MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2013-08-29
Skrivtid: 8.30 - 13.30
Telefon: Cornelia Jareteg 0703-088304

Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt "Några tips om Fourierserier m.m. i BETA" (två sidor).
Maxpoäng står inom parentes efter varje uppgift, med summa 52.
Betygsgränser: Betyg 3: 25, betyg 4: 33, betyg 5: 41.
Svar i form av svårberäknade integraluttryck kan i vissa fall accepteras eller åtminstone ge poäng.

1. Lös problemet

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < 2, \ \ t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, \ \ u_x(2,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \cos \pi x, & 0 < x < 2 \\ u_t(x,0) = x^2, & 0 < x < 2. \end{cases}$$

(8)

2. Definiera

$$f(t) = \int_{-1}^{1} \sqrt{|x|}\, e^{2ixt}\, dx.$$

Bestäm $\int_0^\infty f(t)^2\, dt$ och $f''(0)$. (5+3)

3. Bestäm en lösning $u = u(x,t)$ till ekvationen

$$u_t = u_{xx} - u$$

för $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, med $u(x,0) = 1$ för $|x| < a$ och $u(x,0) = 0$ för $|x| > a$. Här är $a > 0$ en konstant. (8)

4. Låt N och μ vara naturliga tal med $1 \leq \mu < N$. Betrakta den ändliga följden $a = (a_n)_{n=0}^{N-1}$ given av att $a_\mu = 1, \ \ a_{\mu-1} = -1$ och övriga $a_n = 0$.
   (a) Vad är den diskreta Fouriertransformen av följden a? Det är valfritt att använda kursbokens definition av den diskreta Fouriertransformen eller den något avvikande i BETA.
   (b) Ge speciellt ett enkelt uttryck för absolutbeloppen av denna Fouriertransforms värden.
   (c) Beräkna
   $$\sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{\pi k}{N},$$
   t.ex. med hjälp av (a) och (b). (3+1+4)

5. Bestäm en lösning $u(x, y, t)$ till vågekvationen $u_{tt} = c^2 \Delta u$ i cirkelskivan $x^2 + y^2 < R_0^2$, för $t > 0$. Här är $R_0 > 0$ en konstant. Lösningen skall uppfylla randvillkoret $u_r(x, y, t) = 0$ på randen $x^2 + y^2 = R_0^2$ för alla $t > 0$, där u_r är derivatan i den radiella riktningen. Initialvillkoren är $u(x, y, 0) = y^2$ och $u_t(x, y, 0) = 0$. (10)

6. Formulera och bevisa satsen som ger Fourierserien för en primitiv funktion till funktionen f med Fourierserien $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. (5)

7. Förklara på vilket sätt en partialsumma av en funktions Fourierserie är den bästa approximationen av funktionen. (5)

MATEMATISKA VETENSKAPER Datum: 2013-08-29
Chalmers

LÖSNINGAR TILL
tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Uppgift 1.
Ekvationen och randvillkoren är homogena, och det är bäddat för variabelseparation. Då söker vi först funktioner av formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ som satisfierar ekvationen och uppfyller randvillkoren (men inte initialvillkoren). Detta är ett standardfall. Som vanligt får man ur ekvationen att $X'' = \lambda X$ och $T'' = c^2\lambda T$ för någon konstant λ. Randvillkoren ger att $X' = 0$ i ändpunkterna 0 och 2. Då vet vi att man får cosinusfunktioner, mera precis att $\lambda = -n^2\pi^2/4$ och att $X(x)$ är (proportionell mot) $\cos\frac{n\pi x}{2}$, för något $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vi ser också att $T(t)$ måste vara en linjärkombination av $\cos\frac{nc\pi t}{2}$ och $\sin\frac{nc\pi t}{2}$, utom då $n = 0$ som i stället ger en linjärkombination av 1 och t.

För att få en lösning till hela problemet ansätter vi därför

$$(1) \quad u(x,t) = a_0 + b_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{2}\left(a_n\cos\frac{nc\pi t}{2} + b_n\sin\frac{nc\pi t}{2}\right).$$

Det återstår nu att bestämma koefficienterna här så att u också uppfyller de två initialvillkoren. Det första ger

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{2} = \cos\pi x, \quad 0 < x < 2.$$

Eftersom högerledet här återfinns i en av termerna i vänsterledet, kan vi direkt läsa av att $a_2 = 1$ och att $a_n = 0$ för övriga n.

Det andra initialvillkoret ger

$$b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc\pi}{2} b_n \cos \frac{n\pi x}{2} = x^2, \quad 0 < x < 2.$$

Vi utvecklar högerledet här i cosinusserie i $(0, 2)$. Enligt BETA 13.1(13) är

$$t^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{L}, \quad |t| < L.$$

Välj nu $L = 2$ och ersätt t med x. Då fås

$$b_0 = \frac{4}{3} \qquad \text{och} \qquad b_n = (-1)^n \frac{32}{\pi^3 c n^3}, \;\; n = 1, 2, \ldots.$$

Lösningen u blir alltså (1) med dessa koefficienter.

Uppgift 2.

Observera först att $f(t)$ är Fouriertransformen, tagen i punkten $-2t$, av funktionen $g(x) = \sqrt{|x|}\, \chi_{(-1,1)}$, alltså $f(t) = \hat{g}(-2t)$. Eftersom g är jämn, har man också

$$f(t) = \int_{-1}^{1} \sqrt{|x|}\, (\cos 2xt + i \sin 2xt)\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{|x|}\, \cos 2xt\, dx.$$

Detta visar att f är reellvärd och dessutom jämn. Därför får man

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t)^2\, dt &= \int_0^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(-2t)|^2\, dt = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(t')|^2\, dt', \end{aligned}$$

det sista med en enkel variabeltransformation. Nu kan vi använda Plancherels sats, som ger

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(t')|^2\, dt' = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\, dx = 2\pi \int_{-1}^{1} |x|\, dx = 2\pi.$$

Svaret på den första frågan blir alltså

$$\int_0^{\infty} f(t)^2\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

För andraderivatan ser vi först att $f''(t) = 4\hat{g}''(-2t)$, där vi menar andraderivatan av Fouriertransformen av g, tagen i punkten $-2t$. Den andraderivatan är ju Fouriertransformen av funktionen $-x^2 g(x) = -|x|^{5/2}\,\chi_{(-1,1)}$ och har i punkten 0 värdet

$$-\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{5/2}\,\chi_{(-1,1)}\,dx = -2\int_0^1 x^{5/2}\,dx = -\frac{4}{7}.$$

Det följer att

$$f''(0) = -\frac{16}{7}.$$

Anm. Den sökta andraderivatan kan man också få genom att helt enkelt derivera under integraltecknet i definitionen av f, med avseende på t, och sen sätta $t = 0$.

Uppgift 3.
Vi söker Fouriertransformen i x-variabeln av u, betecknad $U(\xi, t)$. Ekvationen blir då

$$U_t = -\xi^2 U - U.$$

För varje fixt ξ har denna ekvation lösningarna

$$U(\xi, t) = A(\xi)e^{-(1+\xi^2)t},$$

med en ξ-beroende konstant A.

Initialvärdena för u är givna av funktionen $\chi_{(-a,a)}$, vars Fouriertransform är $2\,\frac{\sin a\xi}{\xi}$, enligt tabell (BETA 13.2 F50) eller direkt uträkning. Man får alltså $U(\xi, 0) = 2\,\frac{\sin a\xi}{\xi}$. Därför är $A(\xi) = 2\,\frac{\sin a\xi}{\xi}$ och

$$U(\xi, t) = 2\,\frac{\sin a\xi}{\xi}\,e^{-(1+\xi^2)t}.$$

I detta uttryck fixerar vi t och söker den inversa Fouriertransformen. Som funktion av ξ är uttrycket produkten av konstanten e^{-t} och de två funktionerna $2\,\frac{\sin a\xi}{\xi}$ samt $e^{-\xi^2 t}$. Dessa två är Fouriertransformerna av $\chi_{(-a,a)}$ resp. $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t}$, det senare enligt BETA 13.2 F37. Det betyder att u ges av en faltning i x-variabeln:

$$u = e^{-t}\,\chi_{(-a,a)} * \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}\right),$$

eller utskrivet

$$u(x,t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-a}^{a} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,dy = \frac{e^{-t}}{\sqrt{4\pi t}}\int_{x-a}^{x+a} e^{-\frac{z^2}{4t}}\,dz.$$

Längre kommer man inte, integralen här kan inte beräknas explicit (men däremot uttryckas med hjälp av funktionen erf, om man vill).

Uppgift 4.

(a) Vi väljer den diskreta Fouriertransformen enligt kursboken och får för $m = 0, 1, \ldots, N-1$

$$\hat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-\frac{2i\pi mn}{N}} = e^{-\frac{2i\pi m\mu}{N}} - e^{-\frac{2i\pi m(\mu-1)}{N}}.$$

Här är det givande att bryta ut $e^{-2i\pi m(\mu-1/2)/N}$ (som är det geometriska medelvärdet av de två termerna), eftersom man får

$$\hat{a}_m = e^{-\frac{2i\pi m(\mu-1/2)}{N}}\,(e^{-\frac{i\pi m}{N}} - e^{+\frac{i\pi m}{N}}) = -2i\,e^{-\frac{2i\pi m(\mu-1/2)}{N}}\,\sin\frac{\pi m}{N}.$$

(b) Härav ser man att

$$|\hat{a}_m| = 2\left|\sin\frac{\pi m}{N}\right|.$$

(c) Parsevals ekvation säger att $N^{-1}\sum|\hat{a}_m|^2 = \sum|a_m|^2$ och ger i detta fall

$$4N^{-1}\sum_{m=0}^{N-1}\sin^2\frac{\pi m}{N} = 2.$$

Eftersom termen med $m = 0$ är 0, så blir svaret på (c)-delen

$$\sum_{m=1}^{N-1} \sin^2 \frac{\pi m}{N} = \frac{N}{2}.$$

Anm. 1. Med BETA:s definition av den diskreta Fouriertransformen får man en extra faktor $1/N$ i svaren på (a) och (b), men naturligtvis samma svar på (c), eftersom Parsevals ekvation ser något annorlunda ut. Se upp med att den diskreta Fouriertransformen i BETA:s definition och tabell tas i en punkt betecknad μ. Detta μ får inte blandas ihop med det μ som finns i problemtexten, en olycklig beteckningskollision.

Anm. 2. Det går också att lösa (c)-delen genom att helt enkelt utveckla kvadraterna $(e^{\frac{i\pi m}{N}} - e^{-\frac{i\pi m}{N}})^2$ och summera geometriska serier.

Uppgift 5.
Vi använder polära koordinater r, θ i stället för x, y, så att $u = u(r, \theta, t)$ och $\Delta u = u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta}$. Då blir randvillkoret $u_r(R_0, \theta, t) = 0$ och initialvillkoren $u(r, \theta, 0) = r^2 \sin^2 \theta$ och $u_t(r, \theta, 0) = 0$. Vågekvationen och randvillkoret är båda homogena, så man kan variabelseparera direkt. Vi söker alltså lösningar till vågekvationen med randvillkoret, av formen

$$u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t).$$

På vanligt sätt får vi

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Denna kvantitet måste vara konstant, säg λ. Det betyder $T'' = c^2\lambda T$ och

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} - \lambda r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Även den här kvantiteten är konstant. Eftersom Θ är 2π-periodisk, måste denna konstant vara n^2 för något $n \in$

$\{0, 1, 2, \dots\}$, och Θ är av formen

$$\Theta(\theta) = a \cos n\theta + b \sin n\theta.$$

För R har vi ekvationen

$$r^2 R'' + rR' - \lambda r^2 R - n^2 R = 0,$$

och R skall uppfylla randvillkoret, som nu blir $R'(R_0) = 0$. Dessutom måste R vara begränsad vid 0.

Om $\lambda > 0$, säg $\lambda = \mu^2$ där $\mu > 0$, har vi den modifierade Besselekvationen, med lösningar $R(r) = \alpha I_n(\mu r) + \beta K_n(\mu r)$. Här förkastar vi K_n-termen eftersom den är obegränsad vid 0. Då återstår I_n, vars derivata inte har något nollställe på $\mathbb{R}_+$. Positiva λ ger därför inga lösningar $R(r)$.

För $\lambda = 0$ får vi en Eulerekvation. Med den vanliga ansatsen $R = r^\gamma$ finner vi att dess lösningar är $\alpha r^n + \beta r^{-n}$ då $n > 0$ och $\alpha + \beta \ln r$ då $n = 0$. I båda fallen är den andra termen obegränsad vid 0 och förkastas. Den första termens derivata skall då ha ett nollställe i R_0. För $n > 0$ betyder det $\alpha = 0$, och alltså bara 0-lösningen. Men för $n = 0$ är alla konstanter lösningar. I det fallet, alltså $\lambda = n = 0$, är både $\Theta(\theta)$ och $R(r)$ konstanter, och för T får man ekvationen $T'' = 0$, med förstagradspolynom som lösningar. Det betyder att vi har separerade lösningar $u = \alpha + \beta t$.

Om slutligen $\lambda < 0$, säg $\lambda = -\mu^2$ med $\mu > 0$, har vi den vanliga Besselekvationen för R. Dess lösningar är $R(r) = \alpha J_n(\mu r) + \beta Y_n(\mu r)$. Här förkastar vi Y_n, som är singulär vid 0. Då ger randvillkoret i R_0 att $J_n'(\mu R_0) = 0$, så att $\mu = \lambda_{kn}/R_0$ för något $k = 1, 2, \dots$, där $(\lambda_{kn})_{k=1}^\infty$ betecknar nollställena till J_n' i $\mathbb{R}_+$. Alltså får vi lösningar $R(r) = J_n(\lambda_{kn} r/R_0)$, med $\lambda = -\lambda_{kn}^2/R_0^2$.

Ekvationen för T blir nu

$$T'' = -\frac{c^2 \lambda_{kn}^2}{R_0^2} T,$$

med lösningar

$$T(t) = \alpha \cos \frac{c\lambda_{kn}}{R_0} t + \beta \sin \frac{c\lambda_{kn}}{R_0} t.$$

Vi har nu funnit de separerade lösningar vi sökte, nämligen

$$J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{R_0}r\right)(a\cos n\theta + b\sin n\theta)\left(\alpha\cos\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}t + \beta\sin\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}t\right),$$

där $k = 1, 2, \ldots$ och $n = 0, 1, 2, \ldots$, samt förstås multipler av dessa. Dessutom gav fallet $\lambda = n = 0$ de separerade lösningarna $\alpha + \beta t$. De uppfyller alla randvillkoret.

Nu ansätter vi den sökta lösningen u som en oändlig linjärkombination av dessa separerade lösningar, alltså

$$\begin{aligned}(2)\quad u(r,\theta,t) &= \alpha + \beta t\\ &+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{R_0}r\right)(a_{kn}\cos n\theta + b_{kn}\sin n\theta)\\ &\times\left(\alpha_{kn}\cos\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}t + \beta_{kn}\sin\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}t\right).\end{aligned}$$

Slutligen skall vi bestämma koefficienterna här så att initialvillkoren blir uppfyllda. Vi sätter alltså $t = 0$ i (2), även efter derivering med avseende på t. Det ger

$$(3)\quad \alpha + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{R_0}r\right)\alpha_{kn}(a_{kn}\cos n\theta + b_{kn}\sin n\theta) = r^2\sin^2\theta$$

och

$$(4)\quad \beta + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{R_0}r\right)\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}\beta_{kn}(a_{kn}\cos n\theta + b_{kn}\sin n\theta) = 0.$$

Eftersom ekvationen (4) har 0 i högerledet, sätter vi helt enkelt $\beta = 0$ och alla $\beta_{kn} = 0$. Då blir (4) uppfylld, och dessa koefficienter förekommer inte i (3). Nu går vi tillbaka till (2) och ser att av den sista faktorn återstår bara $\alpha_{kn}\cos\frac{c\lambda_{kn}}{R_0}t$. Därför kan koefficienten α_{kn} absorberas i a_{kn} och b_{kn}, dvs. vi kan sätta $\alpha_{kn} = 1$ i (2) och (3). (I själva verket kunde vi redan tidigare ha sett att T-faktorn i de separerade lösningarna inte kan inehålla någon sinusterm i t, eftersom det andra initialvillkoret är homogent. På samma sätt kunde man se att β måste vara 0 i fallet med $\alpha + \beta t$.)

Vi bortser alltså från faktorn α_{kn} i (3) och ser att högerledet är lätt att utveckla i Fourierserie; man skriver $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$. Därför har vi i vänsterledet i (3) termer bara för $n = 0$ och $n = 2$. Vi kan avläsa att för $n = 0$

$$\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\lambda_{k0}}{R_0} r\right) a_{k0} = r^2/2$$

och för $n = 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_2\left(\frac{\lambda_{k2}}{R_0} r\right) a_{k2} = -r^2/2$$

medan $a_{kn} = 0$ för $n \neq 2$, och alla $b_{kn} = 0$.

Dessa ekvationer är utvecklingar i ortogonalsystem av Besselfunktioner. För $n = 2$ bildar funktionerna $J_2\left(\frac{\lambda_{k2}}{R_0} r\right)$ ett fullständigt ortogonalsystem i det viktade rummet $L^2_r(0, R_0)$, och för $n = 0$ gäller detsamma för $J_0\left(\frac{\lambda_{k0}}{R_0} r\right)$ om vi tillfogar den konstanta funktionen 1. Detta framgår av BETA 12.4 sid 276, (ii) resp. (iii), som även ger normeringskonstanterna. Vårt n motsvarar p i BETA, med värdena 2 resp. 0, och c i (ii) har värdet 0.

Vi får därför i fallet $n = 2$

$$a_{k2} = -\frac{\lambda_{k2}^2}{R_0^2(\lambda_{k2}^2 - 4) J_2(\lambda_{k2})^2} \int_0^{R_0} r^2 J_2\left(\frac{\lambda_{k2}}{R_0} r\right) r\, dr$$

för $k = 1, 2, \ldots$. I fallet $n = 0$ har man

$$\alpha = \frac{1}{R_0^2} \int_0^{R_0} r^3\, dr$$

och

$$a_{k0} = \frac{1}{R_0^2 J_0(\lambda_{k0})^2} \int_0^{R_0} r^2 J_0\left(\frac{\lambda_{k0}}{R_0} r\right) r\, dr$$

för $k = 1, 2, \ldots$. Svaret på uppgiften blir

$$u(r, \theta, t) = \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k0}\, J_0\left(\frac{\lambda_{k0}}{R_0} r\right) \cos \frac{c\lambda_{k0}}{R_0} t$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} a_{k2}\, J_2\left(\frac{\lambda_{k2}}{R_0} r\right) \cos 2\theta \cos \frac{c\lambda_{k2}}{R_0} t,$$

med ovanstående värden på α och a_{k0} och a_{k2}.