V23

Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK Telefon: Niclas Andréasson0762721860
Chalmers tekniska högskola 2005–08–25 kl. 8.30 - 13.30

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som minimerar
$$\int_0^\infty (2e^{-x/2} - P(x))^2 e^{-x} dx.$$

2. Låt $f(x) = \eta(x-1) - \eta(x+1)$. Hitta med hjälp av Fouriertransformation eller Laplacetransformation lösningen till problemet
$$u_{xx} + 3u_x = u_t,\ x \in (-\infty, \infty),\ t \in (0, \infty),\ u(x, 0) = f(x).$$

3. Med hjälp av konformavbildningar hitta en harmonisk funktion i området utanför två tangerande cirklar $|z| < 1$ och $|z - \frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$, vilken har värdet 1 på den första cirkeln och värdet 2 på den andra cirkeln.

4. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$ där
$$|\hat{f}(\omega)| = 0,\ |\omega| < 2, |\hat{f}(\omega)| = 1, 2 \le |\omega| < 5, |\hat{f}(\omega)| = |\omega|^{-1}, |\omega| \ge 5.$$
För $\alpha > 0$ definieras funktionen $g_\alpha(t)$ som $g_\alpha(t) = \frac{\sin \alpha t}{\pi t}$. Bestäm funktionen $h(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |(g_\alpha * f)(t)|^2 dt$.

5. Utveckla funktionen $f(\theta) = \cos(-\theta/2)$ i en komplex Fourierserie på intervallet $(-\pi, \pi)$. Vilka formler ger serien för $\theta = 0, \pi/2, -\pi/2, -\pi, \pi$? Vilka Fourierutvecklingar får man med integrering av serien?? Med derivering av serien?? Formulera motsvarande regler.

6. Lös problemet
$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + u, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) = 0, u'_x(\pi, t) = 1, & u(x, 0) = x \end{cases}$$

7. Formulera och bevisa Fouriers inversionssats (valfritt version)

8. (utan bevis)

   a) Definition av derivata av en distribution. Motivering. Exempel av derivering av distributioner som inte ges av kontinuerliga funktioner.

   b) Villkoren för uniform och absolut konvergens av Fourierserier.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas 10. september.
G.Rozenblioum

GR

Tenta i Fourieranalys TMA132

2005-08-25

Lösningsförslag.

1. Laguerrepolynomer $L_n(x)$ är ortogonala polynomer i $L_2(0,\infty)$ med vikten e^{-x}. Därför är $P(x)$ en linjärkombination,

$$P(x) = \alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x)$$

$$\alpha_n = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} L_n(x) e^{-x} dx.$$

För att beräkna α_n, använder vi genererande funkt.

$$\sum L_n(x) z^n = \frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z}.$$

Så har vi

$$\sum \alpha_n z^n = \sum \int_0^\infty L_n(x) z^n e^{-\frac{x}{2}-x} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}-\frac{x}{2}-x}}{1-z} dx = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{z}{z-1}}$$

$$= \frac{2}{3}\left(1-\frac{z}{3}\right)^{-1}.$$ Utveckla i Taylorserie

$$= \frac{2}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\dots\right) = \frac{2}{3}+\frac{2}{9}z+\frac{2}{27}z^2$$

$$P(x) = \frac{2}{3} L_0(x) + \frac{2}{9} L_1(x) + \frac{2}{27} L_2(z)$$

2. Vi gör F-transform i x-led:

$$-\xi^2 \hat{u}(\xi,t) + 3i\xi\, \hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_t(\xi,t) \quad (1)$$

$$\hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi).$$

Löser differentialekvation (1):

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi) \cdot e^{-(\xi^2-3i\xi)t}$$

För att transformera den andra faktorn, gör vi kvadratkomletering:

$$\xi^2 - 3i\xi = \left(\xi - \tfrac{3}{2}i\right)^2 + \tfrac{9}{4}$$

Vi hittar den inversa F-transform av

$$e^{-(\xi^2-3i\xi)t} = e^{-\frac{9}{4}t}\, e^{-(\xi-\frac{3}{2}i)^2 t}.$$

Vi har:

$$e^{-\xi^2 t} \overset{\mathcal{F}}{\subset} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

$$e^{-(\xi-\frac{3}{2}i)^2 t} \overset{\wedge}{\subset} e^{-\frac{x^2}{4t}}\, e^{-\frac{3}{2}x}$$

(regel 3, s. 223 Folland)

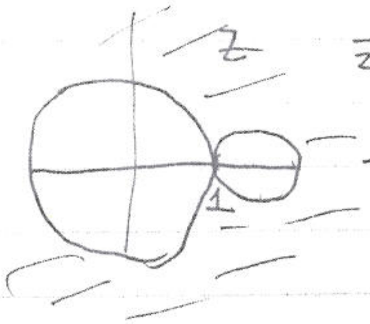
$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-\frac{9}{4}t} \hat{f}(\xi) \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{4t}-\frac{3}{2}x}\right)^{\wedge}$$

Enligt regel 8, Folland

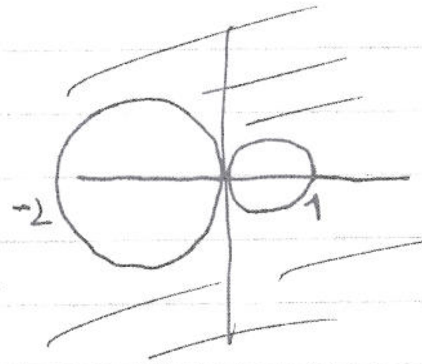
$$u(x,t) = e^{-\frac{9}{4}t} (2\pi)\, f * e^{-\frac{x^2}{4t}-\frac{3}{2}x}$$

$$= -e^{-\frac{9}{4}t}(2\pi) \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t} - \frac{3}{2}(x-s)}\, ds.$$

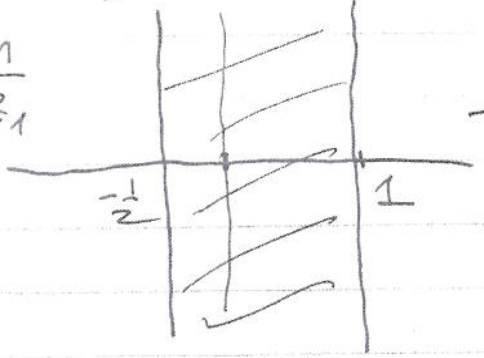
3. Vi konstruerar stegvis en konformavbildning av vårt område till det övre halvplanet



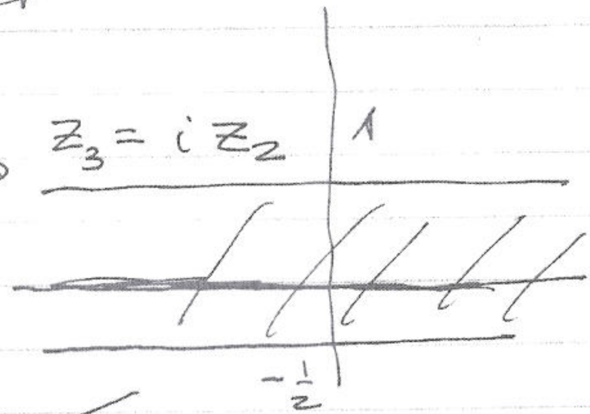
$z_1 = z - 1$



$z_2 = \frac{1}{z_1}$



$z_3 = i z_2$

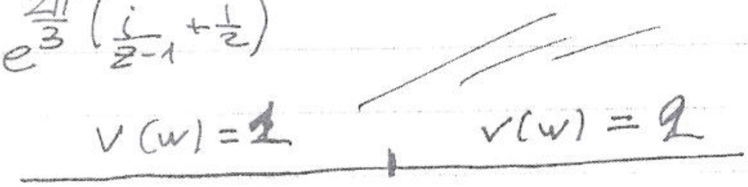


$z_4 = \left(z_3 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi \cdot 2}{3}$

$w = e^{z_4}$

övre halvplanet

$w(z) = e^{\frac{2\pi}{3}\left(\frac{i}{z-1} + \frac{1}{2}\right)}$



Vi söker en harmonisk funktion $v(w)$ i halvplanet som är lika med 1 för w reelt, $w<0$, och lika med 2 för w reelt, $w>0$, med hjälp av arg: $v(w) = 2 - \frac{1}{\pi} \arg w$

$$u(z) = v(w(z)) = 2 - \frac{1}{\pi} \arg\left(e^{\frac{2\pi}{3}\left(\frac{i}{z-1} + \frac{1}{2}\right)}\right).$$

4. Vi har $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \left((g_\alpha * f)(t) \right) \right|^2 dt$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{(g_\alpha * f)}(\omega) \right|^2 d\omega$$

enligt Parceval

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{g}_\alpha(\omega) \cdot \hat{f}(\omega) \right|^2 d\omega$$

$$\hat{g}_\alpha(\omega) = \chi_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \alpha \\ 0, & |\omega| > \alpha \end{cases}.$$

Därför är vår integral lika med

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Om $\alpha \leq 2$, så $|f(\omega)| = 0$, $|\omega| < \alpha$, integralen$=0$.

Om $2 < \alpha \leq 5$, $I = \int_2^\alpha d\omega = \alpha - 2$.

Om $\alpha > 5$,

$$I = \int_2^5 d\omega + \int_5^\alpha \omega^{-2} d\omega = 3 + (5^{-1} - \alpha^{-1}).$$

$\cos\theta/2$

5. Funktionen $f(\theta) = \cos(-\theta/2)$ är periodisk på $(-\pi, \pi)$, $\cos\frac{\pi}{2} = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$,

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta/2)\,d\theta = \frac{2}{\pi} \quad , n = 0$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}\right)e^{-in\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta}}{-i(n+\frac{1}{2})} + \frac{e^{-i(n-\frac{1}{2})\theta}}{-i(n-\frac{1}{2})}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2\pi}\frac{(-1)^n}{-i}\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{+i\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{1}{n+}\right.}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{-i(n+\frac{1}{2})}(-1)^n\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{2}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{-i(n-\frac{1}{2})}(-1)^n\left(e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n}{n^2-\frac{1}{4}}.$$

$$f(\theta) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{(-1)^n}{n^2-\frac{1}{4}}e^{in\theta}$$

Funkt. $f(\theta)$ är kontinuerligt, därför är summan lika med $f(\theta)$ för alla θ.

Att derivera är möjligt, eftersom f' är styckvis kontinuerligt

$$f'(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{(-1)^n\cdot(in)}{n^2-\frac{1}{4}}.$$

För att integrera;

$$F(\cancel{x}) = \int_0^x f(\theta)\,d\theta = 2\sin\frac{x}{2} \;;\quad \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx = 0.$$

$$F(x) = c_0 x + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx}$$

$$= \frac{2}{\pi} x + \sum_{n\neq 0} \frac{(-1)^n}{in(n^2-\frac{1}{4})}$$

6. Randvillkoren är ohomogena, därför förberedelsesteget krävs: vi får $w(x,t)$, en enkel funktion som satisfierar randvillkoren. Vi får $w(x,t) = x$. Söker $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$. Sätter in i problemet, och får

$$v_{xx} = v_t + v + x$$

$$v(0,t) = 0, \quad v_x(\pi, t) = 0, \quad v(x,0) = 0.$$

Söker Sturm-Liouville problemet - separerar variabler, $v(x,t) = X(x)\,T(t)$ och sätter in i

$$X(x)''\,T(t) = XT' + XT \qquad v_{xx} = v_t + v$$

$$\frac{X(x)''}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = -\lambda$$

Sturm-Liouville problemet: $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \; X'(\pi) = 0 \end{cases}$

Den standarta lösning av S-L problemet ger $X_n(x) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $\lambda = \lambda_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2$.

Söker lösningen i formen $v(x,t) = \sum T_n(t)\,X_n(x)$.
Sätter in i ekvationen

$$\sum T_n(t)\,X_n''(x) = \sum T_n'(t)\,X_n(x) + \sum T_n X_n(x) + x.$$

Multiplicerar med $X_k(x)$ och integrerar alla termer utom $n=k$ försvinner.

$$-\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 T_n(t) = T_n'(t) + T_n(t) + d_n,$$

$$d_n = \int_0^\pi x\,X_n(x)\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

$T_n(0) = 0$, eftersom $V(x,0) = 0$.

$$T_n' = -\left(1+\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2\right) T_n - d_n.$$

Löser ekvationen och hittar

$$T_n(t) = -d_n\left(1+\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2\right)^{-1}\left(1-e^{-\left(1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)t}\right).$$

Svar: $u(x,t) = x - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left(1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-1}\left(1-e^{-\left(1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)t}\right) \times \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x$