Fourieranalys F2/Kf2, MVE030, 4 poäng TMA132,5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer, kurskod samt linje och inskrivningsår.

1. Med hjälp av utveckling i Fourier-Bessel serie hitta en lösning $u(r,\theta,t)$ av randvärdeproblem för värmeekvationen $u_t = 4\Delta u - 3u$ i cirkelskivan $r < 1$ med begynnelsevillkoret $u(r,\theta,0) = r^2\cos(2\theta)$ och randvillkoret $u(r,\theta,t) = \cos(2\theta)$ för $r = 1$. **Tips: sök lösningen på formen** $u(r,\theta,t) = v(r,t)\cos(2\theta)$

2. a) **MVE030**Utveckla i serie i Legendrepolynomer funktionen $f(x)$: $f(x) = x^2, x \in (0,1), f(x) = 0, x \in (-1,0]$. (Värdet av $P_n(0)$ tas ur BETA).

   b) **TMA132** Med hjälp av konforma avbildningar hitta den elektrostatiska potentialen u, $\Delta u = 0$, i området $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x > 0, y \in (0,3)$ som är lika med 1 på y-axeln $x = 0$, lika med -1 på linjen $y = 3$, lika med -2 på intervallet $0 < x < 1$ på x-axeln, och lika med 0 för $x > 1$ på x-axeln.

3. Lös med hjälp av utvecklingen i Fourier serie i egenfunktioner av ett passande Sturm-Liouville problem ekvationen

$$u_{tt} + 2u_t + 4u = u_{xx}, 0 < x < \pi, t > 0$$

   med randvillkoren $u(0,t) = 1, u_x(\pi,t) = 1$ och begynnelsevillkoren $u(x,0) = x^2/2 + 1$, $u_t(x,0) = 0$.

4. Med hjälp av Fouriertransformation hitta lösningen till ekvationen $u_{xx} + u_{yy} + 4u = 0$ i halvbandet $x > 0, y \in (0,1)$ med randvillkoren $u(0,y) = u_y(x,1) = 0$, $u(x,0) = 1, x < c, u(x,0) = 0, x > c$. Svaret ges i formen av en Fourierintegral.

5. Funktionen $f(x)$ definieras som $f(x) = \int_{-1}^{1} \sqrt{e^{\xi}+1}e^{ix\xi}d\xi$. Beräkna (a) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$, (b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, (c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx$, (d) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-5ix}dx$ där $\hat{g}(\xi) = \cos(\xi), \xi \in (0,1)$, $\hat{g}(\xi) = 0$ utanför $(0,1)$.

6. Lös ekvationen $u_{xx} + u_{yy} - u = 0$ i rektangeln $x \in (0,\pi), y \in (0,2\pi)$ med randvillkoren $u_y(x,0) = 2\sin(2x) + 3\sin(3x), x \in (0,\pi)$, $u = 0$ på resten av randen. Använd F-serie i något led.

7. a) **MVE030** Låt $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara ett ortonormalt system i $L^2(a,b)$. Ange tre villkor som alla var för sig är ekvivalent med att $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ är ett fullständigt system (en bas) i $L^2(a,b)$ (Sats 3.4). Beviset krävs. Ge exempel på ortonormala system vilka är en bas, och vilka inte är bas. Vilka system är ortogonala på hela axeln, på halvaxeln??

   b) **TMA132** Berätta så mycket som du kan om tillämpningar av konforma avbildningar i hydrodynamik.

8. Berätta så mycket som du kan om samplingsprocessen, samplingsteorem och tillämpningar.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas den 20. mars. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 12.mars.

Fourieranalys. MVE030/TMA132 F2/Kf2
20070310 . lösningar

1. Vi söker lösningen på formen
$u(r,\theta,t) = v(r,t)\cos 2\theta$. Sätter in i ekvationen och förkortar med $\cos 2\theta$:

$$v_t = 4v_{rr} + \frac{4}{r}v_r - \frac{16}{r^2}v - 3v$$

$v(r,0) = r^2$; $v(1,t) = 1$

Förberedelsesteg krävs, vi tar $v_0(r,t) = r^2$,
$v(r,t) = v_0(r,t) + w(r,t)$. Funktionen $w(r,t)$ satisfierar

$$\boxed{\begin{aligned} &w_t = 4w_{rr} + \frac{4}{r}w_r - \frac{16}{r^2}w - 3w - 16 - 3r^2 \\ &w(r,0) = 0;\ w(1,t) = 0 \end{aligned}}$$

Separerar variabler. $w(r,t) = R(r)T(t)$

$$\frac{T'}{T} = \frac{4\left(R_{rr} + \frac{1}{r}R_r - \frac{4}{r^2}R\right)}{R} - 3$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{T'}{T} + 3\right) = \frac{R_{rr} + \frac{1}{r}R_r - \frac{4}{r^2}R}{R} = -\mu^2$$

R-ekvation:

$$R_{rr} + \frac{1}{r}R_r - \frac{4}{r^2}R + \mu^2 R = 0$$

$R(0)$ ändlig; $R(1) = 0$.

Besselekvation med $\nu = 2$.

Lösningar $R_k(r) = J_2(\lambda_k r)$,

λ_k - nollställen av $J_2(\lambda)$.

Söker T-ekvation:

$w(r,t)$ har formen $w(r,t) = \sum T_k(t) J_2(\lambda_k r)$.

Sätter in i ekvationen:

$$\sum_k \left((T_k' + 3T_k) J_2(\lambda_k r) - 4\left(J_2(\lambda_k r)'' + \frac{1}{r} J_2'(\lambda_k r) - \frac{4}{r^2} J_2(\lambda_k r)\right) T_k \right) = -16 - 3r^2$$

$$\sum_k \left(T_k' + 3T_k + 4\mu_k^2 T_k \right) J_2(\lambda_k r) = -16 - 3r^2$$

$$\Rightarrow \quad T_k' + (3 + 4\mu_k^2) T_k = \frac{\langle (-16 - 3r^2), J_2(\lambda_k r) \rangle}{\| J_2(\lambda_k r) \|^2}.$$

$T_k(0) = 0$

Nämnaren får vi ur ~~T~~ Sabsen S. 3!

$$\| J_2(\lambda_k r) \|^2 = \frac{1}{2} J_3(\lambda_k)^2.$$

Täljaren:

$$-3\int_0^{1} r^2 J_2(\lambda_k r) r\,dr \overset{(14,\ \nu=3)}{=} -3\lambda_k^{-4} \int_0^{\lambda_k} s^3 J_2(s)\,ds$$

$$= -3\lambda_k^{-4} \int_0^{\lambda_k} (s^3 J_3(s))'\,ds = -3\lambda_k^{-4} \cdot \lambda_k^3 J_3(\lambda_k).$$

$$-16 \int_0^1 J_2(\lambda_k r) r\,dr = -16 \lambda_k^{-2} \int_0^{\lambda_k} s J_2(s)\,ds$$

$$\overset{(13,\ \nu=1)}{=} +16 \lambda_k^{-2} \int_0^{\lambda_k} s^2 \cdot (s^{-1} J_1(s))'\,ds$$

(partiel integrering

$$\stackrel{}{=} -16\lambda_k^{-2}\int_0^{\lambda_k} 2s\cdot s^{-1} J_1(s)\,ds$$

$$+16\lambda_k^{-2}\cdot\lambda_k^{-1} J_1(\lambda_k) = (13,\ \nu=0)$$

$$= \cancel{\ } -32\lambda_k^{-2}\int_0^{\lambda_k} J_0'(s)\,ds + 16\lambda_k^{-1} J_1(\lambda_k)$$

$$= -32\lambda_k^{-2}\left(J_0(\lambda_k) - J_0(0)\right) + 16\lambda_k^{-1} J_1(\lambda_k).$$

Tillsammans kommer vi till

$$T_k' + (3+4\mu_k^2)T = b_k \quad , T_k(0)=0$$

Lösningen:

$$T_k(t) = \frac{b_k}{3+4\mu_k^2}\left(1-e^{-(3+4\mu_k^2)t}\right).$$

2, MVE030

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

$$C_n = \frac{\langle f(x), P_n(x) \rangle}{\|P_n(x)\|^2} = \frac{\langle f(x), P_n(x) \rangle}{2/(2n+1)}$$

$$\langle f, P_n \rangle = \int_0^1 x^2 P_n(x)\,dx.$$

Vi använder rekurr. formler. (vi tar $n \geq 3$ först) : $P_n(x) = \frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)\right].$

$$\int_0^1 x^2 P_n(x)\,dx = \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^2\left[P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)\right]dx$$

$$= -\frac{2}{2n+1}\int_0^1 x P_{n+1}(x)\,dx + \frac{2}{2n+1}\int_0^1 x P_{n-1}(x)\,dx$$

$$+ \frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}(1) - P_{n-1}(1)\right].$$

Använder rekurr. formel ~~en~~ igen

$$\int_0^1 x P_{n+1}(x)\,dx = \frac{1}{2n+3}\int_0^1 x\left(P_{n+2}' - P_n'\right)dx$$

$$= \frac{-1}{2n+3}\left(\int_0^1 \left(P_{n+2} - P_n\right) dx\right) + \frac{1}{2n+3}\left[P_{n+2}(1) - P_n(1)\right]$$

$$\int_0^1 x P_{n-1}(x)\,dx = \frac{-1}{2n-1}\int_0^1 \left(P_n(x) - P_{n-2}(x)\right)dx$$

$$+ \frac{1}{2n-1}\left(P_n(1) - P_{n-2}(1)\right).$$

Och en gång till:

$$\int_0^1 P_{n+2}(x)\,dx = \frac{1}{2n+5}\int_0^1 \left[P_{n+3}(x) - P_{n+1}(x)\right]' dx$$

$$= \frac{-1}{2n+5}\left[P_{n+3}(1) - P_{n+1}(1) - P_{n+3}(0) + P_{n+1}(0)\right].$$

$$\int_0^1 P_n(x)\,dx = \frac{1}{2n+1}\int_0^1 \left[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\right]' dx$$

$$= -\frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}(1) - P_{n-1}(1) - P_{n+1}(0) + P_{n-1}(0)\right]$$

$$\int_0^1 P_{n-2}(x)\,dx = \frac{1}{2n-3}\int_0^1 \left[P_{n-1}(x) - P_{n-3}(x)\right]' dx$$

$$= -\frac{1}{2n-3}\left[P_{n-1}(1) - P_{n-3}(1) - P_{n-1}(0) + P_{n-3}(0)\right].$$

för $n = 0, 1, 2$ går ej att använda dessa formler, pga $n-3$ blir negativt.

Så måste man beräkna direkt:

$$\langle f, P_0\rangle = \int_0^1 x^2 \cdot 1\,dx = \frac{1}{3}$$

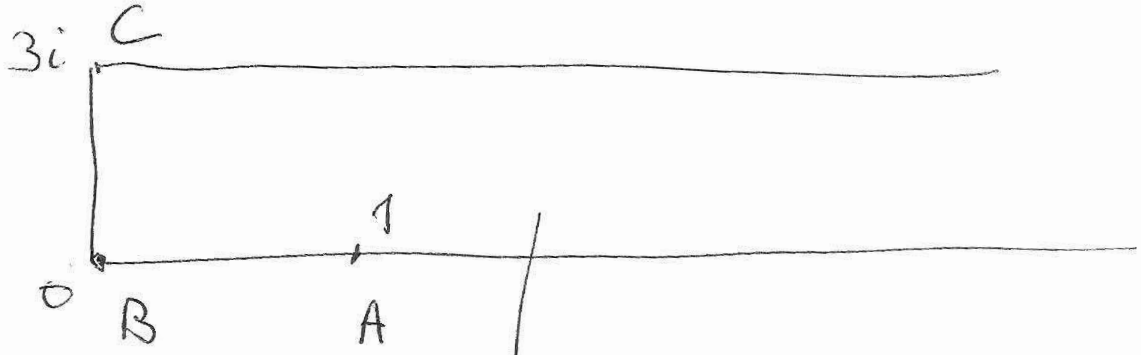
$$\langle f, P_1\rangle = \int_0^1 x^2 \cdot x\,dx = \frac{1}{4}$$

$$\langle f, P_2\rangle = \int_0^1 x^2 \cdot \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) dx$$

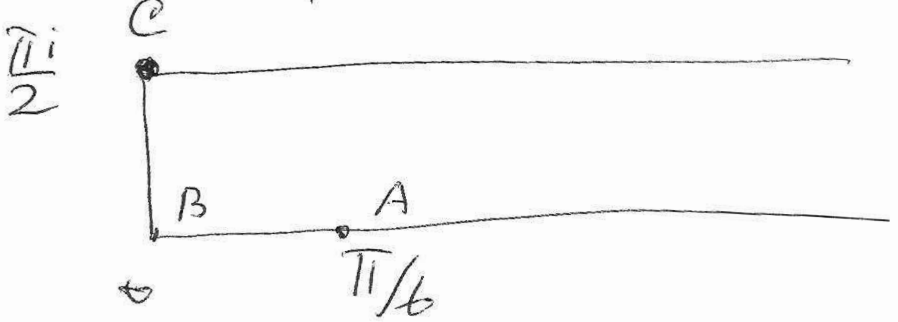
$$= \frac{3}{10} - \frac{1}{3}.$$

2. TMA132.

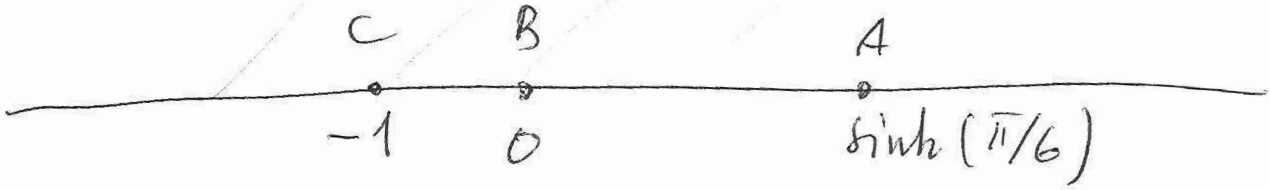
Vi gör en konform avbildning av vårt område till övre halvplanet.
Vi märker vad som händer med punkter där randfunktionen ändrar sitt värde.



$$z_1 = \frac{\pi}{6} z$$



$$w = \sinh(z_1) = \sinh\left(\frac{\pi}{6} z\right)$$



Söker lösningen av Laplaceekvationen i halvplanet på formen

$$V(w) = C_0 + C_1 \arg(w+1) + C_2 \arg w + \cancel{C_3 \arg(w} + C_3 \arg\left(w - \sinh\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

systemet för C_0, C_1, C_2, C_3:

$$C_0 + C_1\pi + C_2\pi + C_3\pi = -1, \text{ för } w < -1$$

$$C_0 + C_2\pi + C_3\pi = 1, \text{ för } w \in (-1,0)$$

$$C_0 + C_3\pi = -2 \quad , \text{för } w \in \left(0, \sinh\frac{\pi}{6}\right)$$

$$C_0 = 0 \quad \text{för } w \in \left(\sinh\frac{\pi}{6}, \infty\right).$$

därifrån hittar vi C_0, C_1, C_2, C_3.

$$u(z) = V\left(\sinh\frac{\pi z}{6}\right).$$

Söker lösningen av Laplaceekvationen i halvplanet på formen

$$V(w) = C_0 + C_1 \arg(w+1) + C_2 \arg w + \cancel{C_3 \arg(w} + C_3 \arg\left(w - \sinh\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

systemet för C_0, C_1, C_2, C_3:

$C_0 + C_1\pi + C_2\pi + C_3\pi = -1$, för $w < -1$

$C_0 + \cancel{C_1\pi} + C_2\pi + C_3\pi = 1$, för $w \in (-1,0)$

$C_0 + C_3\pi = -2$, för $w \in (0, \sinh\frac{\pi}{6})$

$C_0 = 0$ för $w \in (\sinh\frac{\pi}{6}, \infty)$.

därifrån hittar vi C_0, C_1, C_2, C_3.

$$u(z) = v\left(\sinh\frac{\pi z}{6}\right).$$

3. $u_{tt} + 2u_t + 4u = u_{xx}$, $x \in (0,\pi)$

$u(0,t) = 1$, $u_x(\pi,t) = 1$

$u(x,0) = x^2/2+1$; $u_t(x,0) = 1$.

~~ett~~ förberedelsesteg:

söker v: $v(x,t)$ satisfierar randvillkoren. Vi tar

$$v(x,t) = 1 + \frac{x^2}{2\pi}$$

$u = v + w$. ~~&~~ Problemet för w.

$$\begin{cases} w_{tt} + 2w_t + 4w = w_{xx} + \frac{1}{\pi} \\ w(0,t) = 0 \, ; \; w_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

$w(x,0) = x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\right)$; $w_t(x,0) = 0$

Separerar variabler

$w = \cancel{Re} X(x)T(t)$.

$$\frac{T'' + 2T' + 4}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\boxed{X'' + \lambda X = 0 \, ; \; X(0) = 0 \, , \; X'(\pi) = 0.}$$

Egenvärden $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$, $n = 0, \ldots$

egenfunktioner (normerade)

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

Söker T-ekvation:

$$w = \sum T_n(t)\, X_n(x)$$

$$\sum \left(T_n'' + 2T_n' + 4T_n + \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 T_n \right) X_n = \frac{1}{\pi}$$

$$T_n'' + 2T_n' + 4T_n + \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 T_n = \left\langle \frac{1}{\pi}, X_n \right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \cdot (-1)^{n+1} = e_n$$

Begynnelsevillk:

$$T_n'(0) = 0\,; \quad T_n(0) = \langle w(x,0), X_n \rangle$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \right) \left\langle x^2, \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x \right\rangle$$

Karakteristiska ekvatione

$$p^2 + 2p + \left(4 + \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2\right) = 0$$

$$p_\pm = -1 \pm i\sqrt{4 + \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 - 1}$$

Allm. lösningen till homog. ekvatione

$$T_n^h(t) = e^{-t} \Big(A_n \sin \sqrt{3 + \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2}\, t$$

$$+ B_n \cos \sqrt{3 + \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2}\, t \Big)$$

lösningen till ohomogena ekvation

$$T_n^0(t) = \frac{e_n}{\pi\left(4 + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)}$$

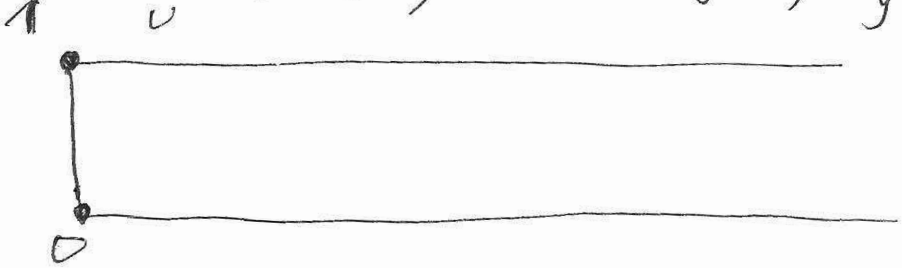
Söker A_n, B_n : $T_n(0)$:

$$\left.\begin{aligned} B_n + \frac{1}{\pi(4+(n+\frac{1}{2})^2)} &= T_n(0) \\ T_n'(0) &= 0: \\ A_n\sqrt{3+(n+\tfrac{1}{2})^2} - B_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ur det systemet hittar A_n, B_n.

4. $u_{xx} + u_{yy} + 4u = 0$;

$x > 0$; $u(0,y) = 0$, $u_y(x,1) = 0$, $u(x,0) = 1$, $x < c$, $u(x,0) = 0$, $x > c$.



Vi har randvillkoret $u(0,y) = 0$; därför använder vi sin-Fourier i x-led, eftersom sin har det här randvärdet

$$U(\xi,y) = \mathcal{F}^{\sin}_{x\to\xi}\, u(x,y)$$

$$-\xi^2 U(\xi,y) + U_{yy}(\xi,y) + 4U(\xi,y) = 0$$

För U får vi allm. lösningen

$$U(\xi,y) = A(\xi)e^{\sqrt{\xi^2-4}\,y} + B(\xi)e^{-\sqrt{\xi^2-4}\,y}.$$

A, B hittas ur randvillkoren.

$$U(\xi,0) = \mathcal{F}^{\sin}(u(x,0)) = \int_0^c \sin x\xi\, dx = \left(\frac{1-\cos(c\xi)}{\xi}\right)$$

$$U_y(\xi,0) = 0$$

Så

$$\begin{cases} A(\xi) + B(\xi) = \dfrac{1-\cos(c\xi)}{\xi} \\ A(\xi)\sqrt{\xi^2-4}\,e^{\sqrt{\xi^2-4}} - B(\xi)\sqrt{\xi^2-4}\,e^{-\sqrt{\xi^2-4}} = 0 \end{cases}$$

$$A(\xi) = \frac{1-\cos(c\xi)}{\xi}\left(1+e^{2\sqrt{\xi^2-4}}\right)^{-1}$$

$$B(\xi) = \frac{e^{2\sqrt{\xi^2-4}}}{1+e^{2\sqrt{\xi^2-4}}} \cdot \frac{1-\cos(c\xi)}{\xi}$$

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \left(A(\xi)\, e^{\sqrt{\xi^2-4}\,y} + B e^{-\sqrt{\xi^2-4}\,y}\right) \sin x\xi \, d\xi$$

5. $f(x) = \int_{-1}^{1} \sqrt{e^{\xi}+1}\, e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$

Det betyder att

$\hat{f}(\xi) = 2\pi F(\xi)$, $F(\xi) = \sqrt{e^{\xi}+1}$, $\xi \in (-1,1)$

$F(\xi) = 0$, $\xi \notin [-1,1]$

och i punkterna ± 1 bestäms $\hat{f}(\xi)$ enligt inversionssatsen (som används till $\hat{f}$):

$$\hat{f}(1) = 2\pi \left(\frac{F(1+0)+F(1-0)}{2} \right)$$

$$\hat{f}(-1) = 2\pi \left(\frac{F(-1+0)+F(1-0)}{2} \right).$$

Plancherel: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} (e^{\xi}+1)\, d\xi = 2\pi(2+e-e^{-1}).$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ är F-transformation av f i punkten $\xi = 0$,

$\hat{f}(0) = 2\pi\sqrt{2}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx$ är F-transformation av f i punkten $\xi = -1$; $= \pi\sqrt{e^{-1}+1}$

$\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{5ix} dx \overset{\text{Plancherel}}{=}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, \widehat{g e^{-5ix}}(\xi)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{-5ix} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{\overline{g(x) e^{-5ix}}}\, dx$$

$$\overset{\text{Plancherel}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\left(\widehat{\overline{g} e^{+5ix}}\right)(\xi)}\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cdot \overline{\hat{g}(\xi+5)}\, d\xi$$

$= 0$ eftersom $f(\xi)$ och $\hat{g}(\xi+5)$ har sina stöd på olika intervall.

6. $u_{xx} + u_{yy} - u = 0$

$x \in (0, \pi)$, $y \in (0, 2\pi)$

$u(x,0) = 2\sin(2x) + 3\sin(3x)$, $x \in (0,\pi)$

$u = 0$ på resten av randen.

Vi använder F-serie i ~~y-led~~ x-led.

$u(x,y) = \sum c_n(y) \sin nx$

sätter in i ekvationen

$\sum c_n'' \sin nx - \sum c_n n^2 \sin nx - \sum c_n \sin nx = 0$

$c_n'' - c_n(n^2+1) = 0$.

För c_n får randvillkoren:

$u(x,0) = \sum c_n(0) \sin nx = 2\sin 2x + 3\sin 3x$

$c_2(0) = 2$, $c_3(0) = 3$, alla andra $= 0$.

$u(x, 2\pi) = 0$; $\sum c_n(2\pi) \sin nx = 0$,

$c_n(2\pi) = 0$

$c_n'' - c_n(n^2+1) = 0$. om $n \neq 2, 3$, så blir lösningen $c_n = 0$.

$n = 2$: $c_2'' - 5c_2 = 0$; $c_2(0) = 2$, $c_2(2\pi) = 0$,

allm. lösningen: $c_2(y) = A_2 e^{\sqrt{5}y} + B_2 e^{-\sqrt{5}y}$,

$A_2 + B_2 = 2$, $A e^{\sqrt{5}2\pi} + B e^{-\sqrt{5}2\pi} = 0 \Rightarrow$ hittar A_2, B_2

$n = 3$. $c_3'' - 10c_3 = 0$; $c_3(0) = 3$, $c_3(2\pi) = 0$

$c_3(y) = A_3 e^{\sqrt{10}y} + B_3 e^{-\sqrt{10}y}$, $A_3 + B_3 = 3$,

$A_3 e^{\sqrt{10}\cdot 2\pi} + B_3 e^{-\sqrt{10}\cdot 2\pi} = 0 \Rightarrow$ hittar A_3, B_3