MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2013-03-15
Telefon: Elin Solberg
0703-088304
Skrivtid: 8.30 - 13.30

Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt “Några tips om Fourierserier m.m. i BETA” (två sidor).
Maxpoäng står inom parentes efter varje uppgift, med summa 62.

1. Bestäm en lösning $u = u(x, t)$ till den inhomogena värmeledningsekvationen
$$u_t - ku_{xx} = x$$
för $0 < x < \ell,\ \ t > 0$ med villkoren $u(0, t) = 0$ och $u(\ell, t) = 1$ för $t > 0$ samt $u(x, 0) = 0$ för $0 < x < \ell$. Här är $k > 0$ en konstant. (8)

2. Ett linjärt, tidsinvariant dynamiskt system svarar med utsignalen $i\omega e^{-\omega^2+i\omega t}$ på insignalen $e^{i\omega t}$, för varje $\omega \in \mathbb{R}$.
(a) Vad är impulssvaret?
(b) Är systemet kausalt?
(c) Vad blir svaret på insignalen $\chi_{(-3,3)}$, alltså på den signal som tar värdet 1 mellan -3 och 3 och värdet 0 i andra punkter? (4+2+2)

3. Lös vågekvationen $u_{tt} = c^2u_{xx}$ i området $x > 0,\ t > 0$ med randvärden $u(0, t) = t^3$ och initialvillkor $u(x, 0) = 0$ samt $u_t(x, 0) = 0$. Här är $c > 0$ en konstant. (8)

4. Betrakta Sturm-Liouville-problemet
$$(x^2 f')' - f + \lambda f = 0$$
i intervallet $[1, 2]$ med randvillkoren $f(1) = 0$ och $f'(2) = 0$. Bestäm problemets egenfunktioner. (9)

5. Beräkna för en konstant b med $0 < b < \pi$ summan
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 bn}{n^2},$$
förslagsvis med hjälp av Fourierserier. (8)

6. Bestäm en lösning $u = u(x, y, z)$ till Dirichlets problem $\Delta u = 0$ i den cylinder som definieras av $x^2 + y^2 < R_0^2,\ 0 < z < \ell$, med randvärdena $u(x, y, 0) = 0$ och $u(x, y, \ell) = x + y$ samt $u(x, y, z) = 0$ för $x^2 + y^2 = R_0^2$. Svaret får innehålla svårberäknade integraler. (9)

7. Formulera och bevisa ortogonalitetsrelationen mellan två olika Hermitepolynom. (6)

8. Beskriv hur Fouriertransformen kan approximeras med den diskreta Fouriertransformen, för en lämplig funktion. Beskriv också hur Fouriers inversionsformel approximeras av inversionsformeln för den diskreta Fouriertransformen. Det är valfritt att använda kursbokens definition av den diskreta Fouriertransformen eller den något avvikande i BETA. (3+3)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers Datum: 2013-03-15

LÖSNINGAR TILL
tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Uppgift 1.

Det finns två inhomogeniteter i problemet, termen x i ekvationen och randvärdet 1 för $x = \ell$. Eftersom båda är oberoende av t, kan steady state-metoden användas. Den innebär att man bestämmer en funktion $u_0(x)$ av enbart x som skall uppfylla både ekvationen och de givna randvillkoren för $x = 0$ och $x = \ell$. Det betyder

$$-ku_0''(x) = x \quad \text{och} \quad u_0(0) = 0 \quad \text{och} \quad u_0(\ell) = 1.$$

Två integrationer ger att $u_0(x) = -x^3/6k + ax + b$, och randvillkoren medför $b = 0$ och $a = \ell^{-1} + \ell^2/6k$. Alltså är

$$u_0(x) = \left(\frac{1}{\ell} + \frac{\ell^2}{6k}\right) x - \frac{1}{6k}\, x^3.$$

Vi söker nu en lösning till problemet av formen $u(x,t) = v(x,t) + u_0(x)$. Instoppat i ekvationen ger det

$$v_t(x,t) + 0 - kv_{xx}(x,t) - ku_0''(x) = x,$$

och för v får vi därför den homogena värmeledningsekvationen $v_t(x,t) - kv_{xx}(x,t) = 0$. Randvillkoren för v blir också homogena, $v(0,t) = 0$ och $v(\ell,t) = 0$. Initialvillkoret blir $v(x,0) = -u_0(x)$. För v har vi nu ett standardproblem för variabelseparation, och vi vet att de separabla lösningarna till ekvationen med randvillkoren är

$$\sin\frac{n\pi x}{\ell}\, e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Ansatsen blir därför

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\, e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t},$$

och initialvillkoret medför att

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = \frac{1}{6k}\, x^3 - \left(\frac{1}{\ell} + \frac{\ell^2}{6k} \right) x, \qquad 0 < x < \ell.$$

Vi behöver alltså utveckla funktionerna x^3 och x i sinusserie i intervallet, och det gör vi med hjälp av BETA 13.1 (14) och (12), med $L = \ell$. Detta ger efter lite förenklingar

$$b_n = \frac{2(-1)^n}{\pi} \left(\frac{1}{n} + \frac{\ell^3}{\pi^2 k n^3} \right).$$

Resultatet av det hela blir

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{\ell} + \frac{\ell^2}{6k} \right) x - \frac{1}{6k}\, x^3 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

med dessa b_n.

Anm. 1 De givna randvärdena har en diskontinuitet i hörnet $(1,0)$. I den punkten kan man därför inte vänta sig att lösningen skall ha något gränsvärde.

Anm. 2 Att i stället angripa problemet genom att Laplacetransformera i t-variabeln är inte att rekommendera, eftersom det leder till en besvärlig invers Laplacetransform.

Uppgift 2.
(a) Om h är systemets impulssvar, är svaret på insignalen $e^{i\omega t}$ alltid $\hat{h}(\omega)e^{i\omega t}$. I vårt fall ger detta $\hat{h}(\omega) = i\omega e^{-\omega^2}$. För att finna den inversa Fouriertransformen av detta uttryck observerar vi att $e^{-\omega^2}$ är Fouriertransformen av $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-t^2/4}$. Därför är

$$h(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} e^{-t^2/4} = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\, t e^{-t^2/4},$$

som alltså är svaret på fråga (a).

Anm. Ofta räknar man ut systemfunktionen $\hat{h}$ som kvoten mellan *Fouriertransformerna* av en utsignal och motsvarande insignal. Men här går detta inte bra, eftersom Fouriertransformen av insignalen $e^{i\omega t}$ måste tas i distributionsmening och blir en punktmassa.

(b) Impulssvaret är inte 0 på vänstra halvaxeln, så systemet är inte kausalt.

(c) Insignalen $\chi_{(-3,3)}$ ger utsignalen

$$h * \chi_{(-3,3)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\chi_{(-3,3)}(t-s)\,ds$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{t-3}^{t+3} se^{-s^2/4}\,ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,(e^{-(t+3)^2/4} - e^{-(t-3)^2/4})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-9/4}\,e^{-t^2/4}\sinh\frac{3t}{2}.$$

Uppgift 3.
Här kan man lämpligen Laplacetransformera i t-variabeln, i synnerhet som initialvillkoren är homogena. Då kommer $U(x,z) = \mathcal{L}u(x,z)$ att uppfylla ekvationen $z^2U(x,z) - zu(x,0) - u_t(x,0) = c^2U_{xx}(x,z)$, och alltså

$$z^2U(x,z) = c^2U_{xx}(x,z).$$

För fixt z får vi

$$U(x,z) = A(z)\exp\left(\frac{zx}{c}\right) + B(z)\exp\left(-\frac{zx}{c}\right),$$

där A och B beror av z men inte av x. Den första termen här har ett alltför snabbt växande då x växer och förkastas. Randvillkoret ger att $U(0,z) = \mathcal{L}t^3 = 6z^{-4}$, det sista enligt BETA 13.5 L20. Vi får alltså för $x = 0$ att $B(z) = 6z^{-4}$ och därmed

$$U(x,z) = 6z^{-4}\exp\left(-\frac{zx}{c}\right).$$

För att hitta u, som är inversa Laplacetransformen till detta uttryck, fixerar vi x och observerar att $6z^{-4}$ är Laplacetransformen av funktionen t^3. Effekten av faktorn $\exp(-zx/c)$

är att denna funktion translateras, enligt regeln i BETA 13.5 L4. Den inversa Laplacetransformen av $U(x,z)$ är därför $(t-x/c)^3$, men här är det viktigt att funktionen t^3 skall tolkas som 0 för negativa argument. Svaret blir alltså

$$u(x,t) = \begin{cases} (t-x/c)^3, & \text{om } t > x/c \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Detta kan också skrivas som $u(x,t) = (t-x/c)^3\theta(t-x/c)$ med Heavisidefunktionen θ. Se gärna efter i ett diagram var de olika uttrycken för $u(x,t)$ gäller. Lägg märke till att vi egentligen inte behövde Laplacetransformen $6z^{-4}$, det hade räckt att skriva $\mathcal{L}t^3$.

Uppgift 4.
Koefficienten x^2 framför f' är positiv i intervallet, och vikten är 1. De givna randvillkoren är separerade och därmed självadjungerade, så vi har ett reguljärt Sturm-Liouville-problem. Ekvationen kan skrivas

$$x^2 f'' + 2xf' - f + \lambda f = 0,$$

och är alltså en Eulerekvation. För att finna den allmänna lösningen ansätter vi $f(x) = x^\gamma$. Det leder till ekvationen $\gamma(\gamma-1) + 2\gamma - 1 + \lambda = 0$, med lösningar

$$\gamma = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - \lambda}.$$

Vi delar in i fall enligt tecknet på det som här står under rottecknet.

Om $5/4 - \lambda > 0$, skriver vi $5/4 - \lambda = \mu^2$ med $\mu > 0$ så att $\gamma = -1/2 \pm \mu$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen blir då

$$f(x) = a\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,x^{\mu} + b\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,x^{-\mu}.$$

Randvillkoret i punkten 1 ger att $a+b=0$, så att lösningen är proportionell mot $\frac{1}{\sqrt{x}}(x^\mu - x^{-\mu}) = \frac{1}{\sqrt{x}}(e^{\mu\ln x} - e^{-\mu\ln x})$ och alltså mot $\frac{1}{\sqrt{x}}\sinh(\mu\ln x)$. Detta deriveras, och man ser att randvillkoret i punkten 2 ger att

$$-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\sinh(\mu\ln x)+\frac{\mu}{x\sqrt{x}}\cosh(\mu\ln x)=0$$

skall gälla för $x=2$. Härav fås

$$\tanh(\mu\ln 2)=2\mu.$$

En skiss av graferna för de båda leden i denna ekvation, som funktioner av μ, visar att kurvorna skär varandra i origo. Men för $\mu>0$ har de ingen skärningspunkt, eftersom derivatan av vänsterledet är $\ln 2/\cosh^2(\mu\ln 2)$ som är avtagande i $\mu>0$ och i 0 tar värdet $\ln 2$, vilket ligger under det konstanta värdet 2 av högerledets derivata. Ekvationen har alltså inga positiva lösningar, och därför finns inga egenvärden med $5/4-\lambda>0$.

Om $\lambda=5/4$, har andragradsekvationen för γ dubbelrot $-1/2$. Därför är den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$f(x)=a\,\frac{1}{\sqrt{x}}+b\,\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x.$$

Randvillkoren medför $a=0$ och $-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln 2+\frac{1}{2\sqrt{2}}=0$, dvs. $\ln 2=2$ som är falskt. Alltså är $5/4$ inget egenvärde.

Om $5/4-\lambda<0$, sätter vi $5/4-\lambda=-\mu^2$ med $\mu>0$. Den allmänna lösningen kan nu skrivas

$$f(x)=a\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,x^{i\mu}+b\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,x^{-i\mu},$$

Randvillkoret i punkten 1 medför som nyss att $a+b=0$, så att lösningen är proportionell mot $\frac{1}{\sqrt{x}}(e^{i\mu\ln x}-e^{-i\mu\ln x})$ och alltså mot $\frac{1}{\sqrt{x}}\sinh(\mu\ln x)$. Det andra randvillkoret ger

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\sin(\mu\ln 2)+\frac{\mu}{2\sqrt{2}}\cos(\mu\ln 2)=0,$$

vilket betyder

$$\tan(\mu\ln 2)=2\mu.$$

Som i första fallet skissar man graferna av de båda leden i denna ekvation. Det framgår att ekvationen har en växande följd av positiva lösningar μ_k, $k = 1, 2, \dots$, och vi får alltså en följd av egenvärden $\lambda_k = 5/4 + \mu_k^2$. De sökta egenfunktionerna är då

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\mu_k \ln x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

med dessa μ_k.

Uppgift 5.

Det enklaste är nog att försöka se serien som Fourierserien för någon funktion, med hjälp av tabell. I BETA 13.1 (22) ser vi att funktionen

$$f(t) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi t}{2} + \frac{t^2}{4}$$

har Fourierserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}$$

i intervallet $0 < t < 2\pi$. Den givna summan kan skrivas som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 bn}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2bn}{n^2} = \frac{1}{2}(f(0) - f(2b)),$$

det sista förutsatt att Fourierserien för f konvergerar mot f i punkterna 0 och $2b$.

För att verifiera denna konvergens tänker vi oss en fortsättning av f till en 2π-periodisk funktion på hela linjen. Eftersom f är deriverbar i $[0, 2\pi]$ och tar värdet $\pi^2/6$ både i 0 och i 2π, blir denna fortsättning styckvis glatt och kontinuerlig. Därför konvergerar Fourierserien mot f i alla punkter. Den sökta summan är alltså

$$\frac{1}{2}(f(0) - f(2b)) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6} + \pi b - b^2\right) = \frac{(\pi - b)b}{2}.$$

En alternativ metod går ut på att tillämpa Parsevals ekvation på en funktion vars Fourierkoefficienter är (proportionella mot) $\pm \sin bn/n$. BETA 13.1 (1) med $L = \pi$ och $h = 1$ ger att den 2π-periodiska funktion $g(t)$ som tar värdet 1 för $|t| < \alpha\pi$ och är 0 i resten av intervallet $[-\pi, \pi]$ har Fourierserien

$$\alpha + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\alpha}{n} \cos nt.$$

Här är $0 < \alpha < 1$, och vi väljer $\alpha = b/\pi$. Parsevals ekvation ger nu

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 \, dt = 2\pi\alpha^2 + \pi \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{n^2} = \frac{2b^2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 bn}{n^2}.$$

Eftersom vänsterledet här är $2b$, får man även på detta sätt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 bn}{n^2} = \frac{(\pi - b)b}{2}.$$

Anm. Det fungerar *inte* att använda Parsevals ekvation på Fourierserier som

$$\frac{\pi - t}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}.$$

Här är ju koefficienterna $1/n$, så man får inte den sökta serien.

Uppgift 6.
Vi använder cylindriska koordinater (r, θ, z) och observerar att randvillkoret för $z = \ell$ då skrivs $u(r, \theta, \ell) = r \cos\theta + r \sin\theta$. Först söker vi de separerade lösningarna

$$u = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$$

till differentialekvationen med randvillkoret för $r = R_0$, som ger $R(R_0) = 0$. Eftersom Δu uttryckt i dessa koordinater blir $u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} + u_{zz}$, får man

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} = 0.$$

Genom att här flytta över sista termen till högerledet får vi en ekvation vars båda led måste vara en konstant, säg λ. Alltså är $-Z''/Z = \lambda$ och, efter multiplikation med r^2,

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda r^2.$$

Här kan vi på samma sätt flytta över termen med Θ till högerledet, och dessutom λr^2 till vänsterledet. Då ser vi att de två kvantiteterna

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} - \lambda r^2 \quad \text{och} \quad -\frac{\Theta''}{\Theta}$$

måste ha samma konstanta värde. Eftersom Θ är 2π-periodisk, är detta värde av formen n^2 med $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, och $\Theta(\theta) = a\cos n\theta + b\sin n\theta$. För R får vi då ekvationen

$$r^2R'' + rR' - (\lambda r^2 + n^2)R = 0.$$

Om $\lambda > 0$, säg $\lambda = \mu^2$ med $\mu > 0$, har vi den modifierade Besselekvationen, med lösningar

$$R(r) = cI_n(\mu r) + c'K_n(\mu r).$$

Men K_n är singulär i 0 och förkastas, och I_n är positiv och kan inte uppfylla randvillkoret $R(R_0) = 0$. Vi kan avfärda fallet $\lambda > 0$.

Om $\lambda = 0$, har vi en Eulerekvation, och ansatsen $R(r) = r^\gamma$ ger $\gamma = \pm n$. Lösningarna är därför

$$R(r) = cr^n + c'r^{-n}$$

om $n > 0$ resp.

$$R(r) = c + c'\ln r$$

om $n = 0$. Detta fall kan avfärdas på liknande grunder.

Om slutligen $\lambda < 0$, sätter vi $\lambda = -\mu^2$ med $\mu > 0$ och får Bessels ekvation, med lösningar

$$R(r) = cJ_n(\mu r) + c'Y_n(\mu r).$$

Här förkastas Y_n som är singulär i 0. Då återstår $J_n(\mu r)$, och randvillkoret ger $J_n(\mu R_0) = 0$. Vi kan skriva $\mu = \lambda_{kn}/R_0$, där λ_{kn}, $k = 1, 2, \ldots,$ betecknar de positiva nollställena till J_n. Vi har därmed

$$R(r) = J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0}\right).$$

För λ får vi alltså värdena $\lambda = -(\lambda_{kn}/R_0)^2$, och ekvationen för Z är därför $Z'' = (\lambda_{kn}/R_0)^2 Z$. Det betyder att

$$Z(z) = \alpha \cosh\frac{\lambda_{kn} z}{R_0} + \beta \sinh\frac{\lambda_{kn} z}{R_0}.$$

Randvillkoret för $z = 0$ medför att $\alpha = 0$, och vi kan sätta $Z(z) = \sinh \lambda_{kn} z/R_0$. De separerade lösningarna blir nu

$$J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0}\right)(a\cos n\theta + b\sin n\theta)\sinh\frac{\lambda_{kn} z}{R_0},$$

där $n = 0, 1, \ldots$ och $k = 1, 2, \ldots$.

Som lösning u ansätter vi en summa av separerade lösningar, alltså

$$u(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0}\right)(a_{kn}\cos n\theta + b_{kn}\sin n\theta)\sinh\frac{\lambda_{kn} z}{R_0}.$$

Det återstående randvillkoret, för $z = \ell$, medför då

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{R_0}\right)(a_{kn}\cos n\theta + b_{kn}\sin n\theta)\sinh\frac{\lambda_{kn}\ell}{R_0} = r\cos\theta + r\sin\theta.$$

Som funktion av θ är vänsterledet en Fourierserie, som på grund av högerledets utseende bara kan innehålla termer med $n = 1$. Övriga a_{kn} och b_{kn} måste vara 0. För termerna med $\cos\theta$ får vi därför

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_1\left(\frac{\lambda_{k1} r}{R_0}\right) a_{k1}\cos\theta \sinh\frac{\lambda_{k1}\ell}{R_0} = r\cos\theta,$$

och motsvarande för $\sin\theta$. I denna likhet kan faktorerna $\cos\theta$ strykas, och det gäller att utveckla funktionen r i ortogonalbasen $J_1(\lambda_{k1} r/R_0)$ på intervallet $(0, R_0)$, med vikt

$w(r) = r$. Koefficienterna blir

$$a_{k1} \sinh \frac{\lambda_{k1}\ell}{R_0} = \frac{1}{\|J_1(\lambda_{k1}r/R_0)\|_r^2} \int_0^{R_0} r J_1\left(\frac{\lambda_{k1}r}{R_0}\right) r\,dr.$$

Den viktade normen här återfinns i BETA 12.4, sidan 275, och man får

$$a_{k1} = \frac{2}{R_0^2 J_2(\lambda_{k1})^2 \sinh(\lambda_{k1}\ell/R_0)} \int_0^{R_0} r J_1\left(\frac{\lambda_{k1}r}{R_0}\right) r\,dr.$$

Samma resonemang för termerna med $\sin\theta$ ger att $b_{k1} = a_{k1}$. Ett korrekt och fullt tillräckligt svar på uppgiften är därför

$$u(r,\theta,z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k1} J_1\left(\frac{\lambda_{k1}r}{R_0}\right)(\cos\theta + \sin\theta)\sinh\frac{\lambda_{k1}z}{R_0},$$

med a_{k1} enligt ovan.

Men värdet av integralen i uttrycket för a_{k1} kan, efter variabeltransformationen $s = \lambda_{k1}r/R_0$, fås från BETA 12.4, sjätte raden i den stora rutan på sidan 274. Resultatet blir att koefficienterna ges av det enklare uttrycket

$$a_{k1} = \frac{2R_0}{\lambda_{k1} J_2(\lambda_{k1}) \sinh(\lambda_{k1}\ell/R_0)}.$$