Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables, typgodkänd räknedosa

MATEMATIK | Telefon: Elisabeth Wulcan 0762-721860

Chalmers tekniska högskola | 2006–08–31 kl. 08.30–13.30

Fourieranalys F2/Kf2, MVE030, 4 poäng TMA132,5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer, kurskod samt linje och inskrivningsår.

---

1. Med hjälp av utveckling i Fourier-Bessel serie hitta en radial lösning $u(r,t)$ av randvärdeproblem för värmeekvationen $u_t = 4\Delta u$ i cirkelskivan $r < 1$ med begynnelsevillkoret $u(r,0) = r^2$ och randvillkoret $u(r,t) = 1$ för $r = 1$.

2. a) **MVE030** Bevisa att andraderivatan av $(x^2-1)^{n+1}$ är lika med $2(n+1)(2n+1)(x^2-1)^n + 4n(n+1)(x^2-1)^{n-1}]$. Med hjälp av detta och definitionen av Legendrepolynomer bevisa att $P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n$. Med hjälp av den sista formeln utveckla i serie i Legendrepolynomer funktionen $f(x)$: $f(x) = x, x \in (0,1), f(x) = 0, x \in (-1,0]$. (Värdet av $P_n(0)$ tas ur BETA).

   b) **TMA132** Med hjälp av konforma avbildningar hitta den elektrostatiska potentialen u i området $(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x > 0, y \in (0,1)$ som är lika med 0 på y-axeln $x = 0$, lika med 1 på linjen $y = 1$, lika med -1 på intervallet $0 < x < 1$ på x-axeln, och lika med 0 för $x > 1$ på x-axeln.

3. Med hjälp av Fouriertransformation hitta lösningen till ekvationen $u_{xx} + u_{yy} - 2u = 0$ i halvbandet $x > 0, y \in (0,1)$ med randvillkoren $u_x(0,y) = u_y(x,0) = 0$, $u(x,1) = 1, x < c, u(x,1) = 0, x > c$. Svaret ges i formen av en Fourierintegral.

4. Lös med hjälp av utvecklingen i Fourier serie i egenfunktioner av ett passande Sturm-Liouville problem vågekvationen

$$u_{tt} = u_{xx} + u, 0 < x < \pi, t > 0$$

   med randvillkoren $u(0,t) = 0, u_x(\pi,t) = 1$ och begynnelsevillkoren $u(x,0) = x^2/2$, $u_t(x,0) = 0$.

5. Formulera integreringsregeln för Fourierserier. Med hjälp av den regeln och F-serien för $f(\theta) = \theta^2, \theta \in (-\pi,\pi)$ (ur BETA) bevisa att

$$\theta^4 - 2\pi^2\theta^2 = 48\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}\cos(n\theta)}{n^4} - \frac{7\pi^4}{15}$$

   för $\theta \in (-\pi,\pi)$. Hitta summan av serien för $\theta = 4\pi$.

6. Lös Laplaceekvationen $u_{xx} + u_{yy} = 0$ i rektangeln $x \in (0,\pi), y \in (0,2\pi)$ med randvillkoren $u(x,0) = \sin x - 2\sin(2x) + 3\sin(3x), x \in (0,\pi)$, $u = 0$ på resten av randen. Använd F-serie i x-led.

7. a) **MVE030** Låt $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ vara ett ortonormalt system i $L^2(a,b)$. Ange tre villkor som alla var för sig är ekvivalent med att $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ är ett fullständigt system (en bas) i $L^2(a,b)$ (Sats 3.4). Beviset krävs. Ge exempel på ortonormala system vilka är en bas, och vilka inte är bas. Vilka system är ortogonala på hela axeln, på halvaxeln??

   b) **TMA132** Berätta så mycket som du kan om strömproblem och om tillämpningen av konforma avbildningar för att lösa dem.

8. Berätta så mycket som du kan om relationer mellan egenskaper av funktionen och egenskaper av dennes Fourierserie.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas måndagen, den 11. sept. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 31.aug.

Fourieranalys F2 / Kf2
MVE030 , TMA132

Tentamen 060831 , Lösningar.

---

1. Randvillkoret är ohomogent, därför gör vi ett förberedelsesteg:

$v(r,t) = 1$, $u(r,t) = v(r,t) + w(r,t)$.

Funktionen $w(r,t)$ satisfierar ekvationen

$$w_t = 4\Delta w \;, \quad \text{med randv.} \quad w(1,t) = 0,$$

$$w(r,0) = r^2 - 1.$$

Separation av variabler:

$$w(r,t) = R(r)\cdot T(t),$$

$$\frac{R'' + rR'}{R} = \frac{T'}{4T} = -\mu^2.$$

$$R'' + rR' + \mu^2 R = 0 \;, \quad R(0) \text{ ändlig}, \; R(1) = 0$$

Besselekvation.

Lösningar:

$$R_n(r) = J_0(\lambda_n r), \quad \lambda_n \text{ - nollställen av } J_0.$$

$$\mu_n = \lambda_n$$

$$T_n(t) = T_n(0)\, e^{-\lambda_n t}$$

För att hitta $T_n(0)$, använder vi begynnelsevillkoret: $T_n(0) = \dfrac{\int_0^1 (r^2-1) J_0(\lambda_n r) r\,dr}{\int_0^1 J_0(\lambda_n r)^2 r\,dr}$

Nämnaren är lika med $\frac{1}{2} J_1(\lambda_n)^2$, täljaren beräknas som

$$\lambda_n^{-2} \int_0^{\lambda_n} (s^2 \lambda_n^{-2} - 1) J_0(s)\, s\,ds = \left(J_0(s)\, s = (J_1(s) s)' \right)$$

$$= \lambda_n^{-2} \int_0^{\lambda_n} (s^2 \lambda_n^{-2} - 1)(J_1(s) s)'\,ds \overset{\text{part. int}}{=}$$

$$= -\lambda_n^{-2} \int_0^{\lambda_n} 2 s \lambda_n^{-2} J_1(s)\, s\, ds$$

$$= \left(J_1(s) s^2 = \left(J_2(s) s^2 \right)' \right)$$

$$- 2 \int_0^{\lambda_n} \left(J_2(s) s^2 \right)' ds = -2 J_2(\lambda_n) \cdot \lambda_n^2 .$$

2a. Vi beräknar andraderivatan:

$$\left((x^2-1)^{n+1} \right)' = 2(n+1) x (x^2-1)^n$$

$$\left((x^2-1)^{n+1} \right)'' = 2(n+1) \left[(x^2-1)^n + 2n x^2 (x^2-1)^{n-1} \right]$$

Sätter $x^2 = x^2 - 1 + 1$ och kommer till

$$\left((x^2-1)^{n+1} \right)'' = 2(n+1)(2n+1)(x^2-1)^n + 4(n+1) n (x^2-1)^{n-1}$$

Sätter den derivatan i definitionen av Legendrepolynomen:

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{d^2}{dx^2} (x^2-1)^{n+1}$$

$$= \frac{(2n+1)}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n + P_{n-1}(x);$$

deriverar en gång till och kommer till

$$P_{n+1}' - P_{n-1}' = (2n+1) P_n . \qquad (*)$$

Utvecklingen: $f(x) = x,\ x > 0,\ 0,\ x < 0.$

$$f(x) = \sum c_n P_n(x);$$

$$c_n = \frac{\int_0^1 P_n(x) f(x)}{\int_0^1 P_n(x)^2 dx} = (2n+1) \int_0^1 x P_n(x) dx.$$

För att beräkna integralen använder vi formeln (*), för $n \geq 1$

$$\int_0^1 x P_n(x)\,dx = \int_0^1 x\left(P'_{n+1} - P'_{n-1}\right)dx$$

partiell integr.

$$= - \int_0^1 \left(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\right)dx.$$

För att hitta $\int_0^1 P_k(x)\,dx$ använder (*) en gång till, $k \geq 1$

$$\int_0^1 P_k(x)\,dx = \int_0^1 \left(P'_{k+1} - P'_{k-1}\right)dx$$

$$= P_{k+1}(1) - P_{k-1}(1) - P_{k+1}(0) + P_{k-1}(0).$$

Eftersom $P_n(1) = 1$, ~~$P_n(0) = (-1)^n$~~

och $P_{2l+1}(0) = 0$, $P_{2l}(0) = \dfrac{(-1)^l (2l)!}{2^{2l}(l!)^2}$

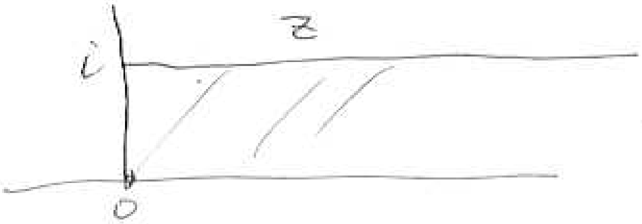
hittar vi att

$$\int_0^1 P_k(x)\,dx = 0, \text{ för jämna } k,$$

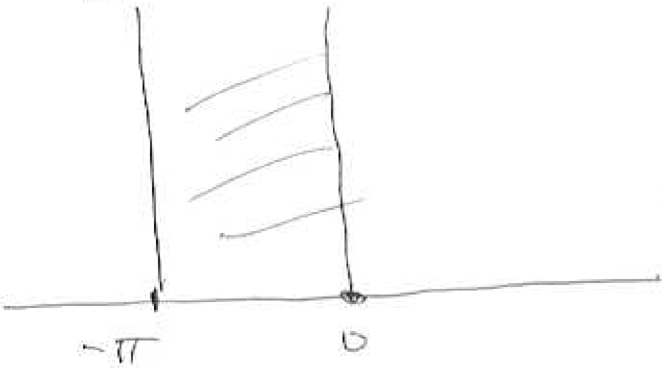
$$\int_0^1 P_{2l+1}(x)\,dx = \frac{(-1)^{l+1}(2(l+1))!}{2^{2l+2}((l+1)!)^2} - \frac{(-1)^l (2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\,;\quad c_n = (2n+1)\left(P_{n-2}(0) - 2P_n(0) + P_{n+2}(0)\right)$$

För $n=0$, $n=1$ – separata beräkningar, med konkreta värden av $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$.

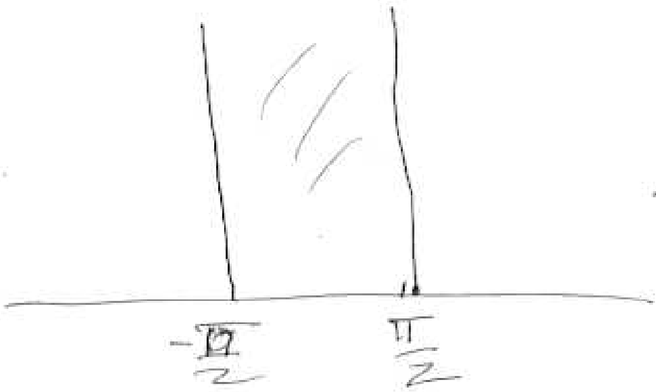
2b. Halvbandet: $x > 0$, $y \in (0,1)$ transformeras till övre halvplanet:



$\xrightarrow{w_1 = \pi z \cdot i}$



$\xrightarrow{w_2 = w_1 + \frac{\pi}{2}}$



$\longrightarrow$ ~~sh w_1~~

$w = -\sin w_1$

övre halvplanet.

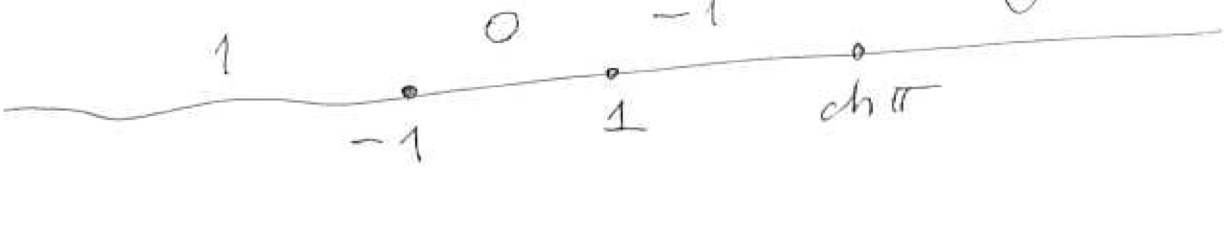
$$w = f(z) = -\sin w_1 = -\sin(w_1 + \tfrac{\pi}{2})$$

$$= -\sin\left(\pi z \cdot i + \tfrac{\pi}{2}\right) =$$

$$\cos(\pi z \cdot i).$$

$f(0) = 1$, $f(i) = -1$, $f(1) = \mathrm{ch}\,\pi$

värden av bilden av vår funktion $u(z)$:



5

$$v(w) = A\arg(w+1) + B\arg(w-1) + \cancel{C\arg(w-\cosh\pi)} + C\arg(w-\cosh\pi) + D\pi$$

A, B, C, D hittar:

$$\left.\begin{aligned} \pi(A+B+C+D) &= 1 \\ \pi(B+C+D) &= 0 \\ \pi(C+D) &= -1 \\ \pi D &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} D &= 0 \\ C &= -1/\pi \\ B &= -1/\pi \\ A &= 1/\pi \end{aligned}$$

$$v(w) = \frac{1}{\pi}\left(\arg(w+1) - \arg(w-1) + \arg(w+\cosh\pi)\right)$$

$$u(z) = v(w(z)) = v(\cos(\pi z)).$$

(6)

3. $u_{xx} + u_{yy} - 2u = 0$, $x>0$, $y \in (0,1)$

$u_x(0,y) = u_y(x,0) = 0$, $u(x,1) = \begin{cases} 1, & x<c \\ 0, & x>c \end{cases}$.

Randvillkoret i $x=0$ är $u_x(0,y)=0$.

Vi gör Cos - Fourier transformation i x-led, därför att derivatan av Cos i $x=0$ är 0.

$$U(\xi,y) = \int_0^\infty u(x,y)\cos\xi x \, dx.$$

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty U(\xi,y)\cos\xi x \, d\xi$$

$$u_x(x,y) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \xi U(\xi,y)\sin\xi x \, d\xi$$

$$u_{xx}(x,y) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \xi^2 U(\xi,y)\cos\xi x \, d\xi$$

$$u_{yy}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty U_{yy}(\xi,y)\cos\xi x \, d\xi$$

Sätter in i ekvationen:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(U_{yy} - \xi^2 U - 2U\right)\cos\xi x \, d\xi = 0$$

$$U_{yy} - \xi^2 U - 2U = 0$$

Randvillkoren för U:

för $y=0$: $U_y(0)=0$

för $y=1$:

$$U(\xi,1) = \int_0^\infty u(x,1)\cos x\xi \, dx = \int_0^c \cos x\xi \, dx$$

$$= \frac{\sin c\xi}{\xi}.$$

$$U_{yy} - (\xi^2+2)U = 0$$

$$U_y(\xi,0) = 0, \quad U(\xi,1) = \frac{\sin c\xi}{\xi}$$

$$U = A e^{\sqrt{\xi^2+2}\,y} + B e^{-\sqrt{\xi^2+2}\,y}$$

$$U_y(\xi,0) \colon \; A - B = 0$$

$$U = A\cosh(\sqrt{\xi^2+2}\,y)$$

$$U(\xi,1) = A\cosh(\sqrt{\xi^2+2}\cdot 1) = \frac{\sin c\xi}{\xi}$$

$$A = \frac{\sin c\xi}{\xi}\cdot\frac{1}{\cosh\sqrt{\xi^2+2}}$$

$$U(\xi,y) = \frac{\sin c\xi}{\xi}\cdot\frac{\cosh(\sqrt{\xi^2+2}\,y)}{\cosh(\sqrt{\xi^2+2})}.$$

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin c\xi}{\xi}\,\frac{\cosh(\sqrt{\xi^2+2}\,y)}{\cosh(\sqrt{\xi^2+2})}\cos x\xi\,d\xi$$

4. $u_{tt} = u_{xx} + u \quad , 0 < x < \pi \, , \, t > 0$

$$u(0,t) = 0 \, , \quad u_x(\pi,t) = 1$$

$$u(x,0) = \frac{x^2}{2} \, , \quad u_t(x,0) = 0 .$$

Randvillkoret är ohomogent. Förberedelse -steget:

$$v(x,t) = \frac{x^2}{2} \, , \quad u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) .$$

$$w_{tt} = w_{xx} + \frac{x^2}{2} + 1 + w$$

$$w(0,t) = 0 \, , \quad w_x(\pi,t) = 0$$

$$w(x,0) = 0 \, , \quad w_t(x,0) = 0 .$$

Separerar variabler:

$$w(x,t) = X(x)\, T(t) .$$

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + 1 = -\lambda^2 + 1$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \, ; \quad X(0) = 0 \, , \, X'(\pi) = 0 .$$

egenfunktioner:

$$X_n(x) = A \sin\left(\frac{(2n+1)}{2} x\right) \, , \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Normering $A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $\lambda_n = \frac{2n+1}{2}$

Lösningen söks i formen

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\, X_n(t).$$

Sätter in i ekvationen

$$\sum T_n''(t) X_n(x) = \sum T_n(t) X_n''(x)$$
$$+ \sum T_n(t)\, X_n(x) + \frac{x^2}{2} + 1 .$$

Kommer ihåg att $X_n'' = -\lambda_n^2 X_n$,
multiplicerar med X_k och integrerar

$$T_n''(t) + T_n(t)(\lambda_n^2 - 1) = \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) X_n(x)\, dx$$
$$= c_n .$$

Begynnelsevillkoren:
$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0$$
Löser ordinära differentialekvationen,

$$T_n(t) = \frac{1}{\lambda_n^2 - 1}\left(\cos\left(\sqrt{\lambda_n^2 - 1}\right)t\right) - 1) .$$

5. Vi har $f(\theta)=\theta^2$, $-\pi<\theta<\pi$

$$f(\theta)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\theta$$

Integrerar. $c_0=0$, $C_0=\int_{-\pi}^{\pi}F(\theta)d\theta=0$.

$$F(\theta)=\int_0^{\theta}f(\varphi)d\varphi=\frac{\theta^3}{3}$$

$$F(\theta)=\frac{\pi^2}{3}\theta+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin n\theta.$$

$$\frac{\theta^3}{3}-\frac{\pi^2}{3}\theta=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin n\theta$$

Integrerar igen:

$$G(\theta)=\int_0^{\theta}\left(\frac{\varphi^3}{3}-\frac{\pi^2}{3}\varphi\right)d\varphi=\frac{\theta^4}{12}-\frac{\pi^2\theta^2}{6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}G(\theta)d\theta=2\frac{\pi^5}{60}-2\pi^2\frac{\pi^3}{18}=-\frac{7}{90}\pi^5$$

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(\theta)d\theta=-\frac{\pi^4\cdot 7}{180}$$

$$\frac{\theta^4}{12}-\frac{\pi^2\theta^2}{6}=-\frac{\pi^4\cdot 7}{180}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos n\theta.$$

Det är vår formel. Det är samma som för $\theta=0$ för $\theta=4\pi$ summan är samma som för $\theta=0$ eftersom summan är 2π-periodisk,

$$\frac{7\pi^4}{15\cdot 48}$$

6. $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,0) = \sin x - 2\sin 2x + 3\sin(3x)$

$u(x, 2\pi) = 0$, $u(0, y) = 0$, $u(\pi, y) = 0$.

F-serie i x-led.

vi väljer sin-serie.

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin nx$$

Sätter in i ekvationen.

$$u_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) n^2 \sin(nx)$$

$$u_{yy} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(y) \sin(nx)$$

$$\sum \left(f_n''(y) - f_n(y) n^2\right) \sin(nx) = 0$$

$$f_n'' - n^2 f_n = 0$$

för $y = 2\pi$: $\sum f_n(2\pi) \sin nx = 0$,

$f_n(2\pi) = 0$;

för $y = 0$: $\sum_1 f_n(0) \sin nx = \sin x - 2\sin 2x + 3\sin 3x$

$f_1(0) = 1$, $f_2(0) = -2$, $f_3(0) = 3$,

alla andra $f_n(0) = 0$.

Löser ~~system~~ ekvationen.

$f_1'' - \cancel{1} f_1 = 0$, $f_1(0) = 1$, $f_1(2\pi) = 0$

$f_2'' - 4 f_2 = 0$, $f_2(0) = -2$, $f_2(2\pi) = 0$

$f_3'' - 9 f_3 = 0$, $f_3(0) = 3$, $f_3(2\pi) = 0$

$f_n'' - n^2 f_n = 0$, $f_n(0) = 0$, $f_n(2\pi) = 0$, $n > 3$.

$$f_1(y) = -\frac{\sinh(2\pi - y)}{\sinh 2\pi}$$

$$f_2(y) = \frac{2\sinh(2(2\pi - y))}{\sinh(4\pi)}$$

$$f_3(y) = -\frac{3\sinh(3(2\pi - y))}{\sinh(6\pi)}$$

$$f_n(y) = 0, \quad n > 3$$