MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2012-08-20
Telefon: Richard Lärkäng
0703-088304
Skrivtid: 8.30 – 13.30

Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt "Några tips om Fourierserier m.m. i BETA" (två sidor).
Maxpoäng står inom parentes efter varje uppgift, med summa 50.
Betygsgränser: Betyg 3: 25, betyg 4: 33, betyg 5: 42.
Svar i form av svårberäknade integraluttryck kan i vissa fall accepteras eller åtminstone ge poäng.

1. Lös följande problem, där $k > 0$ är en konstant:
$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + x, & 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin 2\pi x, & 0 < x < 1. \end{cases} \qquad (8)$$

2. Beräkna
$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 0.7)^2},$$
exempelvis med hjälp av en lämplig Fourierserie. (8)

3. Bestäm en lösning $u = u(x,t)$ till den inhomogena vågekvationen $u_{tt} = c^2 u_{xx} + x^2$ i halvplanet $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, med de homogena initialvillkoren $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$. Här är $c > 0$ en konstant. (8)

4. Anta $\hat{f}(\xi) = \frac{\xi}{(1+\xi^2)^2}$ för $\xi > 1$ och $\hat{f}(\xi) = 0$ för övriga ξ. Beräkna $f'(0)$ samt integralerna $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx$ och $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2\,dx$.
Ledning för den sistnämnda integralen: Den kan uttryckas i termer av Fouriertransformen av f^2, och denna Fouriertransform kan skrivas som en faltning. (3+2+3)

5. Lös värmeledningsekvationen $u_t = k\Delta u$ i en skiva $r < R_0$. Här är $k > 0$ och $u = u(r, \theta, t)$, där (r, θ) betecknar polära koordinater. Randvillkoret är $u(R_0, \theta, t) = 0$ och initialvillkoret $u(r, \theta, 0) = (R_0 - r) \sin\theta$. (8)

6. Definiera ett lågpassfilter, med konstant (kallad gränsvinkelfrekvens) $\alpha > 0$, och ge en formulering av samplingssatsen i termer av ett sådant filter. (3+2)

7. Låt L vara en linjär, andra ordningens ordinär differentialoperator i intervallet $[a, b]$. Vad innebär det att L är formellt självadjungerad? Vad medför detta för relation mellan skalärprodukter av typ $\langle Lf, g\rangle$? (3+2)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers Datum: 2012-08-20

LÖSNINGAR TILL
tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Uppgift 1.
Differentialekvationen är inhomogen pga. termen $+x$, som är oberoende av t-variabeln. Randvillkoren är homogena, speciellt då oberoende av t. Därför är detta ett typiskt fall för steady state-metoden.

Vi bestämmer alltså först en funktion $u_0(x)$ av bara x som uppfyller differentialekvationen och randvillkoren. Det betyder $0 = ku_0''(x) + x$ och $u_0(0) = u_0(1) = 0$. Detta ger enkelt $u_0(x) = -\frac{x^3}{6k} + ax + b$, där man får $b = 0$ och $a = \frac{1}{6k}$, så att $u_0(x) = \frac{x-x^3}{6k}$.

Nu söker vi en lösning till problemet av formen $u(x,t) = u_0(x)+v(x,t)$. Då skall v uppfylla den homogena värmeledningsekvationen $v_t = kv_{xx}$ och de homogena randvillkoren $v(0,t) = v(1,t) = 0$. Initialvillkoret för v blir $v(x,0) = \sin 2\pi x - u_0(x)$ dvs.

$$v(x,0) = \sin 2\pi x + \frac{x^3 - x}{6k}.$$

För v har vi därmed ett standardproblem för variabelseparation. De separabla lösningarna blir (som vanligt) $e^{-k\pi^2 n^2} \sin \pi nx$ för $n = 1, 2, \dots$. Med ansatsen

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\pi^2 n^2} \sin \pi nx$$

ger initialvillkoret att

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \pi nx = \sin 2\pi x + \frac{x^3 - x}{6k}.$$

Termen $\sin 2\pi x$ finns med i summan i vänsterledet, så vad som behövs är att utveckla x^3 och x i sinusserie. BETA 13.1

(14) och (12) med $L = 1$ säger att

$$x^3 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(1-\frac{6}{\pi^2 n^2}\right)\sin \pi n x$$

och

$$x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin \pi n x.$$

Tillsammans ger detta att

$$b_n = \frac{1}{6k}\frac{2}{\pi}(-1)^n\frac{6}{\pi^2 n^3} = \frac{2}{\pi^3 k}\frac{(-1)^n}{n^3}$$

då $n \neq 2$, och

$$b_2 = 1 + \frac{1}{4\pi^3 k}.$$

Svaret på uppgiften blir därmed

$$u(x,t) = \frac{x - x^3}{6k} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\pi^2 n^2}\sin \pi n x$$

med ovanstående värden på b_n.

Anm. Att termerna av storleksordning $1/n$ tog ut varandra då vi här beräknade b_n är inte överraskande. Det hänger ihop med att funktionen $x^3 - x$ i $[0,1]$, fortsatt till en udda, 2-periodisk funktion, är kontinuerlig med kontinuerlig derivata, i motsats till x^3 och x tagna var och en för sig.

Uppgift 2.

För att kunna använda Parsevals formel behöver vi väsentligen en funktion med Fourierkoefficienter proportionella mot $\frac{1}{n^2-0.7}$. Med $\alpha = \sqrt{0.7}$ i BETA 13.1 (15) har vi att

$$\cos \alpha t = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2-0.7}\cos nt$$

för $|t| < \pi$. Parseval säger att summan vi vill beräkna hänger ihop med L^2-normen av $f(t) = \cos \alpha t$ i intervallet $|t| < \pi$. För att få rätt konstanter betraktar vi f som en

2π-periodisk funktion på linjen och använder BETA, första formeln i den översta rutan på sidan 312. Där är f en reellvärd funktion med utvecklingen

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

vilket framgår av första formeln i första rutan på sidan 310, där $\Omega = 1$ eftersom perioden är $T = 2\pi$.

I vårt fall får vi $a_0 = \frac{2\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}$ och $a_n = \frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2-0.7}$ för $n = 1, 2, \ldots$ samt $b_n = 0$ för alla n. Då ger Parseval i BETA med $T = 2\pi$ och $a = -\pi$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \alpha t\, dt = \frac{\sin^2 \alpha\pi}{\alpha^2\pi^2} + \frac{2\alpha^2 \sin^2 \alpha\pi}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2-0.7)^2}.$$

För att räkna ut integralen i denna formel skriver man $\cos^2 \alpha t = (1 + \cos 2\alpha t)/2$ och får $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \alpha t\, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi\alpha}\sin 2\alpha\pi$. Detta ger

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2-0.7)^2} = \frac{\pi^2}{4\alpha^2\sin^2\alpha\pi} + \frac{\pi\cot\alpha\pi}{4\alpha^3} - \frac{1}{2\alpha^4},$$

som är svaret, där alltså $\alpha = \sqrt{0.7}$.

Anm.1 Som synes kräver det viss möda att använda Parsevals formel i BETA. Ett alternativ är att komma ihåg att formeln följer av att funktionerna 1 och $\cos nx$, $n = 1, 2, \ldots$ är ortogonala i intervallet $[-\pi, \pi]$ (för övrigt också i $[0, \pi]$). Om man därför kvadrerar ovanstående serieutveckling av $\cos \alpha x$ och integrerar över $[-\pi, \pi]$, så överlever bara "diagonaltermerna". Eftersom $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\, dt = \frac{1}{2}$ (dvs. $\cos^2 t$ har medelvärde $1/2$) får man samma Parsevalformel som ovan, på ett kanske enklare sätt.

Anm.2 En annan, elegant metod är att sätta $t = \pi$ i Fourierserien ovan; i denna punkt har man konvergens, och man får bort teckenoscillationen i koefficienterna. Resultatet kan skrivas

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2} = -\frac{\pi\cot\alpha\pi}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}.$$

Genom att derivera denna formel med avseende på α får man direkt samma uttryck som ovan för den önskade serien.

Uppgift 3.
Vi Laplacetransformerar i t-variabeln och söker alltså funktionen $U(x,s) = \mathcal{L}u(x,s)$. De homogena initialvillkoren gör att den transformerade differentialekvationen blir

$$s^2U(x,s) = c^2U_{xx}(x,s) + \frac{x^2}{s}.$$

Observera här att termen x^2 är oberoende av t och alltså Laplacetransformeras som en konstant. För fixt s är detta en inhomogen ordinär differentialekvation i x-variabeln. Motsvarande homogena ekvation $s^2U(x,s) = c^2U_{xx}(x,s)$ har den allmänna lösningen

$$U(x,s) = Ae^{\frac{sx}{c}} + Be^{-\frac{sx}{c}},$$

där "konstanterna" A och B kan bero av s. För att hitta en partikulärlösning till den inhomogena differentialekvationen ansätter vi ett polynom av grad 2 och finner $U(x,s) = \frac{x^2}{s^3} + \frac{2c^2}{s^5}$. Den inhomogena differentialekvationens allmänna lösning är därför

$$U(x,s) = \frac{x^2}{s^3} + \frac{2c^2}{s^5} + Ae^{\frac{sx}{c}} + Be^{-\frac{sx}{c}},$$

med $A = A(s)$ $B = B(s)$. Eftersom vi bara är ute efter *en* lösning till problemet, kan vi välja $A = B = 0$.

Nu återstår att finna inversa Laplacetransformen av denna funktion $U(x,s)$. Med hjälp av tabellen, BETA 13.5 L20, får man

$$u(x,t) = \frac{x^2t^2}{2} + \frac{c^2t^4}{12},$$

som är svaret.

En annan möjlighet är att använda steady state-metoden. En steady state-lösning är $u_0(x) = -\frac{x^4}{12c^2}$. För $v(x,t) = u(x,t) - u_0(x)$ får man då den homogena vågekvationen $v_{tt} = c^2v_{xx}$ med initialvillkor $v(x,0) = \frac{x^4}{12c^2}$ och $v_t(x,0) = 0$. Man kan bestämma v med Laplacetransformen som ovan, men det enklaste är att använda d'Alemberts formel, som direkt ger v. Se BETA 10.9, översta rutan på sidan 240.

Anm. Att försöka med Fouriertransformen i x-variabeln leder till svårigheten att x^2 inte är integrabel och inte kan Fouriertransformeras på vanligt sätt. Denna väg är möjligen framkomlig, via en massa distributionsteori, men i varje fall mycket besvärligare än ovanstående.

Uppgift 4.
Derivatan f' har Fouriertransformen $i\xi\hat{f}(\xi)$. Fouriers inversionsformel ger då

$$f'(0) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi\hat{f}(\xi)\,d\xi = \frac{i}{2\pi}\int_{1}^{\infty} \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2}\,d\xi.$$

För att beräkna den sista integralen här använder vi BETA 7.4, 76 och 61, och får

$$f'(0) = \frac{i}{2\pi}\left[-\frac{\xi}{2(1+\xi^2)} + \frac{1}{2}\arctan\xi\right]_1^{\infty} = i\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8\pi}\right).$$

Det kan påpekas att integralen också enkelt kan beräknas med partialintegration, om man skriver $\xi^2/(1+\xi^2)^2$ som produkten av $\xi/2$ och $2\xi/(1+\xi^2)^2$.

Plancherels formel medför att

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{1}^{\infty} \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^4}\,d\xi.$$

För denna integral använder vi igen BETA 7.4, 76 samt nu också rekursionsformeln 65 för A_4 och A_3, och 63 för A_2. Man får

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\xi}{6(1+\xi^2)^3}+\frac{1}{6}A_3\right]_1^\infty \\
&= \frac{1}{96\pi}+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\xi}{24(1+\xi^2)^2}+\frac{1}{16}A_2\right]_1^\infty \\
&= \frac{1}{96\pi}-\frac{1}{192\pi}+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\xi}{16(1+\xi^2)}+\frac{1}{16}\arctan\xi\right]_1^\infty \\
&= \frac{1}{128}-\frac{1}{96\pi}.
\end{aligned}$$

För att beräkna $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2\,dx$ observerar vi först att denna integral är $\widehat{f^2}(0)$, dvs. värdet i 0 av Fouriertransformen av f^2. Men $\widehat{f^2} = \frac{1}{2\pi}\hat{f}*\hat{f}$, och enligt definitionen av faltning är

$$\hat{f}*\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\hat{f}(-\xi)\,d\xi,$$

och denna integral är 0 eftersom integranden är 0 för alla ξ. Alltså är $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2\,dx = 0$. Detta kan också visas med hjälp av Fouriers cosinus- och sinustransformer och motsvarande Plancherelformler.

Uppgift 5.
Vi separerar variabler och skriver $u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$. Via uttrycket för Δ i polära koordinater får då värmeledningsekvationen formen

$$\begin{aligned}
&R(r)\Theta(\theta)T'(t) \\
&= k[R''(r)\Theta(\theta)T(t)+\frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta)T(t)+\frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta)T(t)].
\end{aligned}$$

Detta skriver vi som

$$\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)}+\frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}$$

och drar slutsatsen att de båda leden här har ett konstant värde σ. Det ger de två ekvationerna

$$T'(t) = k\sigma T(t)$$

och

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} - \sigma r^2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

I den andra av dessa ekvationer måste återigen båda leden ha ett konstant värde τ. Då får vi $\Theta''(\theta) = -\tau\Theta(\theta)$. Eftersom funktionen Θ är 2π-periodisk, vet vi att detta medför att $\tau = n^2$ för något $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ och att Θ är av formen $\Theta(\theta) = a\cos n\theta + b\sin n\theta$.

För R får vi då

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - (\sigma r^2 + n^2)R(r) = 0,$$

som vi känner igen som Bessels (modifierade) differentialekvation. För att bestämmma möjliga lösningar $R(r)$ observerar vi att randvillkoret medför att $R(R_0) = 0$, och dessutom måste funktionen $R(r)$ vara kontinuerlig i punkten $r = 0$.

Om $\sigma > 0$, säg $\sigma = \nu^2$ med $\nu > 0$, har vi den modifierade Besselekvationen, med den allmänna lösningen $R(r) = aI_n(\nu r) + bK_n(\nu r)$. Detta förkastas, eftersom K_n är obegränsad vid 0 och I_n saknar positiva nollställen. Och om $\sigma = 0$ får vi för $R(r)$ en Eulerekvation med lösningar $R(r) = ar^n + br^{-n}$ (resp. $a + b\ln r$ för $n = 0$), som förkastas av liknande skäl.

Då återstår fallet $\sigma < 0$. Vi sätter $\sigma = -\mu^2$ med $\mu > 0$ och får Bessels differentialekvation, med den allmänna lösningen $R(r) = aJ_n(\mu r) + bY_n(\mu r)$. Här förkastar vi Y_n som är obegränsad vid 0, och får sedan att $J_n(\mu R_0) = 0$. Alltså är μ av formen λ_{nj}/R_0, där λ_{nj}, $j = 1, 2, \dots$, betecknar de positiva nollställena till J_n.

Detta betyder att $\sigma = -\lambda_{nj}^2/R_0^2$ och att $R(r) = \text{konst} \cdot J_n(\lambda_{nj}r/R_0)$. Ekvationen för $T(t)$ får då lösningar proportionella mot

$$\exp(-k\lambda_{nj}^2 t/R_0^2).$$

De separerade lösningarna är därför

$$J_n(\lambda_{nj}r/R_0)(a_{nj}\cos n\theta + b_{nj}\sin n\theta)\exp(-k\lambda_{nj}^2 t/R_0^2),$$

och vi ansätter en dubbelsumma

$$u(r.\theta,t) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nj}r/R_0)(a_{nj}\cos n\theta + b_{nj}\sin n\theta)\exp(-k\lambda_{nj}^2 t/R_0^2).$$

Nu kommer initialvillkoret in, som ger

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nj}r/R_0)(a_{nj}\cos n\theta + b_{nj}\sin n\theta) = (R-r)\sin\theta.$$

Genom att i vänsterledet tänka oss att vi först (innerst) summerar i k får vi en Fourierserie i n. Eftersom högerledet är en term i en sådan Fourierserie, den med $n = 1$, drar vi slutsatsen att alla a_{nj} och b_{nj} med $n \neq 1$ måste vara 0, och detsamma gäller a_{1j}. Då återstår likheten

$$\sum_{j=1}^{\infty} J_1(\lambda_{1j}r/R_0)b_{1j}\sin\theta = (R-r)\sin\theta.$$

Här stryker vi förstås faktorerna $\sin\theta$ och ser att man måste utveckla $R-r$ i Besselserie, i ortogonalsystemet $J_1(\lambda_{1j}r/R_0)$ på intervallet $[0, R_0]$ med vikt r.

Då ger kända formler, se BETA 12.4 sidan 275, att koefficienterna är

$$b_{1j} = \frac{2}{R_0^2 J_2(\lambda_{1j})^2}\int_0^{R_0} J_1(\lambda_{1j}r/R_0)(R-r)r\,dr.$$

Svaret på uppgiften blir därför

$$u(r.\theta,t) = \sum_{j=1}^{\infty} b_{1j}J_1(\lambda_{1j}r/R_0)\sin\theta\exp(-k\lambda_{1j}^2 t/R_0^2)$$

med dessa b_{1j}.

Anm. Man kan spara en del arbete genom att gissa att lösningen är av formen $v(r,t)\sin\theta$ och ansätta detta uttryck.