, som är en logaritmisk enhet där 1 ggr förstärkning motsvarar 0 dB:

$$|L(i\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log|L(i\omega)|$$

Vi skriver först om L på den så kallade *Bode-formen*:

$$L(s) = K \cdot L_0(s)/s^l, L_0(0) = 1, l = 0, 1, 2, \dots$$

Beloppfunktionen i dB kan då (med hjälp av logaritmlagarna) uttryckas:

$$|L(i\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log K - (20l) \cdot \log \omega + 20 \cdot \log|L_0(i\omega)|$$

Varje term ger alltså ett additivt bidrag till beloppet för varje frekvens ω .

Vid låg frekvens kan $|L(i\omega)|$ approximeras av sin *lågfrekvensassymptot*: som är en linjär funktion av variabeln $\log \omega$:

$$|L_{LF}(i\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log K - (20l) \cdot \log \omega$$

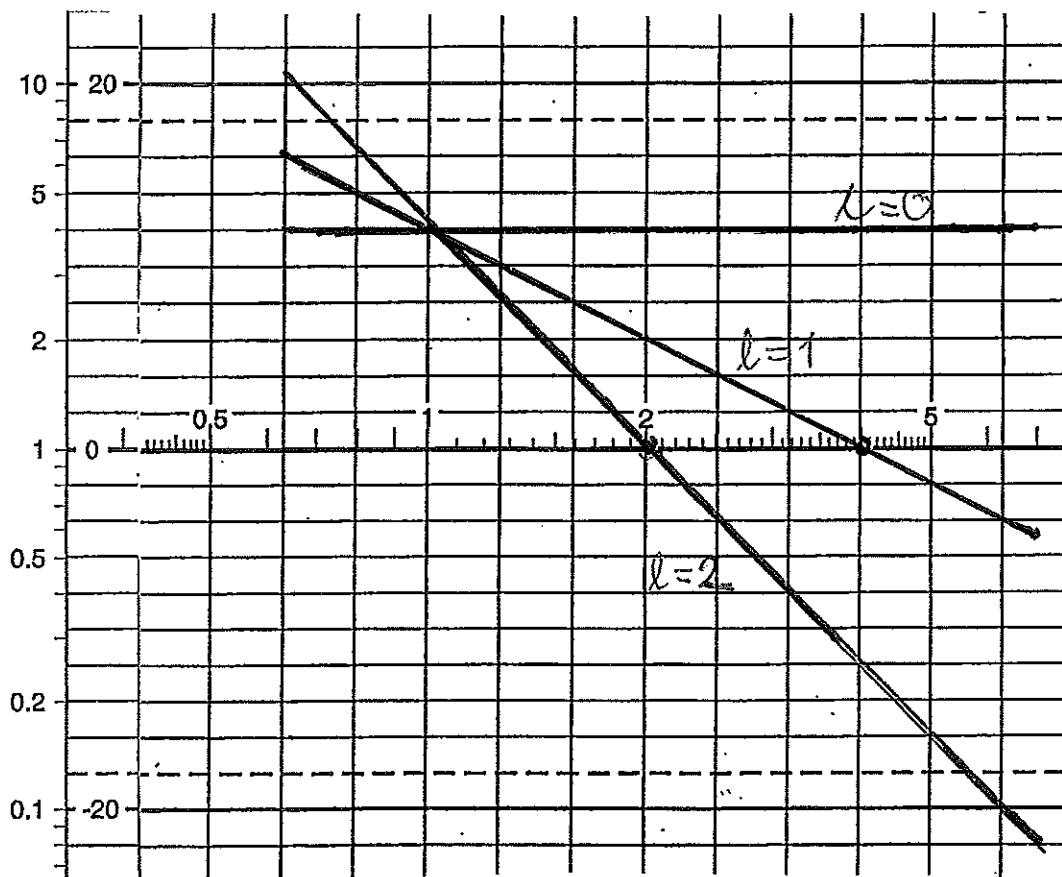
Detta beror på att $L_0(s)$ är en kontinuerlig funktion av s och på att vi vet att $L_0(0) = 1$. Vid låga frekvenser gäller då att $L_0(i\omega) \approx 1$, dvs 0 dB.

Den räta linjen $|L_{LF}|$, faller med *lutningen* $-20l$ dB per *dekads* höjning av frekvensen. $|L_{LF}|$ skär 0 dB-linjen då $0 = 20 \cdot \log K - (20l) \cdot \log \omega$, vilket ger *skärningsfrekvensen* $\omega = \sqrt[l]{K}$

I vårt exempel är $L(s) = \frac{16}{s(s+4)} = \frac{4}{s} \cdot \frac{1}{(1+s/4)}$ (Bode-formen)

Man ser att heltalsparametern $l = 1$ och den reella parametern $K = 4$.

LF-assymptoten i detta exempel visas nedan, där vi också som jämförelse lagt in motsvarande assymptoter för $l = 0$ och $l = 2$, för $K = 4$:



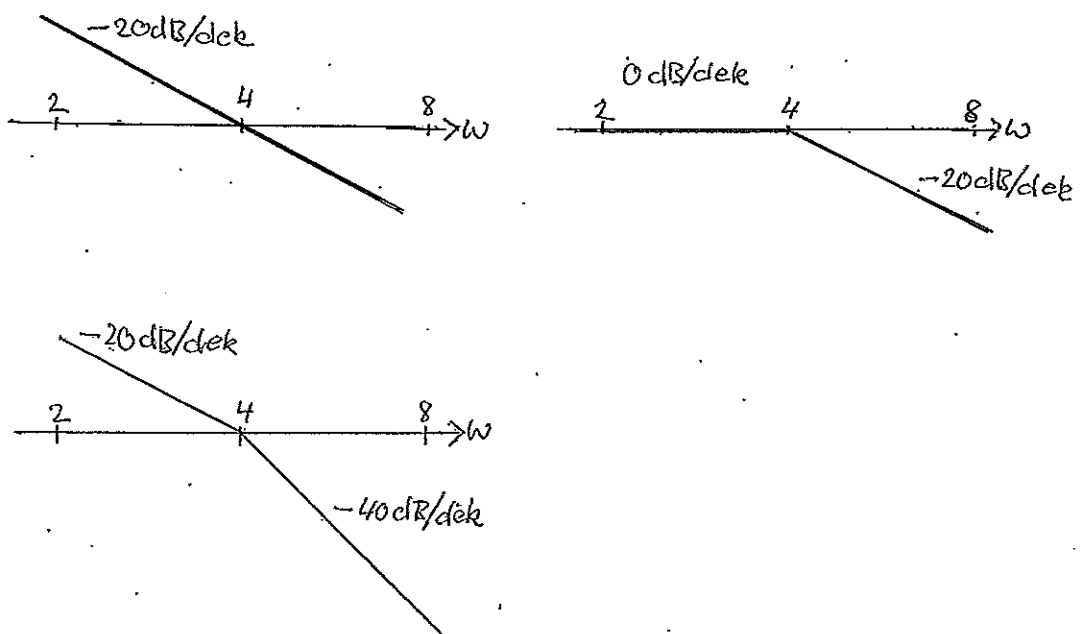
För att få $|L|_{dB}$ måste $|L_0|_{dB}$ alltså adderas till $|L_{LF}|_{dB}$. I vårt exempel, då $L_0(s) = 1/(1 + s/4)$, innehåller $|L_0(i\omega)|_{dB}$ endast ett additivt bidrag:

$$|L_0(i\omega)|_{dB} = -20 \cdot \log|1 + i\omega/4|$$

Polen ger alltså ett negativt bidrag. Det är naturligt då ju polfaktorn finns i nämnaren! (En nollställesfaktor hade i stället givit ett positivt bidrag.)

Betrakta termen $-20 \cdot \log|1 + i\omega/4|$, som utgör ett frekvensberoende additivt bidrag till totala beloppfunktionen i dB. För LF är bidraget 0 dB, medan för HF (hög frekvens) gäller att $-\log|1 + i\omega/4| \approx -\log(\omega/4)$, dvs en rät linje som faller med 20 dB/dekad och skär 0 dB vid $\omega = 4$.

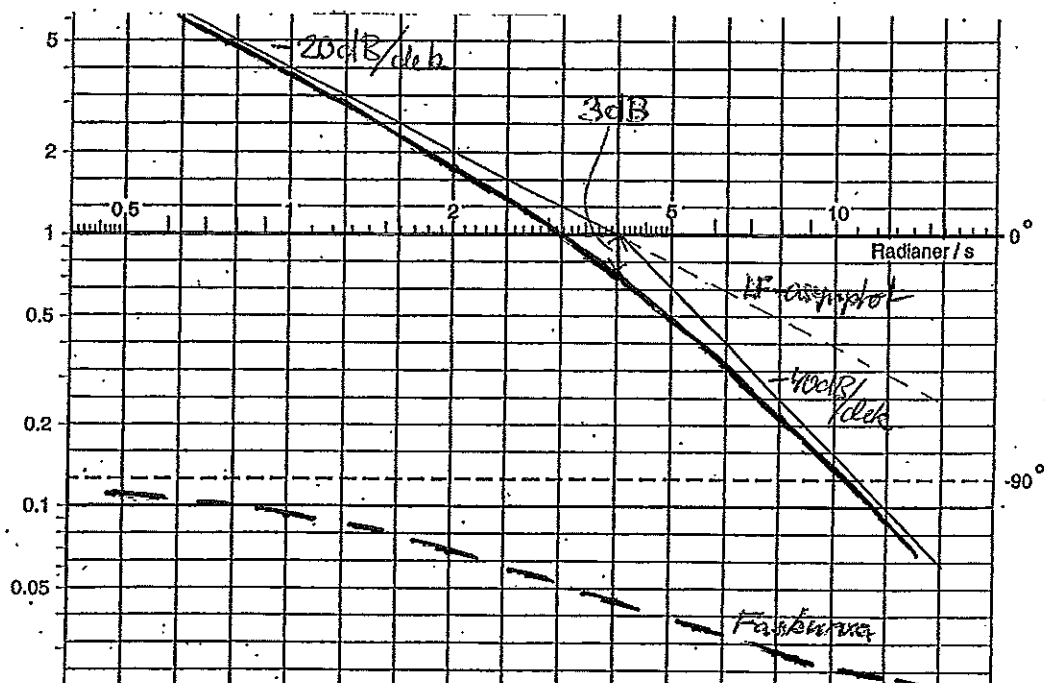
Observera att bidragen från LF-asymptoten och från polen $s = -4$ samverkar additivt! Om de asymptotapproximationerna ritas in i samma diagram, fås det polygondrag som är det *asymptotiska beloppdiagrammet*:

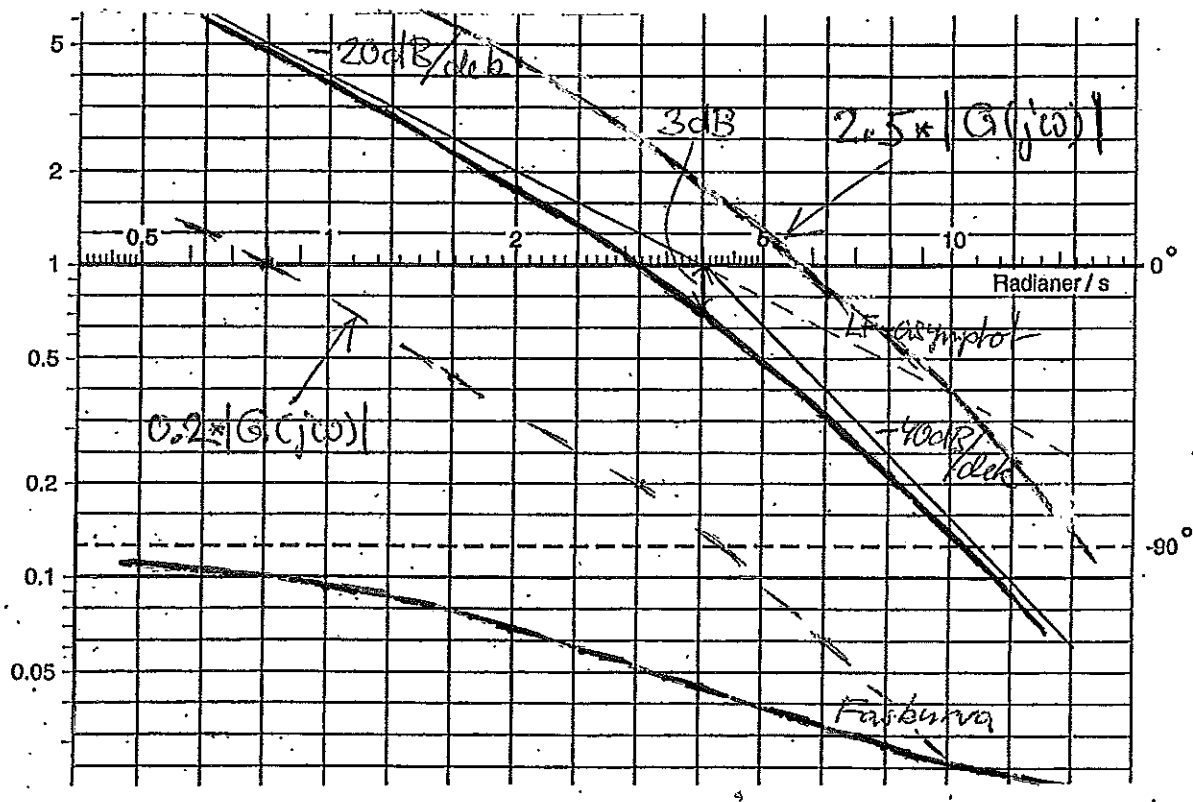


Utgående från den asymptotiska approximationen kvarstår att skissa den verkliga beloppfunktionen. Huvudregeln är brytpunkter på stort avstånd från varandra (en dekad) inte nämnvärt påverkar varandra, medan brytpunkter nära varandra (t ex en faktor två) interagerar märkbart. Betrakta en pol vid $s = -a$:

$$-20 \cdot \log|1 + i\omega/a| = -20 \cdot \log\sqrt{1 + (\omega/a)^2}$$

För $\omega = a$ ligger beloppsskurvan $-20 \cdot \log\sqrt{2} = -10 \cdot \log 2 \approx 3$ dB under brytpunkten i asymptotdiagrammet, medan för $\omega = a/2$ ligger den $20 \cdot \log\sqrt{5/4} \approx 1$ dB under asymptotdiagrammet. För $\omega = 2a$ fås samma resultat, dvs 1 dB under asymptotdiagrammet. Hade polen haft multipliciteten m , hade beloppsskurvan i motsv. fall befunnit sig $3m$ dB respektive m dB under asymptotdiagrammet. Samma resonemang gäller för nollställen, med där beloppsskurvan i stället ligger över asymptoten. Fas- och beloppkurvorna utgör tillsammans **Bodediagrammet**.





Om man tänker sig en förstärkningsökning på, t ex 2,5 gånger, betyder det att hela beloppskurvan flyttas 8 dB uppåt. Den nya kurvan är inritad (streckad) i Bodediagrammet. Observera att faskurvan inte alls påverkas av en förstärkningsökning. Om förstärkningen sänks t ex 5 gånger, skall hela beloppskurvan i stället flyttas 14 dB nedåt.

Nyquistkriteriet

Sats: (*Argumentvariationsprincipen*)

Låt $f(z)$ vara analytisk och sakna nollställen samt poler på randen C till ett slutet enkelt sammanhängande område D och ha ett ändligt (som kan utvidgas till "uppräknligt oändligt") antal poler och nollställen inom D . Då gäller, om Z är antalet nollställen och P antalet poler till $f(z)$ i D , att

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \{f(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{f(z)} \cdot \frac{d}{dz} f(z) dz = Z - P \quad (1)$$

Poler respektive nollställen av ordning m räknas m gånger. Vidare betecknar $\Delta_C \arg \{f(z)\}$ argumentvariationen av $f(z)$ då kurvan C genomlöps i positiv riktning. (Positiv riktning kan definieras fritt.)

Bevis:

Antag att $z = b$ är ett nollställe med multiplicitet m . I en omgivning till b finns då en analytisk funktion $g(z) \neq 0$ sådan att $f(z)$ kan skrivas

$$f(z) = (z - b)^m g(z)$$

Då är derivatan

$$f'(z) = m(z - b)^{m-1} g(z) + (z - b)^m g'(z)$$

Division ger

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-b} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

där den sista termen är analytisk för $z = b$ och funktionen $f'(z)/f(z)$ har alltså en enkelpol för $z = b$ med residun m .

Antag att $z = a$ är en pol med multiplicitet m . I en omgivning till a finns då en analytisk funktion $g(z) \neq 0$ sådan att $f(z)$ kan skrivas

$$f(z) = (z-a)^{-m}g(z)$$

Då är derivatan

$$f'(z) = -m(z-a)^{-m-1}g(z) + (z-a)^{-m}g'(z)$$

Division ger

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

där den sista termen är analytisk för $z = a$ och funktionen $f'(z)/f(z)$ har alltså en enkelpol för $z = a$ med residun $-m$.

Man finner att summan av residuerna vid nollställen är Z och summan av residuerna vid poler är $-P$. Residusatsen säger att

$$\oint F(z)dz = 2\pi i \sum \text{residuer}$$

och därmed är likheten mellan de två högra leden visad.

Vi ser att integranden är en exakt differential

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_C \frac{d}{dz} \{ \log f(z) \} dz = [\log f(z)]_{z = \text{startpunkt}}^{z = \text{slutpunkt}}$$

Det gäller att $\log f(z) = \log(|f(z)| e^{i \arg \{f(z)\}}) = \log|f(z)| + i \arg \{f(z)\}$.

Vi noterar nu att runt en sluten kurva måste startpunkten och slutpunkten vara identiska map position i det komplexa talplanet. Eftersom $f(z)$ är en entydig funktion, måste

$$[\log|f(z)|]_{z = \text{startpunkt}}^{z = \text{slutpunkt}} = 0$$

medan däremot

$$[\arg \{f(z)\}]_{z = \text{startpunkt}}^{z = \text{slutpunkt}} = \Delta_C \arg \{f(z)\} \neq 0$$

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i \Delta_C \arg \{f(z)\}$$

Dividera nu ekvationen ovan med $2\pi i$ och påståendet följer.

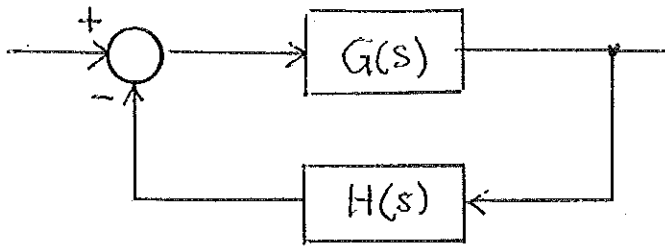
Notera att kvoten

$$N = \Delta_C \arg \{f(z)\} / (2\pi)$$

kan tolkas som hur många varv funktionen $f(z)$ "roterar" när kurvan C genomlöpes ett varv i z -planet. Vi kan skriva:

$$Z - P = N \tag{2}$$

Betrakta nu det återkopplade systemet



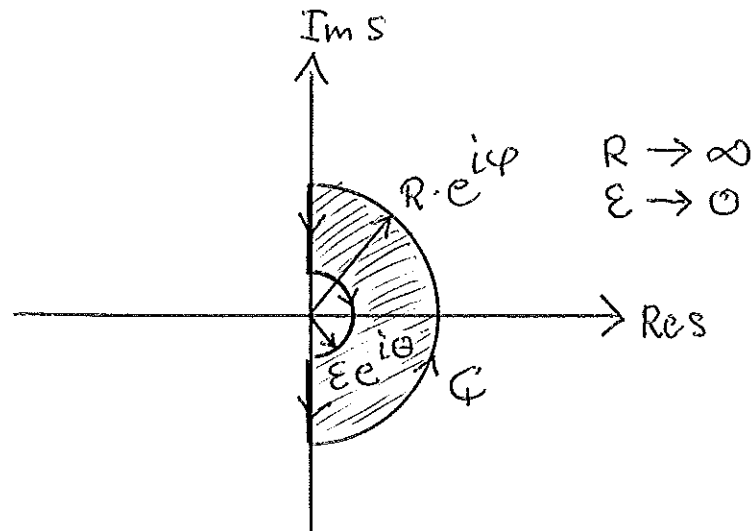
där vi definierar kretsöverföringen (= produkten av alla överföringsfunktioner i den "uppklippta" kretsen) $L(s) = G(s)H(s)$. Vi kan då skriva det återkopplade systemets karakteristiska ekvation

$$1 + G(s)H(s) = 1 + L(s) = 0 \quad (3)$$

vars lösning utgör detta systems poler. Polernas placering i det komplexa planet avgör som bekant det återkopplade systemets stabilitet.

Definiera antalet poler till funktionen $f(s) = 1 + L(s)$ som P , och antalet nollställen till $f(s)$ som Z . Vi noterar att antalet poler till $L(s)$ också är P . Konstruera en sluten dubbelpunktsfri kurva som omsluter ett enkelt sammanhängande område, så att (efter gränsövergång) hela högra komplexa s -planet innesluts av kurvan. Denna kurva, *Nyquists kontur*, löper (t ex) från origo och nedåt, lämnar imaginäraxeln utefter en halvcirkel i HHP tills imaginäraxeln åter nås och fortsätter nedåt mot origo. Eventuella poler på imaginäraxeln undviks genom små halvcirkelbågar, eftersom argumentvariationsprincipen kräver analyticitet på randen av kurvan.

Nyquists kontur



Då kurvan genomlöpes i positiv riktning ett varv i s -planet, mappas detta av funktionen $f(s)$ som "löper runt" N varv i $f(s)$ -planet (bildplanet). För att täcka in hela HHP, låter vi den stora halvcirkelns radie $\rightarrow \infty$ och på imaginäraxeln de små halvcirkelarnas radier $\rightarrow 0$.

N tolkas som det antal varv, som $f(s)$ slingrar sig runt origo i bildplanet, men då $f(s) = 1 + L(s)$ kan N lika gärna tolkas som det antal varv, som $L(s)$ slingrar sig runt punkten $-1 + i \cdot 0$ i bildplanet.

Nyquistkriteriet

Antalet poler i HHP för det återkopplade systemet = med antalet poler i HHP för kretsöverföringen $L(s)$ + antalet positiva varv som $L(s)$ gör runt punkten -1 i bildplanet, då Nyquists kontur genomlöpes ett positivt varv i s -planet, eller $Z = P + N$. (Ofta formuleras Nyquistkriteriet med negativ omloppsriktning. N blir då antal medurs omslingringar runt -1 .)

Modellosäkerhet och robusthet

Betrakta ett återkopplat system med kretsöverföring $L(s) = G(s)F(s)$, känslighetsfunktion $S(s) = 1/(1 + L(s))$ och komplementär känslighetsfunktion $T(s) = L(s)/(1 + L(s))$. Observera att S och T kan antas vara stabila system (beroende på lämpligt konstruerad regulator F) även om L (beroende på G) skulle ha poler i HHP.

Antag nu att bakom *processmodellen* G finns ett *verkligt system* G_0 som vi inte känner till. Detta beror på flera saker. Till exempel på att viss (ofta snabb) dynamik har försumrats i modellen, men även att parametrar kan vara dåligt kända. Det kan också vara så att dimensionen för ett visst system underskattas. Exempelvis kan ett experimentellt studium visa att ett system borde ha överföringsfunktionen $G(s) = 5/(1 + 2s)$, medan den bakomliggande "verkliga" processen snarare har överföringsfunktionen

$$G_0(s) = \frac{5,02 \cdot (9s + 1)}{(10s + 1)(1,8s + 1)} \approx \frac{5}{2s + 1} = G(s)$$

Vi inför den så kallade *multiplikativa osäkerhetsmodellen*:

$$G_0(s) = [1 + \Delta G(s)] \cdot G(s)$$

Vi noterar att om den *relativa modellosäkerheten* ΔG är noll, kommer modellen att överensstämma med verkligheten, dvs, $G = G_0$.

I exemplet ovan fås:

$$G_0 = \frac{5,02 \cdot (9s + 1)}{(10s + 1)(1,8s + 1)} = (1 + \Delta G) \cdot \frac{5}{1 + 2s}$$

Om man gjorde tankeexperimentet att verkligheten, dvs G_0 , var "känd", kunde osäkerheten ΔG beräknas. Man känner kanske inte verkligheten, men man har en noggrann modell därav, kallad G_0 , och vill analysera en förenklad modell G . Egentligen utgör även regulatorn F en modell av det som verkligen implementeras, F_0 , men regulatorosäkerheten är normalt mycket mindre än processosäkerheten, varför vi kan anta att $F = F_0$.

I ett enhetsåterkopplat system är det slutna systemets överföringsfunktion lika med komplementära känslighetsfunktionen T . Man kan fråga sig hur mycket T ändras beroende på osäkerhet i modellen G .

$$T = \frac{L}{1+L} \Rightarrow \frac{dT}{dL} = \frac{1}{(1+L)^2} = \frac{1}{1+L} \cdot \frac{L}{1+L} \cdot \frac{1}{L} = \frac{S \cdot T}{L}$$

Om derivatan approximeras med en differenskvot, dvs $\frac{dT}{dL} \approx \frac{\Delta T}{\Delta L}$, fås:

$$\Delta T \approx S \cdot T \cdot \Delta L / L \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = S \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

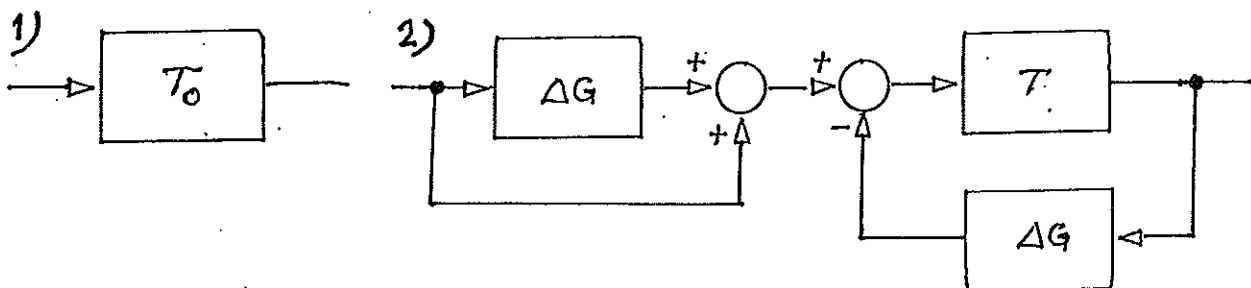
Detta innebär att relativa förändringen av slutna systemet är proportionell mot relativa förändringen av öppna systemet, med proportionalitetskonstanten S . Känslighetsfunktionen S har låga värden för låga frekvenser dvs för långsamma förändringar av L , vars förändringar beror på förändringar i processen, dvs ΔG , som normalt är mycket långsamma.

Återkopplingen gör alltså att *slutna systemet*, T , påverkas mycket *mindre* än det *öppna systemet*, L , av osäkerheten ΔG !

Betrakta det slutna systemet (dvs komplementära känslighetsfunktionen), där regulatorn F direkt påverkar processen G_0 .

$$\begin{aligned}
 T_0 &= \frac{L_0}{1+L_0} = \frac{FG_0}{1+FG_0} = \frac{F(1+\Delta G)G}{1+F(1+\Delta G)G} = \frac{\frac{FG}{1+FG}(1+\Delta G)}{1+\frac{FG}{1+FG} \cdot \Delta G} = \\
 &= \frac{\frac{L}{1+L}(1+\Delta G)}{1+\frac{L}{1+L} \cdot \Delta G} = \frac{(1+\Delta G) \cdot T}{1+T \cdot \Delta G}
 \end{aligned}$$

Vi kan nu göra följande två ekvivalenta systembeskrivningar:



Vi gör nu antagandet att relativa osäkerheten, $\Delta G(s)$, i sig är insignal-utsignalstabil, dvs har sina poler i VHP. Vi antar dessutom att $T(s)$ är ett insignal-utsignalstabil system, vilket är naturligt, då för G givet, F ju har konstruerats så att nollställena till $1 + GF$ ligger i VHP.

Om både $T(s)$ och $\Delta G(s)$ har alla sina poler i VHP, så gäller detta med nödvändighet även "kretsöverföringen" $T(s) \cdot \Delta G(s)$. Undersök genom användning av Nyquistkriteriet, stabiliteten av den återkopplade struktur, vars kretsöverföring är $T \cdot \Delta G$. Vi konstaterar först att, som konsekvens av gjorda antaganden, $P = 0$. Då stabilitetsvillkoret för det återkopplade systemet är då att samtliga nollställen till $1 + T(s) \cdot \Delta G(s)$ skall ligga i VHP, dvs att $Z = P + N = N = 0$.

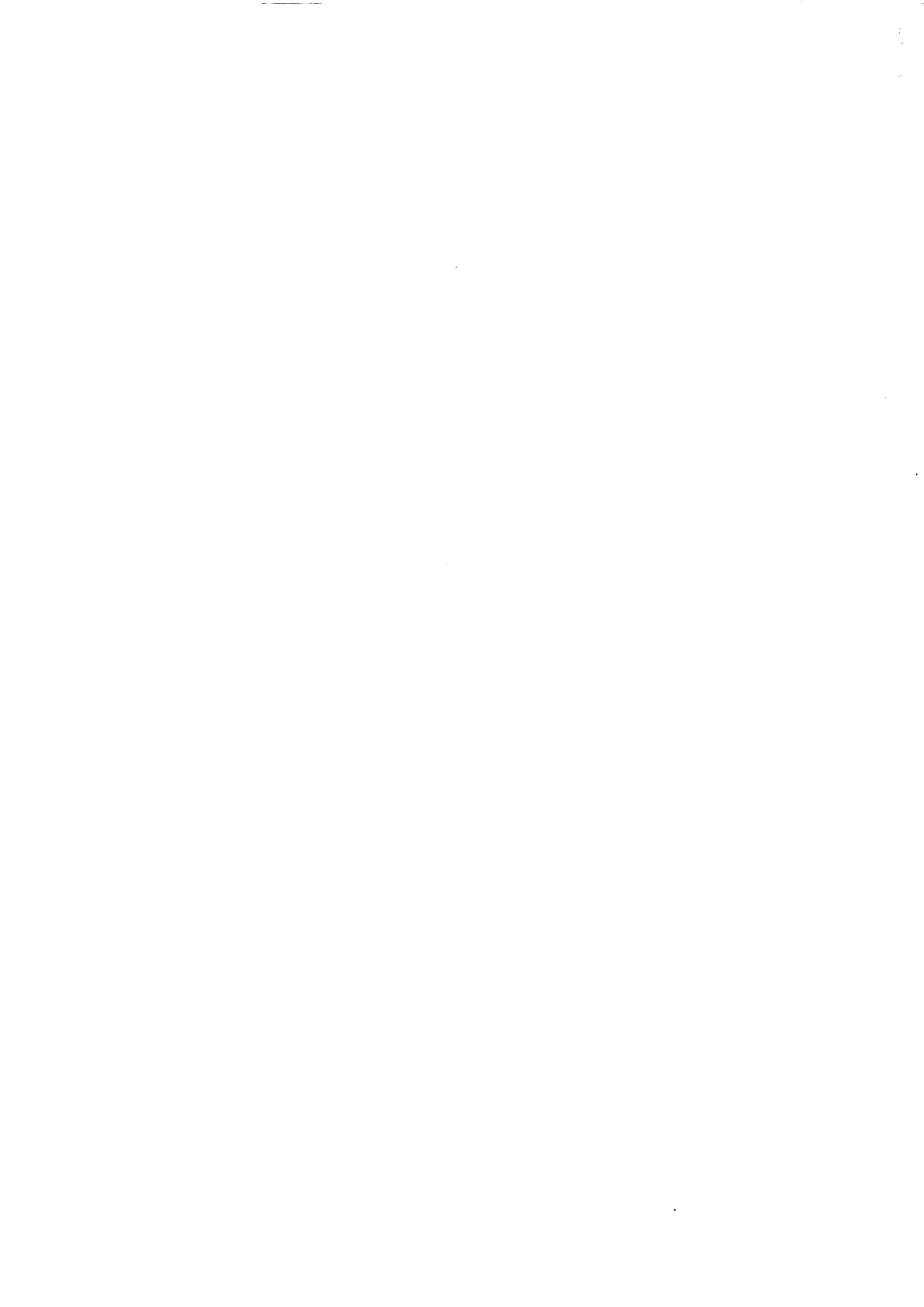
Ett tillräckligt, men inte alls nödvändigt, villkor för detta är att systemets Nyquistkurva, dvs $T(i\omega) \cdot \Delta G(i\omega)$ helt ligger inom enhetscirkeln. Då kan ju inte Nyquistkurvan skära reella axeln *till vänster om* $-1 + i \cdot 0$ i det komplexa $T \cdot \Delta G$ -planet.

Observera att kravet $|T(i\omega) \cdot \Delta G(i\omega)| \leq |T(i\omega)| \cdot |\Delta G(i\omega)| < 1, \forall \omega \geq 0$ är ett *konservativt villkor för stabilitet* hos det återkopplade systemet! Villkoret är ett specialfall av den så kallade *lågförstärkningsatsen*.

Vi har alltså fått resultatet att om relativa osäkerhetens belopp är mindre än inversen av komplementära känslighetsfunktionens belopp för alla positiva frekvenser, är det verkliga återkopplade systemet, dvs T_0 , stabilt, eller uttryckt som en olikhet:

$$|\Delta G(i\omega)| < 1 / |T(i\omega)|, \forall \omega \geq 0$$

Notera att $|T|$ ej beror på "verkligheten" G_0 utan endast på modellen $G!$



Linjär tillståndsåterkoppling

Utgångspunkten är den linjära tidsinvarianta tillståndsekvationen

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

där *tillståndet* x antas känt vid varje tidpunkt t (exempelvis genom att tillståndsvektorns samtliga komponenter kan mätas med försumbara fel).

Betrakta inledningsvis följande linjära system med tre tillståndsstorheter och två styrstorheter som ett diskussionsexempel:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Med **tillståndsåterkoppling** menas här att varje komponent i tillståndsvektorn återföres till insignalsidan genom P-regulatorer.

För att varje tillståndsstorhet skall kunna påverka varje styrstorhet, krävs lika många P-regulatorer som produkten av antalet tillståndsstorheter och antalet styrstorheter, alltså i detta fall sex stycken.

Den ekvation som knyter ihop tillståndsstorheterna med styrstorheterna (och ofta med någon referensstorhet) kallas *styrslag*, och är i exemplet:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ref1} \\ u_{ref2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Notera att de sex P-regulatorerna är ordnade i form av en *reglermatrix* L och att det minustecken som indikerar negativ återkoppling redan införts. En tillståndsåterkoppling ges då allmänt av styrslagen:

$$u = u_{ref} - Lx$$

Återkopplade systemets tillståndsekvation fås genom implementering av styrslagen i processens tillståndsekvation:

$$\dot{x} = Ax + B(u_{ref} - Lx) = (A - BL)x + Bu_{ref}$$

Polerna till återkopplade systemet är egenvärdena till matrisen $A - BL$, som precis som A har n stycken egenvärden. Om vi antar att processen är styrbar, kan egenvärdena hos $A - BL$ specificeras och erhållas genom att minst samma antal regulatorer (element i L -matrisen) bestäms. I vårt exempel har $A - BL$ tre egenvärden, medan L har sex element. Alltså kan varje val av egenvärden (poler) uppnås på ett oändligt antal sätt.

Detta är fundamentalt för *flervariabel reglering*: Enbart specifikation av egenvärden leder inte till entydig styrlag (49)! Om vi däremot betraktar det tekniskt viktiga specialfallet att styrsignalen är en skalär storhet, kommer det att krävas lika många P-regulatorer som tillståndsstorheter. Därmed blir antalet element i matrisen L lika med antalet egenvärden till matrisen $A - BL$. I själva verket råder en omvändbar entydighet mellan elementen i L och egenvärdena till $A - BL$! Att på detta sätt bestämma reglermatrisen L , som då blir en radvektor, kallas för *polplacering*.

Exempel 1 Systemet givet av tillståndsekvationen nedan, skall tillståndsåterkopplas. Bestäm reglermatrisen så att återkopplade systemets poler hamnar i $s = -1, s = -2$.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Det är lätt att se att systemet är styrbart. Vi antar styrlagen $u = \dots - Lx$:

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -(1+l_2) \end{bmatrix}$$

Egenvärdena ges av $\det(\lambda I - A + BL) = \lambda^2 + (l_2 + 1)\lambda + l_1 = 0$ men då dessa är givna fås identiteten $\lambda^2 + (l_2 + 1)\lambda + l_1 \equiv (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, där $l_1 = 2, l_2 = 2$ fås genom identifiering av polynomens koefficienter.

Ett typiskt krav på en tillståndsåterkoppling är att systemets utsignal y *stationärt* skall vara lika med ett konstant börvärde r_0 (under antagande av frihet från störningar). Vi låter därför referenssignalen u_{ref} i styrlagen vara en konstant matris L_{ref} gånger själva börvärdet r (som kan få variera i tiden). Välj L_{ref} så att noggrannhetskravet uppfylls. Utgå från återkopplade systemets tillståndsekvation och relationen $y = Cx$ (där $D = 0$):

$$\dot{x} = (A - BL)x + Bu_{ref} = (A - BL)x + BL_{ref} \cdot r$$

Efter val av L (med någon lämplig metod) är det återkopplade systemet därmed stabilt. Vi kan då tillämpa slutvärdessatsen efter ett steg i r :

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(sI - A + BL)^{-1} BL_{ref} \frac{r_0}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} C(sI - A + BL)^{-1} BL_{ref} r_0 = C(-A + BL)^{-1} BL_{ref} r_0 \equiv Ir_0 \end{aligned}$$

Resultatet fås sedan genom identifiering mellan de två sista leden:

$$L_{ref} = [C(-A + BL)^{-1} B]^{-1}$$

Notera att ovanstående resultat och härledning inte bara gäller för system där in- och utsignaler är skalära utan för flervariabla system, förutsatt att insignalen u och utsignalen y har samma antal komponenter.

Tillståndsåterkoppling med integrerande verkan

För att eliminera kvarstående fel pga stegstörningar vid processingången, är metoden med “skalning” av referensen oanvändbar, då förhållandena i den slutna kretsen inte påverkas. Man kan däremot, som vid reglering av system givna på överföringsfunktionsform, använda integrerande verkan. Detta sker genom införande av nya tillstånd. Som förut antar vi att u och y har samma dimension. Vi behandlar fallet där D -matrisen är noll:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t)$$

där $\dim\{x\} = n$ och $\dim\{u\} = \dim\{y\} = m$. Inför m nya tillståndstorheter, definierade genom tillståndsekvationerna

$$\dot{x}_{n+1}(t) = e_1(t) = r_1(t) - y_1(t)$$

$$\dot{x}_{n+2}(t) = e_2(t) = r_2(t) - y_2(t)$$

...

$$\dot{x}_{n+m}(t) = e_m(t) = r_m(t) - y_m(t)$$

Med beteckningen x_I för “tilläggsvektorn”, fås den kompakta formen:

$$\dot{x}_I(t) = e(t) = r(t) - y(t) = r(t) - Cx(t)$$

Genom kombination av de två tillståndsekvationerna fås den *utvidgade tillståndsmodellen*:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix}$$

Med de utvidgade matriserna fås en ny tillståndsmodell av ordning $n + m$. Den fortsatta designproceduren är därmed återförd på standardproblemet.

Notera att referensen inte behöver skalas för att undvika kvarstående fel efter börvärdesomställningar om integrerande verkan införes! Strukturen av tillståndsåterkoppling med integrerande verkan framgår av figuren:

Linjärkvadratisk optimering

Utgå från en linjär tidsinvariant tillståndsmodell, som vi för enkelhets skull här antar vara såväl styrbar som observerbar (“of minimal order”):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

Vi antar dessutom att insignalvektorn u och utsignalvektorn y har samma antal komponenter. Vi vill att utsignalen skall anpassas till en referens, t ex ett konstant börvärde (som då och då kan ändras). Lämplig styrlag är

$$u = L_{ref} \cdot r - L \cdot x$$

där r är referensen och x är tillståndsvektorn. I endimensionella fallet kan design av reglermatrisen L baseras på polplacering. Emellertid kan man inte vara säker på att den föreskrivna polplaceringen leder till ett önskat resultat, utan först efter datorsimulering eller/och experiment kan man vara rimligt säker. Är systemet av låg ordning är det sällan problematiskt, men om systemet t ex är av ordning 6 (som verkligen inte vore extremt), har vi alltså 6 parametrar att “skruva på” mer eller mindre på måfå. Om systemet är flervariabelt finns det dessutom oändligt många regulatorer som leder till samma polplacering. En metod som klarar flervariabla fall och som dessutom främjar systematik vid utvärdering och testsituationer är det som kallas *linjärkvadratisk optimering*.

Linjärkvadratisk optimering innebär att en *kvadratisk* kostnadsfunktional minimeras med avseende på val av reglermatrisen L , och under ett *linjärt bivillkor*, nämligen processens tillståndsekvation $\dot{x} = Ax + Bu$. Ett tänkbart sätt att formulera en sådan kostnadsfunktional vore följande:

$$J = \int_0^{\infty} [(y(t) - y_0)^2 + \rho \cdot (u(t) - u_0)^2] dt$$

Här antas y_0, u_0 vara börvärdet (dvs $r = y_0$) respektive det värde på styrsignalen som i steady state (utan störningar) krävs för att uppnå detta börvärde. I den enklaste typsituationen är börvärdet noll, och regulatorns uppgift är helt enkelt att föra tillståndsvektorn till origo (där tillståndet beroende på initialvärden $x(0) \neq 0$ eller störningar inte befinner sig). Då är följande formulering av kostnadsfunktionalen vanlig:

$$J = \int_0^{\infty} [y^2(t) + \rho \cdot u^2(t)] dt = \int_0^{\infty} [x^T(t) C^T C x(t) + \rho \cdot u^2(t)] dt$$

I detta fall gäller att reglerfelet $e = r - y = -y$ och $y^2 = e^2$. Kriteriet innebär då att det kvadratiske felet skall minimeras över tiden, samtidigt som styrsignalen även den minimeras över tiden. Genom val av den positiva konstanten ρ , som alltså är en designparameter, kan man välja hur en sådan regulator skall arbeta: Litet ρ innebär att stora styrsignaler inte så mycket påverkar J , varför svängigare reglering blir följden. Omvänt leder stort ρ till att styrningar straffas hårdare, vilket leder till mjukare och mer försiktig reglering. Det är möjligt att ersätta y i kvadrat med en allmänare viktning Q av tillståndet x . Q väljs då symmetrisk och positivt definit.

Det går att visa (hur ligger helt utanför denna kurs) att det optimala valet av reglermatrisen L är

$$L = \rho^{-1} \cdot B^T P$$

där P är den *positivt definita lösningen* till den så kallade *algebraiska Riccati-ekvationen* (ARE)

$$0 = A^T P + P A + Q - \rho^{-1} \cdot P B B^T P$$

Notera att ARE är en andragsradsekvation, där den obekanta P skall lösas ut. Det visar sig att lösningsmatrisen också är symmetrisk.

Exempel 2 Betrakta samma system som i *exempel 1*, men bestäm i stället reglermatrisen så att följande kriterium minimeras:

$$J = \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] dt \Rightarrow \rho = 1, Q = I$$

Vi ansätter en symmetrisk och positivt definit lösning till ARE, som blir

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

ARE ger ekvationssystemet : $b^2 = 1, bc = a - b, c^2 = 2(b - c) + 1$
där $a > 0, c > 0$ med nödvändighet måste gälla och där $b = 1$ eller -1 .

Antag att $b = 1$. Då gäller alltså att $c = a - 1$ och att $c^2 = 3 - 2c$. Villkoret $c > 0$ ger att $c = 1$ och därmed att $a = 2$.

Alltså är $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ vilket alltså är det optimala valet av reglermatris enligt det uppställda kriteriet.

Betrakta matrisen $A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ där båda egenvärdena $\lambda = -1$.

Det optimalt återkopplade systemet har alltså polerna $s_1 = s_2 = -1$.

Styrbarhet och observerbarhet

En viktig egenskap hos en överföringsfunktion i motsats till en tillståndsmodell är förmågan att **blockera påverkan** av vissa tillståndsvariabler. Dessutom kan **information** om systemets tillstånd **döljas**. Betrakta exempelvis följande tillståndsmodell:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \text{ och } y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

Motsvarande överföringsfunktion är:

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1}$$

Vi ser att tillståndsvariabeln x_2 varken påverkas direkt av u , eller indirekt av u via tillståndsvariabeln x_1 . Algebraiskt visar sig detta genom att en faktor i överföringsfunktionen förkortas bort, varefter systemet som ju är av andra ordningen, förefaller att vara av första ordningen. Detta leder till besvärliga problem vid konstruktion av ett reglersystem, eftersom utsignalen påverkas av ett tillstånd som inte kan styras! Man kan hoppas på att dynamiken i det icke-styrda tillståndet är så snabb, att påverkan härifrån dör ut så fort som möjligt, i detta fall som $\exp(-2t)$.

Situationen kan dock vara ännu allvarligare! Betrakta tillståndsmodellen:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \text{och} \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Motsvarande överföringsfunktion är:

$$G(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{s+1}$$

Vi ser att x_2 varken påverkas indirekt av u via x_1 . Däremot påverkas inte x_1 alls av x_2 utan enbart av u . Då utsignalen $y = x_1$, betyder det att även om både x_1 och x_2 påverkas av u , kommer resultatet av denna påverkan att delvis förbli okänt, vilket visar sig algebraiskt genom att en faktor i överföringsfunktionen förkortas bort. I detta fall kan vi däremot inte hoppas att den "mörka" tillståndsvariabeln x_2 "uppför sig snällt bakom den nerdragna gardinen". Den faktor som förkortas bort svarar mot den exponentiellt växande moden $\exp(t)$!

Slutsatsen är att även om en tillståndsmodell ger all information om systemet, innebär det en risk att helt och hållet basera konstruktionen av ett styrsystem på en överföringsfunktion beräknad ur tillståndsmodellen. **Styrbarhet** och **observerbarhet** är alltså centrala aspekter vid analys såväl som vid design.

Betrakta det linjära tidsinvarianta systemet $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$.

Def. 1 Tillståndsvektorn x^* säges vara **styrbar** om det finns en ändlig insignal, $u(t)$, som för tillståndet från origo till x^* på ändlig tid. Systemet säges vara **styrbart** om alla tillståndsvektorer är styrbara.

Def. 2 Tillståndsvektorn $x^* \neq 0$ säges vara **icke observerbar** ("tyst") om utsignalen $y(t) \equiv 0$ då initialtillståndet är x^* och insignalen $u(t) \equiv 0$. Systemet säges vara **observerbart** om det saknar icke observerbara tillståndsvektorer.

Sats 1 Mängden av styrbara tillståndsvektorer är det linjära rum som spänns av kolonnerna i matrisen (dvs dess rangrum)

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Om speciellt insignalen $u(t)$ är en skalär, gäller att systemet är styrbart precis då $\det\{S\} \neq 0$. Betrakta detta fall:

Bevis Ett tillstånd som har uppnåtts efter tiden T då $x(0) = 0$ är:

$$x(T) = \int_0^T e^{A(T-t)} Bu(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^T f_k(T-t) u(t) dt$$

Det framgår att $x(T)$ är en linjärkombination av vektorerna $A^k B$.

Sats 2 Mängden av icke observerbara tillståndsvektorer är nollrummet till matrisen

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Om speciellt utsignalen $y(t)$ är en skalär, gäller att systemet är observerbart precis då $\det\{O\} \neq 0$.

Om för $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ inga förkortningar kan ske i överföringsfunktionen $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ säges denna tillståndsmodell vara en **minimal realisering** av systemet.

Sats 3 Om $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ är både styrbart och observerbart, utgör denna tillståndsmodell en minimal realisering av systemet.

Att gå från tillståndsmodell till överföringsfunktion

Betrakta den linjära tidsinvarianta tillståndsmodellen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), x \in R^n, u \in R^m \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), y \in R^p\end{aligned}$$

Laplacetransformera dessa linjära ekvationer:

$$sX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Notera att $X(s)$ består av två termer, en som relateras till begynnelsevärdet av tillståndsvektorn och en som relateras till styrsignalen för $t > 0$. Vi intresserar oss nu för hur insignalen påverkar utsignalen i s -planet, dvs för överföringsfunktionen:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

Varför vi erhåller överföringsfunktionen

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\det(sI - A)} \cdot C \operatorname{adj}(sI - A)B + D$$

Vi betraktar nu fallet att u och y är skalärer, då C är en radvektor och B är en kolonnvektor. $\det(sI - A)$ är ett polynom av gradtal n och $\operatorname{adj}(sI - A)$ är en $n \times n$ -matris, vars element är polynom av högst gradtal $n - 1$. Detta betyder att $C \operatorname{adj}(sI - A)B$ är ett polynom av högst gradtal $n - 1$. Vi noterar att systemets poler är lösningar till ekvationen $\det(sI - A) = 0$. Lösningarna ger samtidigt egenvärdena till matrisen A .

Vi kan därför ge regeln att ett system är *insignal/utsignalstabil* om *egenvärdena* till matrisen A i tillståndsmodellen, ligger *strikt inne i det vänstra komplexa halvplanet*.

Transformation i tillståndsrummet

Betrakta återigen den linjära tidsinvarianta tillståndsmodellen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

och motsvarande överföringsfunktion

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Överföringsfunktionen G beskriver *entydigt* systemets dynamik från insignalen u till utsignalen y . Det är dock så att flera tillståndsmodeller kan beskriva samma system.

Betrakta den linjära transformationen $x = Tz$, där T är en inverterbar $n \times n$ -matris. Transformationen definierar en ny tillståndsmodell:

$$\dot{x} = T\dot{z} = ATz + Bu \Rightarrow \dot{z} = (T^{-1}AT)z + (T^{-1}B)u \text{ och } y = (CT)z + Du$$

De nya matriserna är: $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$, $\tilde{C} = CT$, $\tilde{D} = D$

Vi skall nu undersöka om den nya tillståndsmodellen beskriver samma system, och beräknar därför dess överföringsfunktion:

$$\begin{aligned}\tilde{G}(s) &= \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} = CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D = \\ &= CT[T(sI - T^{-1}AT)]^{-1}B + D = CT[sT - AT]^{-1}B + D = \\ &= CT[(sI - A)T]^{-1}B + D = CTT^{-1}(sI - A)^{-1}B + D = \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D = G(s)\end{aligned}$$

Då det finns oändligt många inverterbara $n \times n$ -matriser T , så finns alltså oändligt många tillståndsmodeller, som beskriver systemet med överföringsfunktionen G .

Att gå från överföringsfunktion till tillståndsmodell

Vi betraktar fallet att insignalen u och utsignalen y båda är skalärer, och att överföringsfunktionen kan skrivas som

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Vi kan då ange (bland oändligt många andra) två olika tillståndsmodeller, som båda motsvarar överföringsfunktionen G :

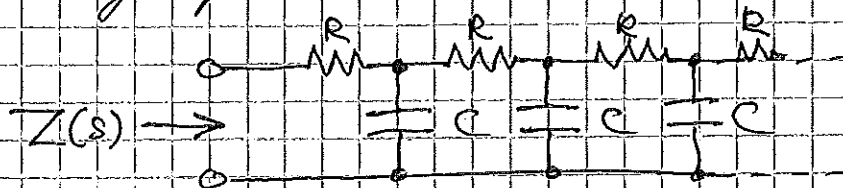
Styrbar kanonisk form

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} u, y = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n-1} \ b_n] x$$

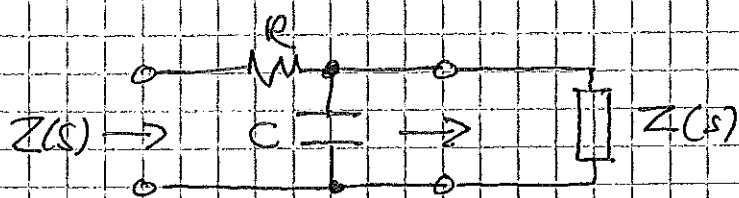
Observerbar kanonisk form

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u, y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] x = x_1$$

Vad händer om ett oerhört stort (ett uppskräpneligt oändligt) antal RC-länkar hängs på?



Om det verkligen vore oändligt många länkar (eller en miljon), spelar det ingen roll om vi lägger till en länk till, dvs



$$Z = R + \frac{\frac{1}{sC} \cdot Z}{\frac{1}{sC} + Z}$$

$$Z^2 + \frac{Z}{sC} = RZ + \frac{R}{sC} + \frac{Z}{sC}$$

$$Z^2 - RZ - \frac{R}{sC} = 0$$

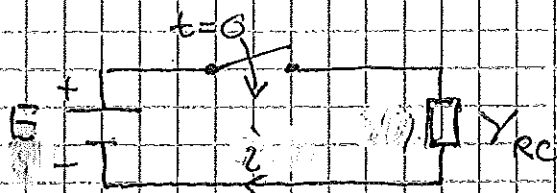
$$Z = \frac{R}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{R}{sC}} \right) = \frac{1}{Y}$$

$$Y = \frac{\sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{R}{sC}} - \frac{R}{2}}{\frac{R^2}{4} + \frac{R}{sC} - \frac{R^2}{4}} = \frac{sC}{R} \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{R}{sC}} - \frac{R sC}{2R} =$$

$$= \frac{1}{R} \left\{ R s C \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{R s C}} - \frac{R s C}{2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{R} \cdot \frac{R s C}{2} \left(\sqrt{\frac{s + 4/RC}{s}} - 1 \right) = G(s)$$

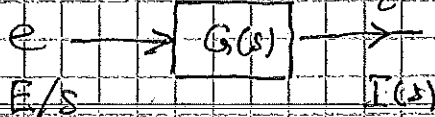
Betrakta stegsvaret:



$$I(s) = \frac{E}{R} \cdot \frac{RC}{2} \left(\sqrt{\frac{s + 4/RC}{s}} - 1 \right) = k \cdot F(s)$$

konstant

$$f(t) = \frac{2}{RC} e^{-\frac{2t}{RC}} \left[I_0\left(\frac{2t}{RC}\right) + I_1\left(\frac{2t}{RC}\right) \right]$$



$$\Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} \left(I_0\left(\frac{2t}{RC}\right) + I_1\left(\frac{2t}{RC}\right) \right)$$

Återkoppling från rekonstruerade tillstånd

Systemets och observatörens tillståndsekvationer med styrlagen införd är om vi först definierar estimeringsfelet $\tilde{x}(t)$ som

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B(L_{ref}r - L\hat{x}) = (A - BL)x + BL\tilde{x} + BL_{ref}r$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= A\hat{x} + B(L_{ref}r - L\hat{x}) + K(y - C\hat{x}) = \\ &= (A - BL)\hat{x} + BL_{ref}r + KC\tilde{x} \end{aligned}$$

Subtrahera först de två differentialekvationerna från varandra

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = (A - BL)\tilde{x}(t) + (BL - KC)\tilde{x}(t) = (A - KC)\tilde{x}(t)$$

och skriv den första och den tredje ekvationen i en "matriskostym":

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BL & BL \\ 0 & A - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BL_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} r, y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Vi beräknar det slutna systemets överföringsfunktion från $R(s)$ till $Y(s)$:

$$G(s) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A + BL & -BL \\ 0 & sI - A + KC \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} BL_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Man kan beräkna inversen för kvadratiska matriser direkt i termer av deras undermatriser och deras inverser. Så till exempel är, förutsatt att A och C är inverterbara matriser:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

Om detta resultat tillämpas på (7) erhålles:

$$G(s) = C(sI - A + BL)^{-1} BL_{ref} \quad (4)$$

Observera att observatörspolerna, som ju är egenvärden till $A - KC$, inte påverkar överföringsfunktionen $G(s)$ och dess egenskaper. Däremot påverkar observatörspolerna systemets *interna stabilitet*, vilket kräver att nedanstående matris har alla egenvärden strikt inne i vänstra halvplanet:

$$\begin{bmatrix} A - BL & BL \\ 0 & A - KC \end{bmatrix}$$

Tidsdiskretisering av kontinuerlig regulator

Betrakta exempelvis PI-regulatorn:

$$U(s) = F(s)E(s) = \sigma \left(1 + \frac{1}{\tau s} \right) E(s)$$

Ställ upp en tillståndsmodell av regulatorn med insignalen e (reglerfelet) och utsignalen u (styrningen):

$$X(s) = E(s) / s \Rightarrow \dot{x}(t) = e(t) \Rightarrow A = 0, B = 1$$

$$U(s) = \sigma \cdot E(s) + \frac{\sigma}{\tau} \cdot X(s) \Rightarrow u(t) = \frac{\sigma}{\tau} \cdot x(t) + \sigma \cdot e(t)$$

Med övergångsmatris $\Phi(t) = e^{At} \equiv 1$ blir tillståndsekvationens lösning:

$$x(t) = \Phi(t)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-r)Be(r)dr = x(t_0) + \int_{t_0}^t e(r)dr$$

Låt $t = kh$, $t_0 = kh - h$ och låt dessutom felsignalen vara konstant inom ett samplingsintervall, dvs att $e(r) \equiv e(kh - h)$, $kh - h \leq r < kh$. Då fås:

$$\begin{aligned} x(kh) &= x(kh - h) + h \cdot e(kh - h) \\ u(kh) &= (\sigma / \tau) \cdot x(kh) + \sigma \cdot e(kh) \end{aligned}$$

Eftersom alla tider är antingen kh eller $kh - h$ kan ekvationerna anges med samplingsintervallet som tidsenhet

$$\begin{aligned}x(k) &= x(k-1) + h \cdot e(k-1) \\u(k) &= (\sigma/\tau) \cdot x(k) + \sigma \cdot e(k)\end{aligned}$$

ett resultat som direkt kodas i datorn.

Vi kan nu övergå till tidsdiskreta överföringsfunktioner genom Z-transformering av ekvationerna. Om $Z\{y(k-1)\} = Z\{y(k)\}/z = Y(z)/z$ fås alltså (efter multiplikation med z) $zX(z) = X(z) + hE(z)$, vilket ger:

$$U(z) = \sigma \left[1 + \frac{h/\tau}{z-1} \right] E(z)$$

Vi ser att förstärkningen är samma som i tidskontinuerliga fallet, medan integrationstiden skalats med samplingsintervallet.

Exempel 1 Bestäm en samplad överföringsfunktion till följande system:

$$G(s) = v/(s+v)$$

Skriv på tillståndsform: $\dot{x}(t) = -vx(t) + vu(t) \Rightarrow \Phi(t) = e^{At} = e^{-vt}$. Tillståndsekvationens lösning skrivs med hjälp av övergångsmatrisen:

$$\begin{aligned}x(k) &= e^{-vh} x(k-1) + \int_{kh-h}^{kh} e^{-vkh+vt} \cdot v \cdot u(k-1) dt = \\ &= e^{-vh} x(k-1) + (1 - e^{-vh}) u(k-1)\end{aligned}$$

Z-transformering ger:

*sompletta
överföringsfun*

$$G(z) = \frac{1 - e^{-vh}}{z - e^{-vh}} = \frac{b(h)}{z - a(h)}$$

Z-transformen av en tidsdiskret funktion f definieras som serien

$$Z\{f(k)\} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + f(3)z^{-3} + \dots$$

Man ser att Z-transformen av ett tidsdiskret steg vid $k = 0$ är $1/(z-1)$ och för en tidsdiskret enhetspuls vid $k = 0$ är 1. Man kan då på samma sätt som i tidskontinuerliga system beräkna stegsvar och pulssvar. Med viktsfunktionen i det tidsdiskreta fallet avses inversa Z-transformen till utsignalen från $G(z)$ då insignalen är en enhetspuls vid $k = 0$, dvs att

viktsfunktionen

$$g(k) = Z^{-1}\{G(z) \cdot 1\} = Z^{-1}\{G(z)\}$$

Om vi betraktar fallet med distinkta poler på reella axeln, kan efter partialbråksutveckling, överföringsfunktionen skrivas som

$$\begin{aligned} G(z) &= \dots + \frac{b}{z-a} + \dots = \dots + \frac{b}{z} \left[1 + \frac{a}{z} + \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \dots \right] + \dots = \\ &= \dots + bz^{-1} Z\{a^k\} + \dots \end{aligned}$$

Viktfunktionen kan då skrivas som $g(k) = \dots + b \cdot a^{k-1} + \dots$. Betrakta bidraget till g i mitten som funktion av diskret tid k genom tabellen:

$$g(0) = \frac{b}{a} \cdot 1, g(1) = \frac{b}{a} \cdot a, g(2) = \frac{b}{a} \cdot a^2, \dots, g(k) = \frac{b}{a} \cdot a^k, \dots$$

Man finner att talföljden divergerar om $|a| > 1$, medan den konvergerar om $|a| < 1$. Man drar då slutsatsen att om samtliga termer i den summa som utgör viktfunktionen g , var för sig konvergerar, är systemet insignal/utsignalstabil. Analogt med tidskontinuerliga system fås resultatet att

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| < \infty \Leftrightarrow \text{insignal/utsignalstabil system}$$

Man finner att om samtliga distinkta reella poler i en överföringsfunktion är till beloppet mindre än 1, är systemet insignal/utsignalstabil. Man kan visa att **om samtliga poler** i en överföringsfunktion (inte nödvändigtvis vare sig reella eller distinkta) **till beloppet är mindre än 1** är detta system **insignal/utsignalstabil**. Dvs, enhetscirkeln i det komplexa z -planet för tidsdiskreta system har motsvarande betydelse som imaginäraxeln i det komplexa s -planet för tidskontinuerliga system. Enhetscirkeln kan mappas från z -planet till s -planet genom den konforma avbildningen

$$z = \frac{1+s}{1-s} \Leftrightarrow s = \frac{z-1}{z+1}$$

vilket enkelt visas genom att (på enhetscirkeln) $z = e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < \pi$

$$s = \dots = \frac{i\varphi}{2} = \frac{i \sin \varphi/2}{\cos \varphi/2} = i \tan \varphi/2$$

Exempel 2 Betrakta ett rent integrerande system, $G(z) = 1/(z-1)$ som skall PI-regleras, dvs med regulatorn $F(z) = a + b/(z-1)$. Ange i ett ab -plan vilka regulatorinställningar som leder till ett stabilt återkopplat system. Karakteristiska ekvationen blir i detta fall:

$$L(z) + 1 = \frac{(z-1)a + b}{(z-1)^2} + 1 = 0$$

$$z^2 + (a-2)z + b - a + 1 = 0$$

Gör en Möbiustransformation $z = (1+w)/(1-w)$:

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + (a-2)\left(\frac{1+w}{1-w}\right) + b - a + 1 = 0$$

Efter förenkling fås KE $(4-2a+b)w^2 + 2(a-b)w + b+1 = 0$, där (enligt Routh's kriterium) koefficienterna måste vara strikt positiva, dvs

$$2a - b < 4, a - b > 0, b > -1$$

