MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2010-03-13
Telefon: Magnus Goffeng
0703 - 088304
Skrivtid: 8.30 – 13.30

Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa samt BETA eller Standard Math. Tables

1. Bestäm en lösning till värmeledningsekvationen $u_t = ku_{xx}$ i kvadranten $x, t > 0$ med randvillkoren $u(x, 0) = 0$ och $u(0, t) = 1/\sqrt{t}$.

2. (a) Visa att funktionerna $(\phi_n)_1^\infty$ bildar ett ortogonalsystem i $L^2(\mathbb{R})$ om och endast om detsamma gäller för Fouriertransformerna $(\widehat{\phi_n})_1^\infty$.
   (b) Visa att ett ortogonalsystem $(\phi_n)_1^\infty$ i $L^2(\mathbb{R})$ är fullständigt om och endast om $(\widehat{\phi_n})_1^\infty$ är fullständigt.
   (c) Ge exempel på ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2(\mathbb{R})$. (Man behöver inte bevisa fullständigheten.) Ledning: En möjlighet är att börja med att dela in linjen i intervall.

   Deluppgifterna a, b och c är värda 2, 2 resp. 4 poäng.

3. Lös Dirichlets problem $\Delta u = 0$ i kvadraten $0 < x,\ y < L$ med randvärdena

   $$u(x, 0) = 1,\ \ u(x, L) = 0,\ \ u(0, y) = 1 + y,\ \ u(L, y) = 0.$$

4. Betrakta Sturm-Liouville-problemet $f'' + \lambda f$ i intervallet $[0, 4]$ med randvärdena $f'(0) = 0$ och $2f(4) - f'(4) = 0$. Låt $(\lambda_k)_1^\infty$ vara egenvärdena uppräknade i växande ordning. Ange ett approximativt värde på λ_3 genom att bestämma ett heltal n sådant att $|\lambda_3 - n| < 1$.

5. Finn en begränsad lösning till Laplaces ekvation i polär form

$$u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0$$

i sektorn $0 < r < R,\ 0 < \theta < \beta$, med randvillkoren $u(r, 0) = 0,\ u(r, \beta) = 0$ och $u(R, \theta) = \theta^3$. Här är $0 < \beta < \pi$.

6. Lös värmeledningsekvationen $u_t = k\Delta u$ i cirkelskivan $r < \rho$ med randvillkoret $u(\rho, \theta, t) = 0$ för alla θ och t och med begynnelsevillkoret $u(r, \theta, 0) = h(r)(1 + \cos\theta)$. Här är r, θ polära koordinater, $k > 0$ en konstant och $h(r)$ en given funktion.

7. Formulera samplingssatsen.

8. Berätta om ortogonalpolynom i ett viktat rum $L^2_w(a, b)$: definition, konstruktion, entydighet.

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2010-03-13

LÖSNINGAR till tentamen i
Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2
och Fouriermetoder MVE290 för TM2

1. Låt $U(x,z)$ vara Laplacetransformen i t-variabeln av lösningen $u(x,t)$. Då blir ekvationen

$$zU(x,z) - u(x,0) = kU_{xx}(x,z),$$

där $u(x,0) = 0$. Alltså är

$$U(x,z) = A(z)\, e^{-x\sqrt{z/k}} + B(z)\, e^{x\sqrt{z/k}}.$$

Här kastar vi andra termen eftersom den växer snabbt i z och eftersom vi bara är ute efter *en* lösning till problemet. Randvillkoret för $x = 0$ ger att $U(0,z)$ är Laplacetransformen av $1/\sqrt{t}$, som enligt tabell är $\sqrt{\pi/z}$. Detta blir också värdet av $A(z)$, så att $U(x,z) = \sqrt{\pi/z}\, e^{-x\sqrt{z/k}}$. Tabellen ger nu att

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-x^2/4kt}.$$

2. (a) Att (ϕ_n) är ett ortogonalsystem innebär att ingen ϕ_n är 0 (som L^2-funktion) och att ϕ_n och ϕ_m är ortogonala i L^2 för $n \neq m$. Men om detta gäller, ger Plancherels sats både att $\|\widehat{\phi_n}\| = \sqrt{2\pi}\|\phi_n\| \neq 0$ och $\langle \widehat{\phi_n}, \widehat{\phi_m} \rangle = 2\pi \langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$ för $n \neq m$. Alltså är då även $(\widehat{\phi_n})$ ett ortogonalsystem. Omvändningen visas på samma sätt.
(b) Ortogonalsystemet är fullständigt om och endast om $f \in L^2$ och $f \perp \phi_n$, alla n, medför $f = 0$. Men om så är, får man för $g \in L^2$ att $g \perp \widehat{\phi_n}$ för alla n medför $\mathcal{F}^{-1}g \perp \phi_n$

enligt Plancherel, så $(\widehat{\phi_n})$ är också fullständigt. Analog omvändning.
(c) Låt χ_n vara karakteristiska funktionen för intervallet $I_n = [2\pi n, 2\pi(n+1)]$. Då är $(\chi_n e^{ikx})_{k\in\mathbb{Z}}$ ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2(I_n)$ och $(\chi_n e^{ikx})_{n,k\in\mathbb{Z}}$ ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2(\mathbb{R})$.
Ett annat exempel är Hermitefunktionerna $(h_n)_{n=0}^{\infty}$.

3. OBS. Här fanns ett tryckfel i problemtexten. Det fjärde randvillkoret skall lyda $u(L, y) = 0$.

   Randvillkoren är inte homogena, vare sig på den horisontella eller den vertikala delen av randen. Men på var och en av de två horisontella kvadratsidorna är randvärdena konstanta. Vi kan därför finna en "steady state"-lösning $u_0(y)$, sådan att $\Delta u_0 = 0$, dvs. $(u_0)'' = 0$, med rätt randvärden för $y = 0$ och $y = L$. Då blir u_0 ett förstagradspolynom, nämligen $u_0(y) = 1 - y/L$. Skriv nu $u(x, y) = v(x, y) + u_0(y)$. Den nya funktionen $v(x, y)$ skall då satisfiera $\Delta v = 0$ och

   $$v(x,0) = 0,\ v(x,L) = 0,\ v(0,y) = (1+\frac{1}{L})y,\ v(L,y) = \frac{y}{L}-1.$$

   Variabelseparation $v = X(x)Y(y)$ ger

   $$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \text{konstant}.$$

   De homogena randvillkoren i y-variabeln medför att konstanten här måste vara $(n\pi/L)^2$ för något $n \in \{1, 2, \ldots\}$, och $Y(y) = \sin \frac{n\pi}{L} y$. Funktionen $X(x)$ kan skrivas

   $$X(x) = a \sinh \frac{n\pi}{L} x + b \sinh \frac{n\pi}{L}(L - x).$$

   För v ansätter vi nu

   $$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sinh \frac{n\pi}{L} x + b_n \sinh \frac{n\pi}{L}(L-x) \right) \sin \frac{n\pi}{L} y. \tag{1}$$

Randvärdena för $x = 0$ och $x = L$ ger att

$$\sum_n b_n \sinh n\pi \sin \frac{n\pi}{L} y = (1 + \frac{1}{L}) y$$

och

$$\sum_n a_n \sinh n\pi \sin \frac{n\pi}{L} y = \frac{y}{L} - 1.$$

Ur tabell (i BETA (2) resp. (5) i 13.1) får vi

$$y = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{L} y$$

och

$$1 - \frac{y}{L} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{L} y,$$

båda för $0 < y < L$. Därför blir

$$b_n = \frac{2(L+1)(-1)^{n+1}}{\pi n \sinh n\pi}$$

och

$$a_n = -\frac{2}{\pi n \sinh n\pi}.$$

Problemets lösning är alltså $u(x, y) = v(x, y) + u_0(y)$, där v ges av (1) med ovanstående koefficienter. Det blir

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 1 - \frac{y}{L} \\ &- \tfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \frac{n\pi}{L} x + (-1)^n (L+1) \sinh \frac{n\pi}{L}(L - x)}{n \sinh n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} y. \end{aligned}$$

4. För $\lambda < 0$ sätter vi $\lambda = -\mu^2$ med $\mu > 0$ och får lösningar

$$f(x) = a \cosh \mu x + b \sinh \mu x.$$

Randvillkoret vid $x = 0$ ger $b = 0$. Med $f(x) = \cosh \mu x$ ger randvillkoret vid $x = 4$ att

$$2 \cosh 4\mu - \mu \sinh 4\mu = 0,$$

dvs. $\tanh 4\mu = 2/\mu$. Med hjälp av graferna ser man att denna ekvation har exakt en positiv rot μ_1, och vi får precis ett negativt egenvärde $\lambda_1 = -\mu_1^2$.

För $\lambda = 0$ är lösningarna förstagradspolynom och randvillkoren medger bara nollpolynomet, så 0 är inget egenvärde.

För $\lambda > 0$ sätter vi $\lambda = \mu^2$ och får

$$f(x) = a \cos \mu x + b \sin \mu x.$$

Randvillkoren ger att $b = 0$ och, med $f(x) = \cos \mu x$, att

$$2 \cos 4\mu + \mu \sin 4\mu = 0,$$

eller ekvivalent $\tan 4\mu = -2/\mu$. Alltså skall $t = 4\mu$ vara en lösning till ekvationen $\tan t = -8/t$. Genom att rita graferna ser man att denna ekvation har en (växande) följd av positiva lösningar $(t_k)_2^\infty$, som ger μ-värden $\mu_k = t_k/4$ och egenvärden $\lambda_k = (t_k/4)^2$, $k = 2, 3, \ldots$. På graferna ser man att t_3 motsvarar en punkt på den gren av tangenskurvan som ges av $3\pi/2 < t < 5\pi/2$, och $\tan t_3 < 0$ så att $3\pi/2 < t_3 < 2\pi$. Detta medför

$$\left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 < \lambda_3 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Men $(3\pi/8)^2 > 1$ och $(\pi/2)^2 < 3$, så att $1 < \lambda_3 < 3$. Det sökta n-värdet är alltså $n = 2$.

5. Variabelseparation $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ leder till

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \text{konstant}.$$

Eftersom $\Theta(\theta)$ skall vara 0 för $\theta = 0$ och $\theta = \beta$, måste konstanten här vara $(n\pi/\beta)^2$ för något $n = 1, 2, \ldots$, och $\Theta(\theta) = \sin \frac{n\pi}{\beta}\theta$. För R fås

$$r^2 R'' + rR' - \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 R = 0.$$

Denna Eulerekvation har lösningar r^γ med $\gamma = \pm n\pi/\beta$. Här kommer bara plustecknet ifråga, eftersom lösningen skall vara begränsad vid 0. De separerade lösningarna blir då $r^{n\pi/\beta} \sin \frac{n\pi}{\beta}\theta$. Ansätt därför

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{n\pi/\beta} \sin \frac{n\pi}{\beta}\theta. \tag{2}$$

Randvillkoret för $r = R$ ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n R^{n\pi/\beta} \sin \frac{n\pi}{\beta}\theta = \theta^3$$

för $0 < \theta < \beta$. Tabellen (BETA: (14) i 13.1) ger

$$c_n = \frac{2\beta^3}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(1 - \frac{6}{\pi^2 n^2}\right) R^{-n\pi/\beta}$$

Lösningen $u(r, \theta)$ ges nu av (2) med dessa c_n.

6. Variabelseparation $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ ger först

$$\frac{T''}{T} = \frac{R'' + r^{-1}R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

för någon konstant λ och därefter

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} - \lambda r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \text{konstant}.$$

Denna sista konstant måste vara av formen n^2 för något $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, eftersom Θ är 2π-periodisk, och

$$\Theta(\theta) = a \cos n\theta + b \sin n\theta.$$

För R får man

$$r^2R'' + rR' + (-\lambda r^2 - n^2)R = 0.$$

Om $\lambda > 0$, säg $\lambda = \mu^2$ med $\mu > 0$, är detta den modifierade Besselekvationen, med lösningar

$$R(r) = \alpha I_n(\mu r) + \beta K_n(\mu r).$$

Men K_n är singulär i 0 och förkastas, och I_n har inga nollställen på $\mathbb{R}_+$. Dessa $R(r)$ kan alltså inte uppfylla randvillkoret för $r = \rho$, och fallet $\lambda > 0$ ger ingenting.

I fallet $\lambda = 0$ får man $R(r) = \alpha r^n + \beta r^{-n}$, som inte heller ger någonting. (För $n = 0$ fås i stället $R(r) = \alpha + \beta \ln r$.)

Men om $\lambda < 0$ sätter vi $\lambda = -\mu^2$ och då har vi Bessels ekvation, med lösningar

$$R(r) = \alpha J_n(\mu r) + \beta Y_n(\mu r).$$

Här förkastas Y_n, och randvillkoret vid $r = \rho$ ger att $J_n(\mu\rho) = 0$. Om $(\lambda_{kn})_{k=1}^{\infty}$ betecknar de positiva nollställena för J_n, måste alltså $\mu = \lambda_{kn}/\rho$ för något $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

För T fås nu

$$T(t) = e^{-k\lambda_{kn}^2 t/\rho^2}.$$

De separabla lösningarna blir

$$e^{-k\lambda_{kn}^2 t/\rho^2} J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{\rho}\right)(a_{nk}\cos n\theta + b_{nk}\sin n\theta),$$

där $n \in \{0, 1, \ldots\}$ och $k \in \{1, 2, \ldots\}$. Vi ansätter

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\lambda_{kn}^2 t/\rho^2} J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{\rho}\right)(a_{nk}\cos n\theta + b_{nk}\sin n\theta).$$

Begynnelsevillkoret medför då

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{\rho}\right)(a_{nk}\cos n\theta + b_{nk}\sin n\theta) = h(r)(1 + \cos\theta).$$

Genom att fixera r och variera θ här ser vi att a_{nk} kan vara skilt från 0 bara för $n = 0$ och $n = 1$, och att alla b_{nk} är 0. För $n = 0$ får man då

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{0k} J_0 \left(\frac{\lambda_{k0} r}{\rho} \right) = h(r).$$

Koefficienterna a_{0k} ges därför enligt formel i tabell av

$$a_{0k} = \frac{2}{\rho^2 J_1(\lambda_{k0})^2} \int_0^{\rho} h(r) J_0 \left(\frac{\lambda_{k0} r}{\rho} \right) r \, dr.$$

Helt analogt har man

$$a_{1k} = \frac{2}{\rho^2 J_2(\lambda_{k1})^2} \int_0^{\rho} h(r) J_1 \left(\frac{\lambda_{k1} r}{\rho} \right) r \, dr.$$

Lösningen u är alltså

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) = {} & \sum_{k=1}^{\infty} a_{0k} e^{-k\lambda_{k0}^2 t/\rho^2} J_0 \left(\frac{\lambda_{k0} r}{\rho} \right) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} e^{-k\lambda_{k1}^2 t/\rho^2} J_1 \left(\frac{\lambda_{k1} r}{\rho} \right) \cos\theta, \end{aligned}$$

med ovanstående koefficienter a_{0k} och a_{1k}.

En variant av ovanstående är att dela upp begynnelsevillkoret i $h(r)$ och $h(r)\cos\theta$ och lösa två problem. Då söker man funktioner av bara r och t, i det andra fallet med en faktor $\cos\theta$.