2015

Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa

MATEMATIK Telefon: Fredrik Nilsson, 0740–459022

Chalmers tekniska högskola 2001–03–09 kl. 8.45-13.45

TMA132 (även TMA131 på 3 poäng) Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Bestäm ett reellt polynom $P(x)$ av högst andra graden sådant att integralen $\int_{-1}^{1}[P(x) - \cos(\pi x)]^2\,dx$ blir minimal.

2. Låt funktionen f definieras av $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{ix\xi}}{\sqrt{1+\xi^2}}\,d\xi$. Beräkna

$$(a)\quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx, \qquad (b)\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)\,dx.$$

3. Lös, med hjälp av Fouriertransformering i x–led, begynnelsevärdesproblemet:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2u_x + u, & t > 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = f(x), & f \in L^1, & \hat{f} \in L^1, \\ u(x,t) \text{ begränsad} & \text{då } t \to \infty. & \end{cases}$$

4. **4N.** (för studenter som tenterar den nya kursen TMA132)

Bestäm, m.h.a. konforma avbildningar, lösningen till följande stationära värmeledningsekvation:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\pi/2 < x < \pi/2, & y > 0, \\ u(-\pi/2, y) = u(\pi/2, y) = 0, & & y > 0, \\ u(x,0) = 1, & -\pi/2 < x < \pi/2. & \end{cases}$$

4G. (för studenter som tenterar den gamla kursen TMA131)

Lös följande inhomogena värmeledningsekvation:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = xe^t, & 0 < x < \pi, & t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi. & \end{cases}$$

5. Bestäm en begränsad lösning till ekvationen:

$$\begin{cases} u_t = \nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}, & 0 < r < 1,\ t > 0, & 0 \le \theta < 2\pi, \\ u(1,\theta,t) = 0, & u(r,\theta,0) = r\sin\theta, & t > 0. \end{cases}$$

6. Bevisa samplingssatsen: Antag $f \in L^2$, $\hat{f}(\omega) = 0$ för $|\omega| \ge \Omega$, (bandbegränsad signal). Då kan f återvinnas ur den samplade signalen som består av f:s värde i punkter $t_n = n\pi/\Omega$; $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Dvs

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)\frac{\sin(n\pi - \Omega t)}{(n\pi - \Omega t)}.$$

7. Bevisa Bessel's olikhet (I): Antag att f är 2π-periodisk, Riemannintegrerbar på $[-\pi,\pi]$. C_n är, komplexa Fourierkoefficienter till f. Då är

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2\,d\theta.$$

MA

Lösningar TMA132 (TMA 131, 3 poäng) för F2/Kf2, 5 poäng, 2001-03-09

1) Bestäm ett reellt polynom $P(x)$ av högst andra graden sådant att integralen $\int_{-1}^{1}[P(x)-\cos(\pi x)]^2dx$ blir minimal.

Lösning: Integralen blir minimal då $P(x)=\sum_{n=0}^{2} c_n P_n(x)$, där

$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} P_n(x)\cos(\pi x)dx$, $n=0,1,2$; P_n = Legendre polynom.

$P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$.

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos(\pi x)dx = \{\text{jämn}\} = \int_0^1 \cos(\pi x)dx = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\Big|_0^1 = 0.$$

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x\cos(\pi x)\,dx = \{\text{udda integrand}\} = 0.$$

$$c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(3x^2-1)\cos(\pi x)dx = \frac{15}{4}\int_{-1}^{1}x^2\cos(\pi x)dx - \frac{5}{2}c_0 = \{\text{jämn integrand}\}$$

$$= \frac{15}{2}\int_0^1 x^2\cos(\pi x)dx = [PI] = \frac{15}{2}\Big[x^2\cdot\frac{1}{\pi}\cancel{\sin(\pi x)}^{\,0}\Big]_0^1 - \frac{15}{2}\int_0^1 2x\cdot\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)dx$$

$$= -\frac{15}{\pi}\Big[x\cdot\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\Big]_0^1 + \frac{15}{\pi}\underbrace{\int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{\pi}dx}_{0} = \frac{15}{\pi^2}\cos(\pi) = -\frac{15}{\pi^2}.$$

$$\therefore\ \underline{\underline{P(x) = c_2P_2(x)}} = -\frac{15}{\pi^2}\,\frac{1}{2}(3x^2-1) = \underline{\underline{\frac{15}{2\pi^2}-\frac{45}{2\pi^2}x^2}}$$

---

2) Låt funktionen $f(x)$ definieras av $f(x)=\int_0^1 \frac{e^{ix\xi}}{\sqrt{1+\xi^2}}d\xi$.

Beräkna a) $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$, b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)dx$.

Lösning

a) Enligt Fouriers inversionsformel $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$. Det följer att

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases}\frac{2\pi}{\sqrt{1+\xi^2}}, & 0<\xi<1\\ 0 & \text{annars.}\end{cases}$$

(P.g.a. entydigheten hos invers Fouriertransform.)

Parsevals $\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi = 2\pi\int_0^1\frac{d\xi}{1+\xi^2} = 2\pi\arctan(\xi)\Big|_0^1$$

$$= 2\pi\cdot\frac{\pi}{4} = \pi^2/2$$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left[\hat{f}(-1)+\hat{f}(1)\right].$$

Men $\hat{f}(-1)=0$ och eftersom $\xi=1$ är en diskontinuitetspunkt av $\hat{f}(\xi)$

$$\hat{f}(1) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}(1+)+\hat{f}(1-)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2\pi}{\sqrt{2}}+0\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}};\quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Svar; a) $\underline{\underline{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx = \pi^2/2}}$ b) $\underline{\underline{\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(x)dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}}$.

3) Lös, med hjälp av Fouriertransformering i x-led, begynnelsevärdesproblemet:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2u_x + u, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), & f \in L^1, \ \hat{f} \in L^1, \\ u(x,t) \text{ begränsad } & \text{då } t \to \infty. \end{cases}$$

Lösning $\quad u_{tt} = u_{xx} + 2u_x + u \xrightarrow[\text{i } x\text{-led}]{F\text{-transf.}} \hat{u}_{tt} = [(i\xi)^2 + 2(i\xi) + 1]\hat{u}$,

med den partiella (m.a.p. x) F-transformen

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-ix\xi}\, dx.$$

$$\because \ \hat{u}_{tt} = (1+i\xi)^2 \hat{u} \Rightarrow \hat{u}(\xi,t) = C_1(\xi)\, e^{(1+i\xi)t} + C_2(\xi)\, e^{-(1+i\xi)t}.$$

u begränsad då $t \to \infty \Rightarrow C_1(\xi) = 0$

$u(x,0) = f(x) \Rightarrow \hat{u}(\xi, 0) = C_2(\xi) = \hat{f}(\xi)$

$$\therefore \ \hat{u}(\xi,t) = e^{-(1+i\xi)t}\hat{f}(\xi)$$

Invers F-transform $\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi,t)\, e^{i\xi x}\, d\xi =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{-(1+i\xi)t} e^{i\xi x}\, d\xi = e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi(x-t)}\, d\xi$$

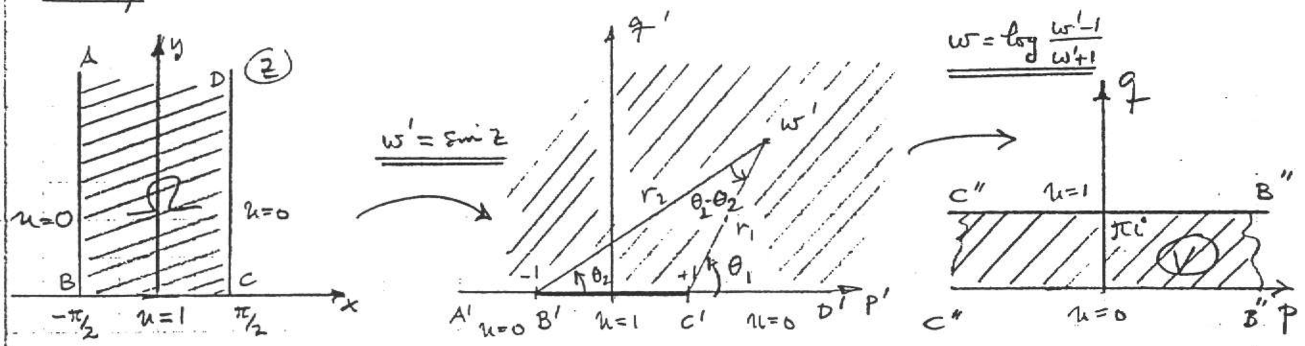
$$= e^{-t} f(x-t).$$

Svar: $\quad u(x,t) = e^{-t} f(x-t)$.

4) 4N. Bestäm, m.h.a. konforma avbildningar, lösningen till följande stationära värmeledningsekvation:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & -\pi/2<x<\pi/2,\quad y>0 \\ u(-\pi/2,y)=u(\pi/2,y)=0, & y>0 \\ u(x,0)=1, & -\pi/2<x<\pi/2. \end{cases} \qquad (*)$$

Lösning



$w'=\sin z$ och $w=\log\frac{w'-1}{w'+1}$ är analytiska funktioner som avbildar det aktuella området Ω till övre halvplan, resp. övre halvplan till bandet (V)

$$w=\log\frac{w'-1}{w'+1}=\log\frac{r_1}{r_2}+i(\theta_1-\theta_2),\quad (0<\theta_1<\pi,\ 0<\theta_2<\pi).$$

$u=\frac{1}{\pi}q$ def. på (V) är harmonisk och satisf. (*)

$$w=\log\frac{w'-1}{w'+1}=\ln\left|\frac{w'-1}{w'+1}\right|+i\arg\left(\frac{w'-1}{w'+1}\right),\quad w'=p'+iq' \quad\Rightarrow$$

$$q=\arg\left(\frac{p'-1+iq'}{p'+1+iq'}\right)=\arg\left(\frac{p'^2+q'^2-1+2iq'}{(p'+1)^2+q'^2}\right)=\operatorname{arccot}\left(\frac{p'^2+q'^2-1}{2q'}\right)$$

$$w'=\sin z \Leftrightarrow p'+iq'=\sin(x+iy)=\sin x\cosh(y)+i\cos x\sinh(y).$$

$$\therefore\ u=\frac{1}{\pi}q=\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\left(\frac{\sin^2x\cosh^2(y)+\cos^2x\sinh^2(y)-1}{2\cos x\sinh y}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\left(\frac{\sin^2x(1+\sinh^2(y))+\cos^2x\sinh^2(y)-1}{2\cos x\sinh y}\right)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\left(\frac{\sin^2x+\sinh^2(y)-1}{2\cos x\sinh(y)}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\left(\frac{\sinh^2(y)-\cos^2x}{2\cos x\sinh(y)}\right)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\left(\frac{1-(\cos x/\sinh(y))^2}{2(\cos x/\sinh(y))}\right)$$

$$=\{\tan\alpha:=\cos x/\sinh(y)\}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{\tan 2\alpha}\right)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}(\cot 2\alpha)=\frac{2\alpha}{\pi}$$

Svar: $u(x,y)=\frac{2}{\pi}\cdot\arctan\left(\frac{\cos x}{\sinh(y)}\right)$

4) 4G. Lös följande inhomogena värmeledningsekv:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x e^t, & 0<x<\pi,\ t>0, & (DE) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t>0, & (RV) \\ u(x,0) = 0, & 0<x<\pi. & (BV) \end{cases}$$

Lösning: Betrakta motsv. homogen problem: $u_t = u_{xx}$, $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$.

Variabelseparation leder till egenvärdesproblemet: $X'' = -\lambda X$, $X'(0) = X'(\pi) = 0$;

med egenfunktionen $X_n(x) = \cos(nx)$; $n \geq 0$.

Utv. för fixed t, xe^t i basen $\{\cos(nx)\}_{n=0}^{\infty}$.

$x e^t = e^t \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \right)$, dvs $x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$; $0<x<\pi$

(jfr. jämn utvidg. av F-serier).

$$n \neq 0: \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{x \frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi}}_{0} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n}\,dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

för $n=0$; $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi$.

$$\therefore \quad x e^t = \frac{\pi}{2} e^t + e^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos(nx).$$

Ansätt $\underline{u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\cos(nx)}$. (DE) + (BV) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\left[u_n'(t) + n^2 u_n(t)\right]\cos(nx) = \frac{\pi}{2}e^t + e^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos(nx) \\ u_n(0) = 0 \end{cases}$$

$n \neq 0$; $u_n'(t) + n^2 u_n(t) \overset{(*)}{=} \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)e^t$; $u_n(0) = 0$; Integrerande faktorn

är $I.F. = e^{n^2 t}$; $(*)\cdot(I.F.) \Leftrightarrow \left(u_n(t)e^{n^2 t}\right)' = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) e^{t(1+n^2)}$

dvs $u_n(t)e^{n^2 t} = \frac{2}{\pi n^2 (1+n^2)}\left((-1)^n - 1\right) e^{t(1+n^2)} + C$

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi n^2 (1+n^2)}\left((-1)^n - 1\right)e^t + Ce^{-n^2 t}, \quad u_n(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{-2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2 (1+n^2)}$$

$$\therefore \underline{u_n(t) = \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2 (1+n^2)}\left(e^t - e^{-n^2 t}\right)}.$$

$n=0$; $u_0'(t) = \frac{\pi}{2}e^t \Rightarrow u_0(t) = \frac{\pi}{2}e^t + C_0$, $u(0) = 0 \Rightarrow C_0 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{u_0(t) = \frac{\pi}{2}(e^t - 1)}$

Alltså:

Svar: $\underline{\underline{u(x,t) = \frac{\pi}{2}(e^t - 1) - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^t - e^{-(2k-1)^2 t}}{(2k-1)^2 \left(1 + (2k-1)^2\right)}\cos(2k-1)x.}}$

5.) Bestäm en begränsad lösning till ekvationen:

$$\begin{cases} u_t = D^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}, & 0<r<1,\ t>0,\ 0 \le \theta < 2\pi \\ u(1,\theta,t) = 0, \quad u \text{ begr.} & u(r,\theta,0) = r \sin\theta \end{cases}$$

Lösning. Variabelseparation: $u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t) \neq 0$;

$$R\Theta T' = \left(R'' + \tfrac{1}{r}R'\right)\Theta T + \tfrac{1}{r^2} R\Theta'' T \Rightarrow r^2 \frac{T'}{T} - \frac{r^2 R'' + rR'}{R} = \frac{\Theta''}{\Theta} = -\nu^2$$

$\Theta'' + \nu^2\Theta = 0$; $\Theta(\theta)$, 2π-periodisk $\Rightarrow \nu = n$ heltal ≥ 0:

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta), \quad n \ge 0$$

$$\frac{T'}{T} = \frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} - \frac{\nu^2}{r^2} = -\mu^2 \Rightarrow T' = -\mu^2 T \quad \wedge \quad R'' + \tfrac{1}{r}R' + \left(\mu^2 - \tfrac{\nu^2}{r^2}\right)R = 0$$

ekv. för R är Bessels diff-ekv av ord $\nu = n$; $\Rightarrow R(r) = A J_n(\mu r) + B Y_n(\mu r)$, $\mu \ge$

$R(r)$ begr. då $r \to 0+ \Rightarrow B = 0 \Rightarrow R(r) = A J_n(\mu r)$

$R(1) = 0 \Rightarrow J_n(\mu) = 0$. Låt $\mu_{n,k}$, $k = 1,2,\dots$ vara de positiva nollställena

till $J_n(x)$ då $R_{n,k}(r) = A_{n,k} J_n(\mu_{n,k} r)$ $\quad n \ge 0,\ k \ge 1$.

$$T'_{n,k} = -\mu_{n,k}^2 T_{n,k} \Rightarrow T_{n,k}(t) = C_{n,k} e^{-\mu_{n,k}^2 t}.$$

$$\therefore u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(P_{n,k}\cos(n\theta) + q_{n,k}\sin(n\theta)\right) J_n(\mu_{n,k} r)\, e^{-\mu_{n,k}^2 t}$$

$$u(r,\theta,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(P_{n,k}\cos(n\theta) + q_{n,k}\sin(n\theta)\right) J_n(\mu_{n,k} r) = r\sin\theta \Rightarrow$$

$P_{n,k} = 0$ för alla n,k, $q_{n,k} = 0$ för $n \neq 1$. Och

$\sum_{k=1}^{\infty} q_{1,k} \sin(\theta) J_1(\mu_{1,k} r) = r\sin\theta$; vilket ger $\sum_{k=1}^{\infty} q_{1,k} J_1(\mu_{1,k} r) = r$

$\|J_1(\mu_{1,k} r)\|^2 = \frac{1}{2} J_2^2(\mu_{1,k})$ (Thm 5.3). Men $J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)$ enl. (5.17)

så $J_2(\mu_{1,k}) \overset{\text{obs!}}{=} \{J_1(\mu_{1,k}) = 0\} \overset{(*)}{=} -J_0(\mu_{1,k})$; $\therefore \|J_1(\mu_{1,k} r)\|^2 = \frac{1}{2} J_0^2(\mu_{1,k})$.

$$\int_0^1 r J_1(\mu_{1,k} r)\, r\,dr = \{\mu_{1,k} r = x\} = \frac{1}{\mu_{1,k}^3}\int_0^{\mu_{1,k}} x^2 J_1(x)\,dx = \frac{1}{\mu_{1,k}^3}\int_0^{\mu_{1,k}} \frac{d}{dx}\left[x^2 J_2(x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{\mu_{1,k}^3}\left[x^2 J_2(x)\right]_0^{\mu_{1,k}} = \frac{1}{\mu_{1,k}} J_2(\mu_{1,k}) \overset{(*)}{=} -\frac{1}{\mu_{1,k}} J_0(\mu_{1,k})$$

$$\Rightarrow q_{1,k} = \frac{2}{J_0^2(\mu_{1,k})} \cdot \frac{-1}{\mu_{1,k}} J_0(\mu_{1,k}) = \frac{-2}{\mu_{1,k} J_0(\mu_{1,k})}$$

Varför Svar: $u(r,\theta,t) = -2\sin\theta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_{1,k} r)}{\mu_{1,k} J_0(\mu_{1,k})} e^{-\mu_{1,k}^2 t}$.