Fourieranalys, F2/Kf

MVE030 (TMA132)

TENTAKIT

Datum	Tenta	Lösning	Svar
2006-01-14	X	X	
2005-08-25	X	X	
2005-03-12	X	X	
2005-01-15	X		
2004-08-26	X	X	
2004-03-06			
2004-01-17	X	X	
2003-04-??			
2003-03-08	X	X	
2003-01-18	X	X	
2002-08-28	X	X	
2002-03-09	X	X	
2002-01-19	X	X	
2001-08-30	X	X	
2001-03-09	X	X	

24 februari 2006

Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa
Telefon:
2006–01–14 kl. 08.30–13.30

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. En lång cylinder har från början temperaturen 0 . Efter tiden $t = 0$ hålls mantelytan vid en periodiskt varierande temperatur. Bestäm temperaturutvecklingen i cylinderns inre. Den beskrivs av följande ekvationer:

$$u_t = \frac{1}{r}(ru_r)_r, \ 0 < r < b, t > 0,$$

$u(r,t)$ begränsad $u(r,0) = 0, u(b,t) = \sin t, t > 0$.
(*led: sök lösningen som en serie i Besselfunktioner.*)

2. Låt $F(\xi) = \int_1^5 \arctan(x^3)e^{-i\xi x}dx$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\cos\xi d\xi$.

3. Med hjälp av konforma avbildningar hitta den elektrostatiska potentialen u i området

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x > 0, 0 < y < x, x^2 + y^2 < 1$$

som är lika med 0 på x-axeln $y = 0$, lika med 1 på cirkelbågen $x^2+y^2 = 1$, lika med -1 på linjen $y = x, 0 < x < 1$.

4. Hitta lösningen till randvärdeproblemet

$$u_{xx} + u_{yy} = 1, \ 0 < x < \pi, 0 < y < \pi,$$

$$u(0,y) = 0, u(\pi,y) = \sin y, u(x,0) = u(x,\pi) = 0.$$

5. Bestäm samtliga egenvärden och tillhörande egenfunktioner till Sturm-Liouvilleproblemet

$$e^{-2x}\frac{d}{dx}(e^{2x}u'(x)) + \lambda u(x) = 0, \ u(0) = 0, u(1) + u'(1) = 0.$$

Beskriv egenskaper av egenfunktioner. Utveckla funktionen $f(x) = e^x$ i Fourierserie m.a.p. det systemet.

6. Utveckla funktionen $f(\theta) = \sin(\theta/2)+1$ i en komplex Fourierserie på intervallet $(-\pi,\pi)$. Vilka formler ger serien för $\theta = 0, \pi/2, -\pi/2, -\pi, \pi$? Vilka Fourierutvecklingar får man med integrering av serien?? Med derivering av serien?? Formulera motsvarande regler.

7. Formulera och bevisa Besselolikheten för Fourierserier. I vilket fall gäller ekvation i stället för Besselolikheten.

8. Ortogonala och ortonormala funktionssystem i Hibertrum. Hur transformerar man ett icke-ortogonalt system funktioner till ett ortonormalt system? Vad betyder att ett system är en bas?

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas måndagen, den 28. jan. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 16.jan.
G.Rozenblioum

Fourier Analys F2/KF2,
omtenta 20060114

1. Först transformerar vi problemet till homogena randvillkor. Söker $u(r,t) = \sin t + v(r,t)$. $V(r,t)$ är lösning till problemet

$$v_t = \frac{1}{r}(r v_r) - \cos t \ ; \quad v(r,0)=0, \ v(b,t)=0.$$

- Vi vet att Besselfunktioner $J_0\left(\frac{\alpha_k}{b} r\right)$, $k=1,2,\ldots$ formar ett bas i $L_2(0,b)$ med viktfunktionen $w(r) = r$. Vi söker lösningen $v(r,t)$ som en serie

$$v(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \, J_0\left(\frac{\alpha_k}{b} r\right).$$

Sätter in i ekvationen, multiplicerar med $J_0\left(\frac{\alpha_m}{b} r\right)$ och integrerar med vikten r från 0 till b:

$$T_m'(t) \int_0^b r J_0\left(\frac{\alpha_m}{b} r\right)^2 dr = -\left(\frac{\alpha_m}{b}\right)^2 \int_0^b r J_0\left(\frac{\alpha_m}{b} r\right)^2 dr \, T_k$$
$$- \cos t \int_0^b r J_0\left(\frac{\alpha_m}{b} r\right) dr \ , \quad T_m(0) = 0)$$

Integral i första raden är lika med $\frac{b^2 \cdot J_1(\alpha_m)}{2}$,

integral i andra raden är lika med $\frac{b^2}{\alpha_m} J_1(\alpha_m)$

T_m söks som en lösning till ordinära diff. ekvationen.

svar: $T_m = \frac{2}{\alpha_m J_1(\alpha_m)} \frac{1}{\left(\frac{\alpha_m}{b}\right)^4 + 1}$

$$\times \left(\left(\frac{\alpha_m}{b}\right)^2 e^{-\left(\frac{\alpha_m}{b}\right)^2 t} - \sin t - \left(\frac{\alpha_m}{b}\right)^2 \cos t \right)$$

2. Functionen $F(\xi)$ kan skrivas som

$$F(\xi) = \int_1^5 \arctan(x^3)\cos x\xi \, dx - i\int_1^5 \arctan(x^3)\sin x\xi \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} C(\xi) - i\frac{\pi}{2} S(\xi)$$

där $C(\xi)$, $S(\xi)$ är cos- och sin -Fourier transformation av funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^3), & x \in (1,5) \\ 0, & x \notin (1,5). \end{cases}$$

Functionen $S(\xi)$ är udda, därför

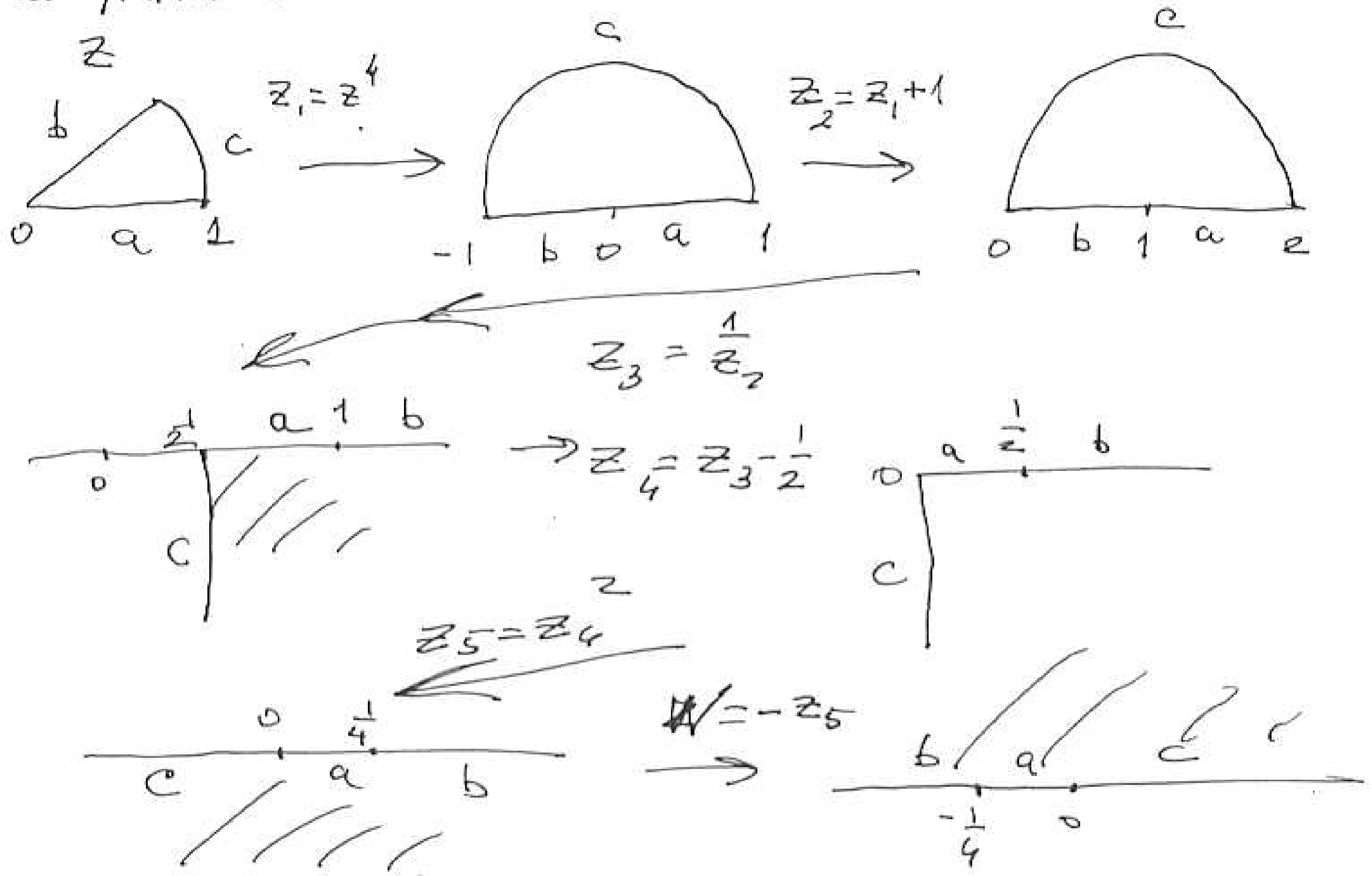
$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\xi)\cos\xi \, d\xi = 0.$$

Så $\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\cos\xi \, d\xi = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty} C(\xi)\cos\xi \, d\xi$

$= \pi \int_0^{\infty} C(\xi)\cos(\xi 1) d\xi$. Integralen är den inversa cos - Fourier transformationen av $C(\xi)$ för $x = 1$. Enligt konvergenssatsen, i punkten $x = 1$, där $f(x)$ är icke-kontinuerlig, är integral lika med $\frac{f(1-0)+f(1+0)}{2}$

Så, $\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\cos\xi \, d\xi = \frac{\pi}{2} \cdot \arctan 1 = \frac{\pi^2}{8}.$

3, Först hittar vi konforma avbildningen av vårt område på övre halvplanet. Med a, b, c märker vi olika delar av gränsen.



samlar alla deltransformationer:

$$w = -z_5 = -z_4^2 = -\left(z_3 - \frac{1}{2}\right)^2 = -\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= -\left(\frac{1}{z_1+1} - \frac{1}{2}\right)^2 = -\left(\frac{1}{z^4+1} - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Söker harmoniska funktionen i W-planet

$$g(w) = A + B\arg\left(w + \frac{1}{4}\right) + C\arg w$$

på intervallet b, $A + \pi B + \pi C = -1$

på intervallet a, $A + \pi C = 0$

på intervallet c : $A = 1$

Löser systemet: $A = 1$, $C = -\frac{1}{\pi}$, $B = -\frac{1}{\pi}$

$$f(z) = 1 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)\arg\left(w + \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{\pi}\right)\arg w$$

$$w = -\left(\frac{1}{z^4+1} - \frac{1}{2}\right)^2.$$

4. $u_{xx} + u_{yy} = 1, \; 0 < x < \pi, \; 0 < y < \pi$

$u(0,y) = 0, \; u(\pi, y) = \sin y, \; u(x,0) = u(x,\pi) = 0.$

Vi söker enkla lösningar i formen

$u(x,y) = X(x)Y(y)$ till homogena ekvationen

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \;; \; -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -n^2$$

$Y'' = -n^2 Y, \quad Y(0) = Y(\pi) = 0$

– S-L problem för Y, $Y_n(y) = \sin ny$, $n = 1, 2, \ldots$

Söker $u(x,y)$ i formen av serien

$$u(x,y) = \sum X_n(x) Y_n(y),$$

Sätter in i ekvationen:

$$\sum X_n''(x) \sin ny - \sum X_n(x) n^2 \sin ny = 1$$

multiplicerar med $\sin ky$ och integrerar $\int_0^\pi dy$:

$$\frac{\pi}{2}\left(X_n''(x) - n^2 X_n(x)\right) = \int_0^\pi \sin ny \, dy = \frac{2}{n}(1-(-1)^n).$$

$$X_n(0) = 0, \quad X_n(\pi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin ny \sin y \, dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos(n-1)y - \cos(n+1)y)\, dy \overset{\circ}{=} \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$$

Löser ekvationen

$$X_n'' - n^2 X_n = \frac{4}{\pi n}(1-(-1)^n), \quad X_n(0) = 0, \; X_n(\pi) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

homogena ekvationen har lösningen

$$X_n(x) = A_n e^{nx} + B_n e^{-nx}$$

part. lösning till ohomog. ekv: $X_{n,\text{part}} = -\frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n).$

anpassar A_n, B_n så att randvillkoren uppfylls.

$$\begin{cases} A_n + B_n - \frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n) = 0 \\ A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi} - \frac{4}{\pi n^3}(1-(-1))^n = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 1, & n = 1 \end{cases} \end{cases}$$

ur systemet hittar A_n, B_n.

5. egenvärdeekvationen kan transformeras till

$u'' + 2u' + \lambda u = 0$, $u(0)=0$, $u(1)+u'(1)=0$.

karakteristiska ekvationen har formen

$$k^2+2k+\lambda = 0$$

$$k = -1 \pm \sqrt{1-\lambda}.$$

Allmäna lösningen: $u(x) = Ae^{(-1+\sqrt{1-\lambda})x} + Be^{(-1-\sqrt{1-\lambda})x}$

$$= e^{-x}\left(Ae^{\sqrt{1-\lambda}\,x} + Be^{-\sqrt{1-\lambda}\,x}\right)$$

för $x=0$: $u(0)=0$, $A+B=0$.

för $x=1$: $Ae^{-1+\sqrt{1-\lambda}} + Be^{-1-\sqrt{1-\lambda}} +$

$$A(-1+\sqrt{1-\lambda})e^{-1+\sqrt{1-\lambda}} + B(-1-\sqrt{1-\lambda})e^{-1-\sqrt{1-\lambda}} = 0$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \sqrt{1-\lambda}\left(Ae^{-1+\sqrt{1-\lambda}} + Be^{-1-\sqrt{1-\lambda}}\right) = 0. \end{cases}$$

fall 1: $\lambda=1$, $A=-B$, $u=0$ – ej egenfunktion

fall 2: $\lambda\neq 1$: $A=-B$ sätter in i andra ekvationen.

$$e^{\sqrt{1-\lambda}} - e^{-\sqrt{1-\lambda}} = 0;\quad e^{2\sqrt{1-\lambda}} = 1,$$

$$2\sqrt{1-\lambda} = 2\pi i n,\quad n = 1,2,3,4,\ldots$$

$$\lambda_n = \pi^2 n^2 + 1,\quad u_n(x) = A_n e^{-x}\sin n\pi x.$$

Normeringskonstanter A_n: $u_n(x)$ måste vara normerade med avseende på viktfunktionen $e^{2x} = w$.

$$\int_0^1 A_n^2 e^{-2x} e^{2x} \sin^2(n\pi x)\,dx = 1;\quad A_n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

F-koefficienter av e^x: $c_n = \int e^x u_n(x)\,w(x)\,dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 e^x e^{-x}\sin(n\pi x)\,e^{2x}\,dx.$$ Integral hittar i BETA.

$$6.\ c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin\frac{\theta}{2}+1\right)e^{-in\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} + 1\right)e^{-in\theta}\,d\theta$$

$$(n\neq 0) = \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{-1}{i(n-\frac{1}{2})}e^{-i(n-\frac{1}{2})\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{i(n+\frac{1}{2})}e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{-2}{(n-\frac{1}{2})}\sin(n-\tfrac{1}{2})\pi + \frac{2}{n+\frac{1}{2}}\sin(n+\tfrac{1}{2})\pi\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\cdot(-1)^n - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}(-1)^n\right) = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\,\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}.$$

för $n=0$, $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi}\left(\sin\frac{\theta}{2}+1\right)d\theta = 1$.

Serien konvergerar mot $f(x)$ i alla punkter utom $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$, eftersom f är icke-kontin. i dessa punkter. i $x=\pi$ och i $x=-\pi$ är summan av serien $\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}+1\right)+\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1\right) = 1$.

f är icke-kontinuerlig. Att derivera serien är inte tillåtet. Integrerar $f(\theta)$:

$$F(\theta) = \int_0^{\theta} f(x)\,dx = 2\cos\frac{\theta}{2} + \theta$$

$$F(\theta) = c_0\theta + \sum_{n\neq 0}\frac{c_n}{in}e^{in\theta} + C_0$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\cos\frac{\theta}{2}+\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}(4+2\pi).$$

V23

Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Telefon: Niclas Andréasson0762721860
2005–08–25 kl. 8.30 - 13.30

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som minimerar

$$\int_0^\infty (2e^{-x/2} - P(x))^2 e^{-x} dx.$$

2. Låt $f(x) = \eta(x-1) - \eta(x+1)$. Hitta med hjälp av Fouriertransformation eller Laplacetransformation lösningen till problemet

$$u_{xx} + 3u_x = u_t,\ x \in (-\infty, \infty),\ t \in (0, \infty),\ u(x, 0) = f(x).$$

3. Med hjälp av konformavbildningar hitta en harmonisk funktion i området utanför två tangerande cirklar $|z| < 1$ och $|z - \frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$, vilken har värdet 1 på den första cirkeln och värdet 2 på den andra cirkeln.

4. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$ där

$$|\hat{f}(\omega)| = 0,\ |\omega| < 2, |\hat{f}(\omega)| = 1, 2 \le |\omega| < 5, |\hat{f}(\omega)| = |\omega|^{-1}, |\omega| \ge 5.$$

För $\alpha > 0$ definieras funktionen $g_\alpha(t)$ som $g_\alpha(t) = \frac{\sin \alpha t}{\pi t}$. Bestäm funktionen $h(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |(g_\alpha * f)(t)|^2 dt$.

5. Utveckla funktionen $f(\theta) = \cos(-\theta/2)$ i en komplex Fourierserie på intervallet $(-\pi, \pi)$. Vilka formler ger serien för $\theta = 0, \pi/2, -\pi/2, -\pi, \pi$? Vilka Fourierutvecklingar får man med integrering av serien?? Med derivering av serien?? Formulera motsvarande regler.

6. Lös problemet

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + u, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u'_x(\pi, t) = 1, & u(x, 0) = x \end{cases}$$

7. Formulera och bevisa Fouriers inversionssats (valfritt version)

8. (utan bevis)

   a) Definition av derivata av en distribution. Motivering. Exempel av derivering av distributioner som inte ges av kontinuerliga funktioner.

   b) Villkoren för uniform och absolut konvergens av Fourierserier.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas 10. september.
G.Rozenblioum

GR

Tenta i Fourieranalys TMA132

2005-08-25

Lösningsförslag.

1. Laguerrepolynomer $L_n(x)$ är ortogonala polynomer i $L_2(0,\infty)$ med vikten e^{-x}. Därför är $P(x)$ en linjärkombination, ~~$P(x) = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1$~~

$$P(x) = \alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x)$$

$$\alpha_n = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} L_n(x) e^{-x} dx.$$

För att beräkna α_n, använder vi genererande funkt.

$$\sum L_n(x) z^n = \frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z}.$$

Så har vi

$$\sum \alpha_n z^n = \sum \int_0^\infty L_n(x) z^n e^{-\frac{x}{2}-x} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}-\frac{x}{2}-x}}{1-z} dx = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{z}{z-1}}$$

$$= \frac{2}{3}\left(1-\frac{z}{3}\right)^{-1}.$$ Utveckla i Taylorserie

$$= \frac{2}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\dots\right) = \frac{2}{3}+\frac{2}{9}z+\frac{2}{27}z^2$$

$$P(x) = \frac{2}{3} L_0(x) + \frac{2}{9} L_1(x) + \frac{2}{27} L_2(z)$$

2. Vi gör F-transform i x-led:

$$-\xi^2 \hat{u}(\xi,t) + 3i\xi\, \hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_t(\xi,t) \quad (1)$$

$$\hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi).$$

Löser differentialekvation (1):

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi) \cdot e^{-(\xi^2-3i\xi)t}$$

För att transformera den andra faktorn, gör vi kvadratkomletering:

$$\xi^2 - 3i\xi = \left(\xi - \frac{3}{2}i\right)^2 + \frac{9}{4}$$

Vi hittar den inversa F-transform av

$$e^{-(\xi^2-3i\xi)t} = e^{-\frac{9}{4}t}\, e^{-(\xi-\frac{3}{2}i)^2 t}.$$

Vi har:

$$e^{-\xi^2 t} \overset{\mathcal{F}}{\subset} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

$$e^{-(\xi-\frac{3}{2}i)t} \subset e^{-\frac{x^2}{4t}}\, e^{-\frac{3}{2}x}$$

(regel 3, s. 223 Folland)

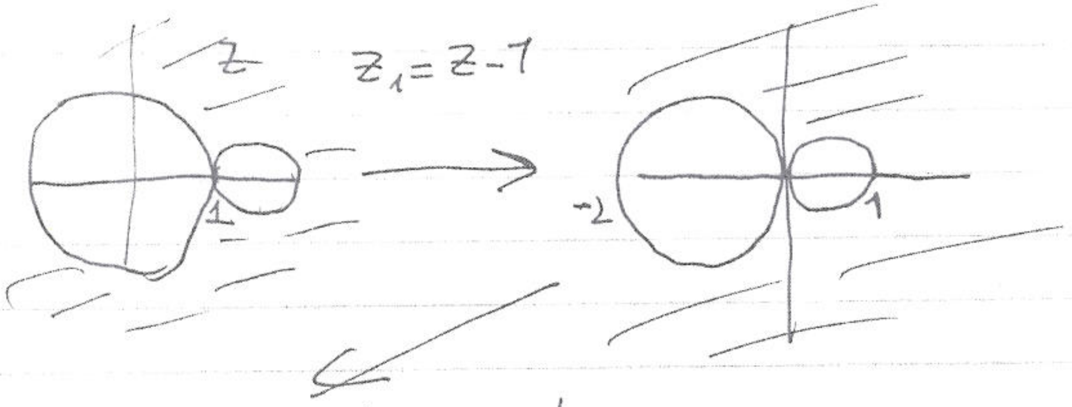
$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-\frac{9}{4}t}\, \hat{f}(\xi) \cdot \widehat{\left(e^{-\frac{x^2}{4t} - \frac{3}{2}x}\right)}$$

Enligt regel 8, Folland

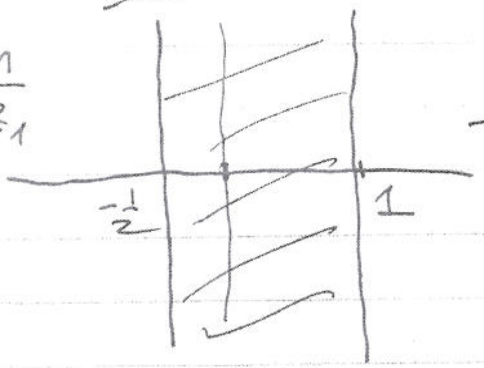
$$u(\cancel{x},t) = e^{-\frac{9}{4}t} (2\pi)\, f * e^{-\frac{x^2}{4t} - \frac{3}{2}x}$$

$$= -e^{-\frac{9}{4}t} (2\pi) \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t} - \frac{3}{2}(x-s)}\, ds.$$

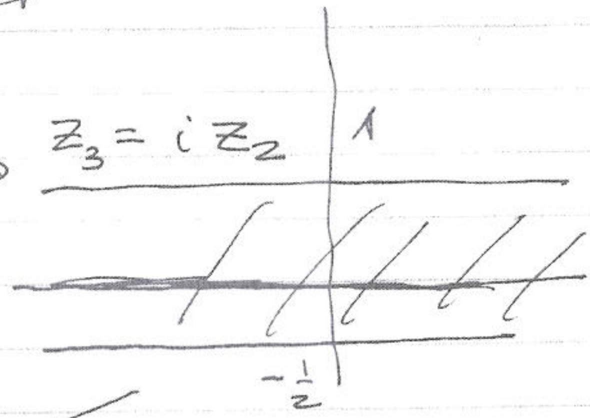
3. Vi konstruerar stegvis en konformavbildning av vårt område till det övre halvplanet



$z_2 = \frac{1}{z_1}$



$z_3 = i z_2$

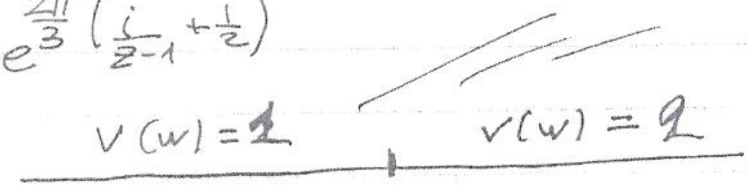


$z_4 = \left(z_3 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi \cdot 2}{3}$

$w = e^{z_4}$

övre halvplanet

$w(z) = e^{\frac{2\pi}{3}\left(\frac{i}{z-1} + \frac{1}{2}\right)}$



Vi söker en harmonisk funktion $V(w)$ i halvplanet som är lika med 1 för w reellt, $w < 0$, och lika med 2 för w reellt, $w > 0$, med hjälp av arg: $V(w) = 2 - \frac{1}{\pi} \arg w$

$$u(z) = V(w(z)) = 2 - \frac{1}{\pi} \arg\left(e^{\frac{2\pi}{3}\left(\frac{i}{z-1} + \frac{1}{2}\right)}\right).$$

4. Vi har $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(g_\alpha * f\right)(t) \right|^2 dt$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\left(g_\alpha * f\right)}(\omega) \right|^2 d\omega$$

enligt Parceval

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{g}_\alpha(\omega) \cdot \hat{f}(\omega) \right|^2 d\omega$$

$$\hat{g}_\alpha(\omega) = \chi_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \alpha \\ 0, & |\omega| > \alpha \end{cases}.$$

Därför är vår integral lika med

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Om $\alpha \leq 2$, så $|\hat{f}(\omega)| = 0$, $|\omega| < \alpha$, integralen $= 0$,

om $2 < \alpha \leq 5$, $I = \displaystyle\int_2^\alpha d\omega = \alpha - 2$.

om $\alpha > 5$,

$$I = \int_2^5 d\omega + \int_5^\alpha \omega^{-2} d\omega = 3 + (5^{-1} - \alpha^{-1}).$$

5. Funktionen $f(\theta) = \cos(-\theta/2)$ är periodisk på $(-\pi, \pi)$, $\cos\frac{\pi}{2} = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$, $\cos \theta/2$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta/2)\, d\theta = \frac{2}{\pi} \quad , n=0$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}\right) e^{-in\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta}}{-i(n+\frac{1}{2})} + \frac{e^{-i(n-\frac{1}{2})\theta}}{-i(n-\frac{1}{2})}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \cancel{\frac{1}{2\pi} \frac{(-1)^n}{-i}\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{+i\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{1}{n+}\right.}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{-i(n+\frac{1}{2})}(-1)^n\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{2}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{-i(n-\frac{1}{2})}(-1)^n\left(e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n}{n^2-\frac{1}{4}}.$$

$$f(\theta) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{(-1)^n}{n^2-\frac{1}{4}}e^{in\theta}$$

Funkt. $f(\theta)$ är kontinuerligt, därför är summan lika med $f(\theta)$ för alla θ.

Att derivera är möjligt, eftersom f' är styckvis kontinuerligt

$$f'(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{(-1)^n\cdot(in)}{n^2-\frac{1}{4}}.$$

För att integrera:

$$F(\cancel{x}) = \int_0^x f(\theta)\,d\theta = 2\sin\frac{x}{2} \quad ; \quad \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx = 0.$$

$$F(x) = c_0 x + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx}$$

$$= \frac{2}{\pi} x + \sum_{n\neq 0} \frac{(-1)^n}{in(n^2-\frac{1}{4})}$$

6. Randvillkoren är ohomogena, därför förberedelsesteget krävs: vi får $w(x,t)$, en enkel ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ funktion som satisfierar randvillkoren. Vi får $w(x,t) = x$. Söker $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$. Sätter in i problemet, och får

$$v_{xx} = v_t + v + x$$

$$v(0,t)=0, \quad v_x(\pi,t)=0, \quad v(x,0)=0.$$

Söker Sturm-Liouville problemet - separerar variabler, $v(x,t) = X(x)\,T(t)$ och sätter in i

$$X(x)''\,T(t) = XT' + XT \qquad v_{xx} = v_t + v$$

$$\frac{X(x)''}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = -\lambda$$

Sturm-Liouville problemet : $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0)=0,\ X'(\pi)=0 \end{cases}$

Den standarta lösning av S-L problemet ger $X_n(x) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $\lambda = \lambda_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2$.

Söker lösningen i formen $v(x,t) = \sum T_n(t)\,X_n(x)$.
Sätter in i ekvationen

$$\sum T_n(t)\,X_n''(x) = \sum T_n'(t)\,X_n(x) + \sum T_n X_n(x) + x.$$

Multiplicerar med $X_k(x)$ och integrerar alla termer utom $n=k$ försvinner.

$$-\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 T_n(t) = T_n'(t) + T_n(t) + d_n,$$

$$d_n = \int_0^\pi x\,X_n(x)\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

$T_n(0) = 0$, eftersom $V(x,0) = 0$.

$$T_n' = -\left(1+\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2\right) T_n - d_n.$$

Löser ekvationen och hittar

$$T_n(t) = -d_n \left(1+\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2\right)^{-1} \left(1-e^{-\left(1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)t}\right).$$

Svar: $u(x,t) = x - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \left(1+\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2\right)^{-1} \left(1-e^{-\left(1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)t}\right) \times \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x$

Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK Telefon: 0762186654
Chalmers tekniska högskola 2005–03–12 kl. 08.45–13.45

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Med hjälp av utveckling i Fourier-Bessel serie hitta en radial lösning $u(r,t)$ av randvärdeproblem för värmeekvationen

$$u_t = \Delta u - u$$

i cirkelskivan $r < 2$ med begynnelsevillkoret $u(r,0) = 4 - r^2, 1 \leq r \leq 2$, $u(r,0) = 3, r < 1$ och randvillkoret $u(r,t) = 0$ för $r = 2$.

2. Hitta andragradpolynomet $P(x)$ som minimerar $\int_1^2 |x^3 - P(x)|^2 x^{-1} dx$.

3. Med hjälp av konforma avbildningar hitta den elektrostatiska potentialen u i området

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2, \;\; x, y > 0, x^2 + y^2 < 1$$

som är lika med 0 på y-axeln $x = 0$, lika med 1 på cirkelbågen $x^2 + y^2 = 1$, lika med -1 på intervallet $0 < x < \frac{1}{2}$ på x-axeln, och lika med 0 för $x > \frac{1}{2}$ på x-axeln.

4. Funktionen $f(x)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\xi)$ där $\hat{f}(\xi) = 1$ på 3 intervall $2^n < x < 2^{n+1}$, $n = 1, 3, 5$, $\hat{f}(\xi) = -1$ på 3 intervall $2^n < x < 2^{n+1}$, $n = 2, 4, 6$, och $\hat{f}(\xi) = 0$ utanför dessa 6 intervall. Hitta $f*f*f$, $f*f*f*f$, $f*f*f*f*f$ $f*f*f*f*f*f$ och $\int_{-\infty}^{\infty} |f*g|^2 dx$, $g(x) = \frac{\sin(5x)}{x}$.

5. Lös med hjälp av utvecklingen i Fourier serie i egenfunktioner av ett passande Sturm-Liouville problem vågekvationen

$$u_{tt} = u_{xx} + u_x, 0 < x < \pi, t > 0$$

med randvillkoren $u(0,t) = 0, 2u_x(\pi,t) + u(\pi,t) = 3$ och begynnelsevillkoren $u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = \sin(x)$. (Tips: skriv $u_{xx} + u_x$ som $e^{-x}(e^x u_x)_x$ för att få S-L problemet och bestäma viktfunktionen.)

6. Utveckla funktionen $f(\theta) = \exp(-\theta)$ i en komplex Fourierserie på intervallet $(-\pi, \pi)$. Vilka formler ger serien för $\theta = 0, \pi/2, -\pi/2, -\pi, \pi$? Vilka Fourierutvecklingar får man med integrering av serien?? Med derivering av serien?? Formulera motsvarande regler.

7. Låt $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara ett ortonormalt system i $L^2(a,b)$. Ange tre villkor som alla var för sig är ekvivalent med att $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ar ett fullständigt system (en bas) i $L^2(a,b)$ (Sats 3.4). Beviset krävs.

8. Berätta så mycket du kan om linjära system, deras egenskaper, karakteristiker och Fouriertransformationsbaserade analysmetoder. Ge exempel.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas måndagen, den 28. mars. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 15.mars.

G.Rozenblioum

GR

TMA 132 2005-03-12 (1)

Lösningar

1. Vi söker enkla lösningar $u(r,t) = R(r)T(t)$; sätter in i ekvationen och delar variabler

$$\frac{T'}{T} + 1 = \frac{R'' + r^{-1}R}{R} = -\mu^2$$

R-ekvation

$$R'' + r^{-1}R + \mu^2 R = 0$$

randvillkoren $R(0)$ begränsad, $R(2) = 0$

lösningen

$$R(r) = J_0(\mu r)$$

μ hittas ur randvillkoret

$J_0(2\mu) = 0$; $2\mu = \lambda_n$ = nollställe för J_0. $\mu_n = \frac{\lambda_n}{2}$.

T-ekvationen $\frac{T'}{T} + 1 = -\mu_n^2$

$T' = -(\mu_n^2 + 1)T$; $T_n(t) = C_n e^{-(\mu_n^2+1)t}$

Söker lösningen

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{2} r\right) e^{-\left(\frac{\lambda_n^2}{4}+1\right)t}$$

C_n söker ur begynnelsevillkoret

$$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{2} r\right) = \begin{cases} 4-r^2, & r \geq 1 \\ 3, & r < 1 \end{cases}$$

$$C_n = \left(\left\| J_0\left(\frac{\lambda_n}{2} r\right)\right\|_r^2\right)^{-1} \left(\int_0^1 3 r J_0\left(\frac{\lambda_n}{2} r\right) dr + \int_1^2 (4-r^2) r J_0\left(\frac{\lambda_n}{2} r\right) dr\right)$$

Hilfsintegrale

(2)

$$sJ_0 = (sJ_1)'$$

$$A_n = \int_0^1 r\, J_0\left(\frac{\lambda_n}{2} r\right) dr \overset{s=\frac{\lambda_n}{2}r}{=} \left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^2 \int_0^{\frac{\lambda_n}{2}} s\, J_0(s)\, ds =$$

$$= \left(\frac{2}{\lambda_n}\right) \frac{\lambda_n}{2} J_1\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) = \frac{2}{\lambda_n} J_1\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)$$

$$B_n = \int_1^2 r\, J_0\left(\frac{\lambda_n}{2} r\right) = \left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^2 \int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\lambda_n} s\, J_0(s)\, ds$$

$$= \frac{2^2}{\lambda_n^2}\left(\lambda_n J_1(\lambda_n) - \frac{\lambda_n}{2} J_1\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\lambda_n}\left(2 J_1(\lambda_n) - J_1\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right).$$

$$D_n = \int_1^2 r^3 J_0\left(\frac{\lambda_n}{2} r\right) dr = \left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^4 \int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\lambda_n} s^3 J_0(s)\, ds$$

$$= \left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^4 \int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\lambda_n} s^2 (sJ_1(s))'\, ds = 2\left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^4 \int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\lambda_n} s^2 J_1(s)\, ds$$

$$= 2\left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^4 s^2 J_2(s)\Big|_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\lambda_n} \quad \Bigg| + \left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^4 s^3 J_1(s)\Big|_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\lambda_n}$$

$$= 2\left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^4 s^2 J_2(s)\Big|_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\lambda_n} + \left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^4 s^3 J_1(s)\Big|_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\lambda_n}$$

$$C_n = \left(2J_1(\lambda_n)\right)^{-2}\left(3A_n + 4B_n - D_n\right).$$

2. Vi tar funktioner $f_0 = 1$, $f_1 = x$, $f_2 = x^2$ **3**
och ortogonaliserar m.a.på vikten $w(x) = x^{-1}$
på intervallet $(1,2)$.

$$\|f_0\|^2 = \int_1^2 x^{-1}dx = \ln 2.$$

$$\varphi_0 = f_0 \ ; \quad \varphi_1 = f_1 - \frac{\langle f_1, \varphi_0\rangle}{\|\varphi_0\|^2}\varphi_0$$

$$\langle f_1, \varphi_0\rangle = \int_1^2 x \cdot x^{-1}dx = 1$$

$$\varphi_1 = x - \frac{1}{\ln 2} \ ; \quad \|\varphi_1\|^2 = \int_1^2 \left(x^2 - \frac{2}{\ln 2}x + \frac{1}{(\ln 2)^2}\right)x^{-1}dx$$

$$\cancel{\varphi_2 = f_1} \qquad = \frac{3}{2} - \frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}$$

$$\varphi_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, \varphi_0\rangle}{\|\varphi_0\|^2}\varphi_0 - \frac{\langle f_2, \varphi_1\rangle}{\|\varphi_1\|^2}\varphi_1$$

$$\langle f_2, \varphi_0\rangle = \int_1^2 x^2 x^{-1}dx = \frac{3}{2} \ ; \quad \langle f_2, \varphi_1\rangle$$

$$= \int_1^2 x^2\left(x - \frac{1}{\ln 2}\right)x^{-1}dx = \frac{7}{3} - \frac{3}{2\ln 2}$$

$$\varphi_2 = x^2 - \frac{3}{2\ln 2} - \frac{\left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2\ln 2}\right)\left(x - \frac{1}{\ln 2}\right)}{\frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}}$$

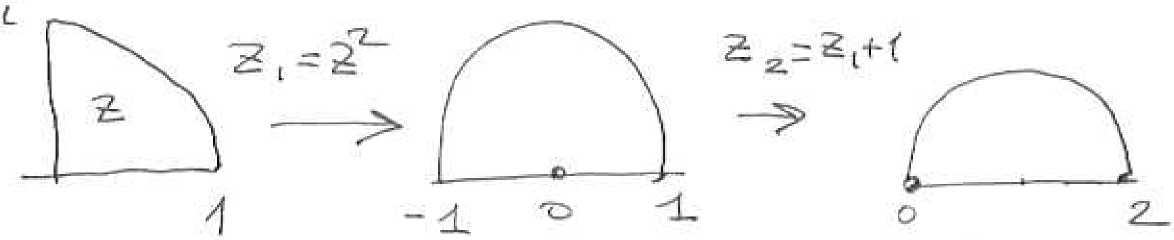
Bästa approximation $P(x) = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$

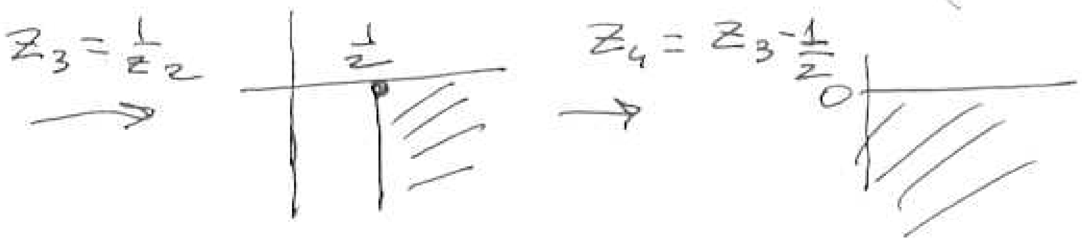
$$c_0 = \frac{\int_1^2 x^3\varphi_0(x)x^{-1}dx}{\|\varphi_0\|^2} \ ; \quad c_1 = \frac{\int_1^2 x^3\varphi_1(x)x^{-1}dx}{\|\varphi_1\|^2} \ ,$$

$$c_2 = \frac{\int_1^2 x^3\varphi_2(x)x^{-1}dx}{\|\varphi_2\|^2} \quad \text{osv.}$$

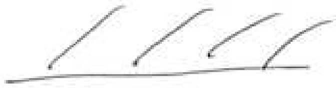
4

3. Vi konstruerar avbildningen $w=f(z)$ av vårt område på det övre halvplanet stegvis





$\rightarrow w = -z_4^2$



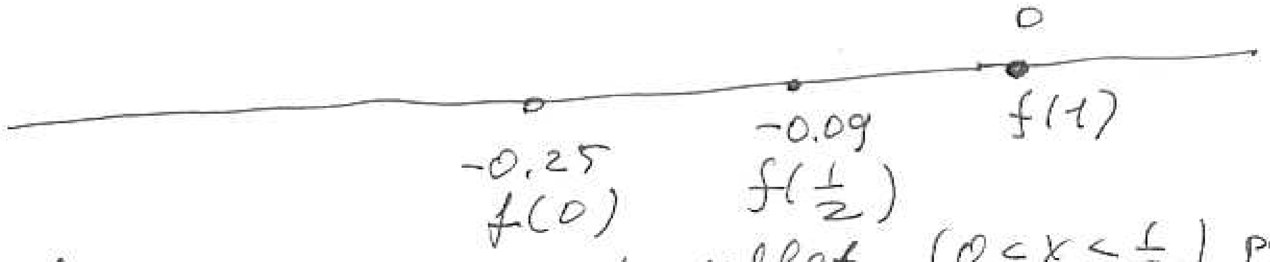
samlar avbildningen: $w = -(z_3 - \frac{1}{2})^2 = -(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{2})^2$

$= -(\frac{1}{z_1+1} - \frac{1}{2})^2 = -(\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{2})^2 = f(z)$.

Vi granskar vart intressanta punkter går:

$f(0) = -(\frac{1}{1} - \frac{1}{2})^2 = -0.25$; $f(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{\frac{1}{4}+1} - \frac{1}{2})^2 = -0.09$,

$f(1) = -(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 = 0$, $f(i) = \infty$.



så vi kan se att intervallet $(0 < x < \frac{1}{2})$ på x-axeln går till $(-0.25, -0.09)$; intervallet $(\frac{1}{2} < x < 1)$ går till $(-0.09, 0]$ och bågen går till $(0, \infty)$.

5

Vi löser problemet Dirichlet i övre halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$:

$\Delta V(w) = 0$, $V = -1$ på $(-0{,}25, -0{,}09)$,

$V = 0$ på $(-0.09, 0)$, $V = 1$ på $(0, \infty)$

och $V = 0$ på $(-\infty, -0{,}25)$.

Vi söker $V(w)$ som

$$A + B\arg(w+0.25) + C\arg(w+0.09) + D\arg(w+0).$$

hittar A, B, C, D:

för $w \in (-\infty, -0{,}25)$: $A + B\pi + C\pi + D\pi = 0$

för $w \in (-0{,}25, -0{,}09)$: $A + C\pi + D\pi = -1$

för $w \in (-0.09, 0)$: $A + D\pi = 0$

för $w \in (0, \infty)$: $A = 1$

så har vi $A = 1$, $D = -\frac{1}{\pi}$, $C = -\frac{1}{\pi}$

$B = \frac{1}{\pi}$

$$V(w) = 1 + \frac{\arg(w+0{,}25)}{\pi} - \frac{\arg(w+0.09)}{\pi} - \frac{\arg(w)}{\pi}$$

Lösningen $u(z)$ hittas som

$$u(z) = V(f(z)) = V\left(\left(\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{2}\right)^2\right).$$

4. Vi märker att

$$f*f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\cdot\hat{f})$$

$$f*f*f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\cdot\hat{f}\cdot\hat{f})$$

osv

$$f*f*f*f*f*f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\cdot\hat{f}\cdot\hat{f}\cdot\hat{f}\cdot\hat{f}\cdot\hat{f})$$

nu kan vi se att

$$\hat{f}^3 = \hat{f}^5 = \hat{f}, \quad \hat{f}^2 = \hat{f}^4 = \hat{f}^6$$

$$= \begin{cases} 1, & 2 \le \xi < 2^7 \\ 0 & \text{andra } \xi \end{cases}$$

Därför $\quad f*f*f = f*f*f*f*f = f$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_2^4 e^{ix\xi}\,d\xi + \int_8^{16} e^{ix\xi}\,d\xi + \int_{32}^{64} e^{ix\xi}\,d\xi\right.$$

$$\left. - \int_4^8 e^{ix\xi}\,d\xi - \int_{16}^{32} e^{ix\xi}\,d\xi - \int_{64}^{128} e^{ix\xi}\,d\xi\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{-e^{2ix} + 2e^{4ix} - 2e^{8ix} + 2e^{16ix} - 2e^{32ix} + 2e^{64ix} - e^{128ix}\right\}$$

$$f*f = f*f*f*f = f*f*f*f*f*f$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int^{128} e^{ix\xi}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\left(e^{i128x} - e^{2ix}\right).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f*g|^2\,dx \overset{\text{Plancherel}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f*g}|^2\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}\cdot\hat{g}|^2\,d\xi$$

$$= \quad \hat{g}(\xi) = \tfrac{1}{2}, \ \xi \in (-5,5) \ ; \ \hat{g}(\xi) = 0, \ |\xi| > 5$$

$$\hat{f}^2(\xi)\hat{g}(\xi)^2 = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 2 < \xi < 5 \\ 0, & \xi \text{ utanför } (2,5) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}\hat{g}|^2 = \frac{1}{4}\cdot 3 = \frac{3}{4}.$$

5. Vi har ohomogena randvillkoren, så ett förberedelsesteg krävs: Vi söker $v(x,t)$ som satisfierar randvillkoren. Vi tar $v(x,t)$ som en linjär funktion $v(x,t) = ax$

a hittas ~~ur~~ ur $2a + a\pi = 2+\pi$, $a = 1$.

Tar $u = v + w$. funktionen w satisfierar

$w_{tt} = w_{xx} + w_x + 1$ med randvillkoren

$w(0,t) = 0$, $w_x(\pi,t) + w(\pi,t) = 0$ och begynnelsevillk.

$w(x,0) = u(x,0) - v(x) = (1-a)x = 0$, $w_t(x,0) = \sin x$.

Separerar variabler; söker enkla lösningar

$w(x,t) = X(x)\,T(t)$

$$\frac{X'' + X'}{X} = \frac{T''}{T} = -\mu^2$$

$X'' + X' + \mu^2 X = 0$. Den ekvationen har dålig form - ej Sturm-Liouvill. Vi skriver den som

$$e^{-x}\left(e^{x} X'(x)\right)' + \mu^2 X(x) = 0$$

$$\left(e^{x} X'(x)\right)' + e^{x}\mu^2 X(x) = 0,$$

med vikten e^{x}.

Det är ett S-L problem

Vi löser ekvationen: karakt. ekvationen blir $k^2 + k + \mu^2 = 0$, $k = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}}$

Lösningar $X(x) = A e^{-\frac{x}{2}} \sin\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}}\,x + B e^{-\frac{x}{2}} \cos\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}}\,x$

$x = 0$: $B = 0$; $x = \pi$:

$$X'(x) = A\left[-\frac{1}{2}\sin\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}}\,x + \sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}}\cos\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}}\,x\right] e^{-\frac{x}{2}}$$

$$2X'(x) + X(x) = A\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}}\cos\left(\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}}\,x\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$2X'(\pi) + X(\pi) = A\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}}\cos\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}}\,\pi\; e^{-\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}} = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad \mu_n^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

9

Egenfunctioner är

$X_n(x) = A_n e^{-\frac{x}{2}} \sin nx$. Normeringkoefficienter:

$$A_n = \left(\int_0^\pi \sin^2 nx \; e^{-x} e^{-x} dx\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \; e^{-\frac{x}{2}}, \quad \mu_n^2 = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}, \; n = 1, 2, \ldots$$

Söker lösningen $w(x,t)$ som

$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$. Sätter in i ekvationen:

$$\sum \left(T'' + \mu_n^2 T_n\right) X_n = 1.$$

multiplicerar med X_k, med vikten e^x och integrerar

$$T_k'' + T_k \mu_k^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi e^x e^{-x} \sin kx \, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{\frac{1}{4}+k^2} \left(1 - e^{\frac{\pi}{2}} \cos k\pi\right) = a_k.$$

$T_k'' + T_k \mu_k^2 = a_k$. Lösning: $T_k(t) = \frac{a_k}{\mu_k^2} + b_k \sin \mu_k t + c_k \cos \mu_k t$.

För att hitta koeff. b_k, c_k, använder randvillkoren:

$T_k(0) = 0$, $c_k = -\frac{a_k}{\mu_k^2}$; $\sum T_k'(0) X_k(x) = \sin x$,

$$b_k \mu_k = T_k'(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sin x \sin nx \; e^{-\frac{x}{2}} e^x dx =$$

$$b_k = \frac{1}{\mu_k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sin x \sin nx \; e^{\frac{x}{2}} dx.$$

6. Fourier-serien för $f(\theta) = e^{-\theta}$ på $(-\pi, \pi)$ är (10)

$$\sum c_n e^{in\theta}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\theta} e^{-in\theta} d\theta = \frac{(-1)^n}{2\pi(in+1)} (e^{\pi} - e^{-\pi})$$

Funktionen f är styckvis kontinuerlig.

$$\theta = 0: \quad f(\theta) = e^0 = 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{in+1} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$$

$$f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = e^{\mp\pi} = \sum \frac{(-1)^n}{in+1} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} e^{\pm in\frac{\pi}{2}}$$

$\theta = \pi$, $\theta = -\pi$ - funktionen är diskontinuerlig i dessa punkter, så konvergerar serien med halvsumman av ensidiga gränsvärden

$$\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \sum \frac{1}{in+1} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}$$

Integrering $F(\theta) = \int_0^{\theta} f(s)\, ds = 1 - e^{-\theta}$

$F(\theta) = c_0 \theta + \sum C_n e^{in\theta}$, c_0 är c_0-koeff. för f,

$$c_0 = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi},$$

$$C_n = \frac{1}{in} c_n = \frac{1}{in} \frac{(-1)^n}{2\pi(in+1)} \left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi - (e^{\pi} - e^{-\pi})\right).$$

Derivera kan man inte eftersom funktionen $f(\theta)$ inte är deriverbar.

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng, LÖSNIGAR

:

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

1. Utveckla funktionen $f(x) = x^3, 1 < x < 2$, $f(x) = 0, 0 < x < 1$ i serie $\sum c_k J_3(\mu_k x/2)$ på intervallet $(0, 2)$ där μ_k är positiva nollställen av J_3'.

2. Ett ringformigt membran $1 \le r \le 3$ i polära koordinater har innre randen $r = 1$ fixerad, medan den yttre randen $r = 3$ vibrerar med vinkelfrekvensen ω och samma amplituden 2 för alla punkter på den yttre randen. Membranets rotationssymmetriska vibrationer beskrivs av ekvationerna
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}), 1 < r < 3, t > 0, u(1,t) = 0, u(3,t) = 2\sin(\omega t). \quad (1)$$
Bestäm den stationära rotationssymmetriska svängningsrörelsen, dvs. en lösning på formen $u(r,t) = v(r)\sin\omega t$. För vilka ω finns en sådon lösning??

3. Med hjälp av konforma avbildningen till det övre halvplanet hitta en harmonisk funktion $u(x,y)$ i enhetsdisken $x^2 + y^2 < 1$ som har på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$, eller $r = 1$ i polära koordinater r, θ, gränsvärdena $u = 1$ på cirkelbågen $0 < \theta < \pi/4$ och $u = 0$ på resten av cirkeln.

4. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen
$$\hat{f}(\omega) = \frac{\omega^2\theta(\omega)}{(1+\omega^2})^2$$
där $\theta(\omega)$ är Heavisides funktion. Beräkna $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-|t|}\mathrm{sgn}t\, dt$

5. Lös Laplaceekvationen
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
i rektangeln $0 < x < \pi$, $0 < y < 1$ med gränsvilkoren $u(0,y) = 0, u_x(\pi, y) = 0, u(x,0) = u(x,1) = \sin(x/2)$.

6. Lös problemet
$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + u, & 0 < x < \pi/2, t > 0, \\ u(0,t) = 1, u(\pi/2,t) = 0, & u(x,0) = \cos(x) \end{cases}$$

7. a) Ortogonala och ortonormala funktionssystem. Hur transformerar man ett ortogonalt system till ett ortonormalt system? Fullständiga system.

   b) Konformavbildningar och ström. Nivåkurvor.

8. Härleda formeln för genererande funktion för Besselfunktioner.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas fredagen 28.jan.

G.Rozenblioum

GR

Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa(icke-programmerbar)
MATEMATIK Telefon: Anna Nyström, 0739779268
Chalmers tekniska högskola 2004–08–26 kl. 08.45–13.45

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Utveckla funktionen $f(x) = x^2, x < 1$, $f(x) = 0, 1 < x < 3$ i serie $\sum c_k J_2(\mu_k x/3)$ på intervallet $(0,3)$ där μ_k är positiva nollställen av J_2'.

2. Hitta andragradpolynomen $P(x)$ som minimerar $\int_0^1 |\sqrt{x} - P(x)|^2 x dx$.

3. Konstruera en konform avbildning som avbildar området $0 < \arg z < \pi/4, |z| < 2$ på det övre halvplanet. Vilka problem i potentialteori kan man lösa med hjälp av den avbildningen?

4. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$ där

$$|\hat{f}(\omega)| = 0, \ |\omega| < 2, |\hat{f}(\omega)| = 1, 2 \leq |\omega| < 3, |\hat{f}(\omega)| = |\omega|^{-1}, |\omega| \geq 3$$

För $\alpha > 0$ funktionen $g_\alpha(t)$ definieras som $g_\alpha(t) == \frac{\sin \alpha t}{\pi t}$. Bestäm funktionen $h(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |(g_\alpha * f)(t)|^2 dt$.

5. Lös, med hjälp av Fouriertransformation i x-led, begynnelsevärdeproblemet

$$u_{tt} = u_{xx} - 4u_x + 4u, \ t > 0, -\infty < x < \infty \quad (1)$$
$$u(x,0) = f(x), f \in L_1, \hat{f} \in L_1 \quad (2)$$
$$u(x,t) \text{ begränsad då } t \to \infty \quad (3)$$

6. Lös problemet

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + u, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u_x'(1,t) = 1, & u(x,0) = x \end{cases}$$

7. a) Relation mellan egenskaperna av funktionen och dennes F-koefficienter.
   b) Hur många gräns- och begynnelsevillkor måste man ställa för olika typer partiella differentialekvationer?

8. Härleda differentialekvation för Legendrepolynomer

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas fredagen, 10. september.
G.Rozenblioum

GR

G.R.

TMA 132 Fourieranalys F2/Kf2, 2004-08-26, lösningar

1 Enligt satsen 5.3 b, för $a=0$, $b=3$, $\nu=2$, är Besselfunktioner $J_2(\mu_k x/3)=\varphi_k(x)$, $k=1,2,\dots$ ett fullständigt ortogonalt system på intervallet $(0,3)$ med vikten $w(x)=x$. Man har också

$$\|\varphi_k\|_w^2=\frac{3^2(\mu_k^2-4)}{2\mu_k^2}J_2(\mu_k)^2$$

Fourier-Bessel koefficienter av $f(x)$ m.a.på $\{\varphi_k\}$ är lika med

$$c_k=\int^3\varphi_k(x)f(x)\,x\,dx\;\|\varphi_k\|_w^{-2}.$$

Vi beräknar integralen i c_k!

$$\int=\int_0^1 x^3J_2(\mu_k x/3)\,dx=\begin{pmatrix}y=\mu_k x/3\\ dx=\frac{3}{\mu_k}dy\end{pmatrix}=$$

$$\left(\frac{3}{\mu_k}\right)^4\int_0^{\mu_k/3}y^3J_2(y)\,dy=(5.14,\ \nu=3)=\left(\frac{3}{\mu_k}\right)^4\int_0^{\mu_k/3}(y^3J_3(y))'\,dy$$

$$=\frac{3}{\mu_k}J_3\left(\frac{\mu_k}{3}\right).$$

Svar: $$c_k=\frac{2\mu_k}{3(\mu_k^2-4)}\frac{J_3\left(\frac{\mu_k}{3}\right)}{J_2(\mu_k)^2}$$

2. Först använder vi Gram-Schmidt ortogonalisering till polynomsystemet $f_0(x)=1$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2$ på $(0,1)$ med vikten $w(x)=x$:

$$g_0=f_0,\quad g_1=f_1-\frac{\langle f_1,g_0\rangle}{\|g_0\|^2}g_0,\quad g_2=f_2-\frac{\langle f_2,g_0\rangle}{\|g_0\|^2}g_0-\frac{\langle f_2,g_1\rangle}{\|g_1\|^2}g_1.$$

Vi beräknar: $\|f_0\|^2=\|g_0\|^2=\int_0^1 x\,dx=\frac12$,

$\|f_1\|^2=\int_0^1 x^3dx=\frac14$; $\langle f_1,f_0\rangle=\int_0^1 x^2dx=\frac13$, osv.

$g_1=x-\frac23$, $\|g_1\|^2=\int_0^1\left(x-\frac23\right)^2x\,dx=\frac{1}{36}$

$\langle f_2,g_0\rangle=\int_0^1x^3dx=\frac14$; $\langle f_2,g_1\rangle=\int_0^1x^2\left(x-\frac23\right)x\,dx=\frac{1}{30}$

$g_2=x^2-\frac{x}{30}+\frac{3}{10}$; $\|g_2\|^2=\int_0^1\left(x^2-\frac{x}{30}+\frac{3}{10}\right)^2x\,dx\doteq 0.275$

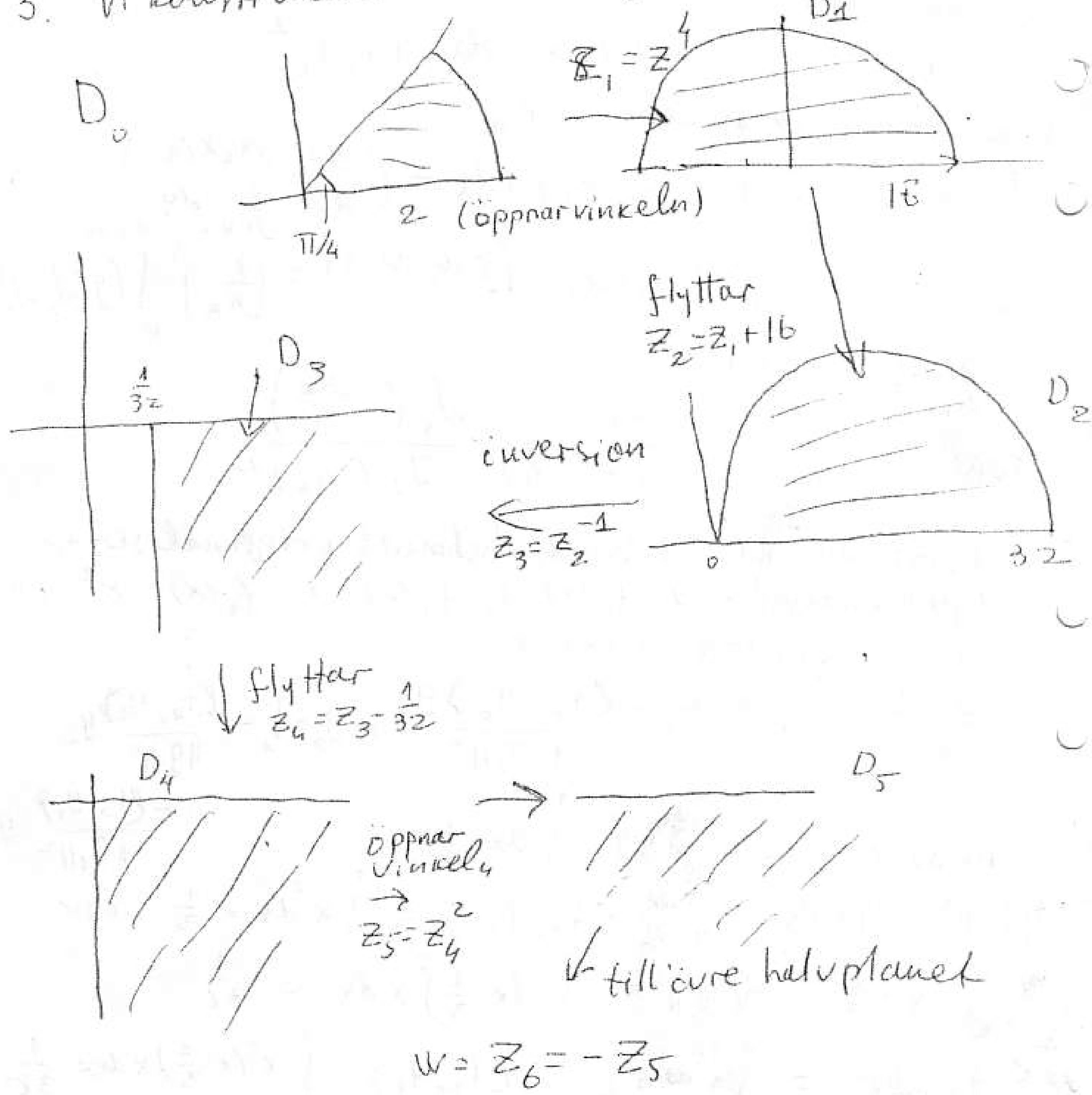
Nu, enligt approximationssatsen, blir bästa approximationspolynomen

$$P = c_0 g_0 + c_1 g_1 + c_2 g_2 , \quad c_k = \frac{1}{\|g_k\|^2} \int_0^1 \sqrt{x}\, g_k\, x\, dx$$

Vi beräknar

$$c_0 = \frac{4}{5}, \quad c_1 \approx 0.17, \quad c_2 \approx 0.65$$

3. Vi konstruerar avbildningen stegvis.



$$w = z_6 = -z_5$$

Sammansättning:

$$w = -z_5 = -z_4^2 = -\left(z_3 - \frac{1}{32}\right)^2$$

$$= -\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{32}\right)^2 = -\left(\frac{1}{z_1+16} - \frac{1}{32}\right)^2 =$$

$$-\left(\frac{1}{z^4+16} - \frac{1}{32}\right)^2$$

Den konforma avbildningen kan användas för att lösa Dirichletproblemet

$\Delta u = 0$ i D, $u = f$ på gränsen av D.

(4) Funktionen $g_\alpha(t) = \frac{\sin \alpha t}{\pi t}$ har F-transf.

$\hat{g}_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \alpha \\ 0, & |\omega| > \alpha \end{cases}$. Enligt Plancherel,

$$h(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} |(g_\alpha * f)(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}_\alpha(\omega)\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \hat{f}(\omega)^2 d\omega.$$ Alltså, för $\alpha < 2$, har vi

$h(\alpha) = 0$; för $2 \le \alpha < 3$, $h(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_2^\alpha d\omega = \frac{\alpha - 2}{\pi}$,

för $\alpha \geq 3$, $h(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_2^3 d\omega + \frac{1}{\pi}\int_3^\alpha \frac{1}{\omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)$.

(5) Vi gör F-transformation av ekvationen i x-led. Enligt (5) i tab. 2, får vi

$$\hat{u}_{tt} = (-\xi^2 - 4i\xi + 4)\hat{u}, \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi).$$

Ekvationen har allmänna lösningen

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi)\, e^{(2-i\xi)t} + B(\xi)\, e^{-(2-i\xi)t}$$

Villkoret att u är begränsad när $t \to \infty$ medför $A(\xi) = 0$. $B(\xi)$ hittar från gränsvillkoret, $B(\xi) = \hat{f}(\xi)$

Alltså,

$$G(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\, e^{-(2-i\xi)t}$$

$$u(x,t) = e^{-2t} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{i\xi t} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

- det inversa F-transformation.

Enligt (2) i tab. 2, med $c = -t$

$$u(x,t) = e^{-2t} f(x+t).$$

6. Problemet har ohomogena gränsvillkor, därför ett förberedelsesteg krävs. Vi söker en enkel V som satisfierar gränsvillkoren $V(0)=0$, $V'(1)=1$, $V(x) = X$ passar bra. Nu söker vi lösningen i formen $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$. Sätter in i problemet i får

$W_{xx} = W_t + W + X$, $w(0,t) = w_x'(1,t) = 0$; $w(x,0) = 0$.

Sturm - Liouville problemet är

$$X'' = KX, \quad x \in (0,1), \; X(0) = X'(1) = 0.$$

Allmäna lösningen är

Fall 1: $K < 0$, $K = -\lambda^2$

$X(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$. Fr gränsvillkoret i $x=0$ följer $B=0$. $X' = A\lambda\cos\lambda x$. $X'(1)=0$, $\cos\lambda = 0$,

$\lambda = \lambda_n = n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n = 0, 1,$. $X_n(x) = \sin\lambda_n t$.

Fall 2 $K \geq 0$, $K = \lambda^2$. Allmäna lösningen är

$X(x) = A\sinh\lambda x + B\cosh\lambda x$. $X=0 \Rightarrow B=0$.

gränsvillkoret i $x=1 \Rightarrow \cosh\lambda = 0$ - inga lösningar.

Alltså $X_n(x) = \sin\lambda_n t$, $\lambda_n = n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n = 0, 1, ..$

är ett fullständigt ortogonalt system

Söker lösningen av vårt problem för w som en serie

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\, X_n(x) .$$

Sätter in i ekvationen:

$$\sum -c_n(t)\,\lambda_n^2\, X_n(x) = \sum c_n'(t) X_n(x) + \sum c_n(t) X_n(x) + X$$

Multiplicerar med $X_k(x)$ och integrerar:
Alla integralen utom $n=k$ försvinner, och
Vi får $\left(\int_0^1 X_k^2\, dx = 1/2 \right)$.

$$-\frac{1}{2} c_n(t)\,\lambda_n^2 = \frac{1}{2} c_n' + \frac{1}{2} c_n + b_n \qquad (*)$$

$$b_n = \int_0^1 x\, X_k(x)\, dx = \lambda_n^{-1}$$

ordinära differen. (*) lösas med begynnelsevillkoret
$c_n(0) = 0$

$$c_n = \frac{-2 b_n}{\lambda_n^2 + 1}\left(1 - e^{-(\lambda_n^2+1)t}\right).$$

Svar:

$$u(x,t) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2\lambda_n^{-1}}{\lambda_n^2+1}\left(1 - e^{-(\lambda_n^2+1)t}\right) \sin \lambda_n x$$

$$\lambda_n = \pi n + \frac{\pi}{2} .$$

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa
Telefon: Erik Broman, 0740-459022, Tobias Gebäk, 0740-350646
2004-01-17 kl. 8.45-13.45

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Ett linjärt tidsinvariant kausalt system har stegsvaret $f(t) = e^{-t}\theta(t)$, (dvs. $f(t)$ är utsignalen då insignalen är $\theta(t)$).

   a) Beräkna utsignalen då insignalen är $t\theta(t)$.

   b) En sinusformad insignal ger en utsignal, vars amplitud är hälften av insignalens. Beräkna vinkelfrekvensen.

2. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som minimerar

$$\int_{-\infty}^{\infty} [|x| - P(x)]^2 e^{-x^2} dx.$$

3. a) Lös Laplaces differentialekvation

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 2, \quad y > 0, \\ u(0,y) = u_x(2,y) = 0, & \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ 1, & 1 < x < 2. \end{cases} \end{cases}$$

   b) Ge någon fysikalisk tolkning av problemet i uppgift (a).

4. Bestäm en lösning till problemet,

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x^2 e^{-x^2}, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

   Ledning: Fouriertransformera i x-led.

5. Låt f vara en funktion i $L^1(\mathbb{R})$. Definiera $F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2k\pi)$.

   a) Visa att F är 2π periodisk.

   b) Härled ett samband mellan F:s Fourierkoefficienter och f:s Fouriertransform.

   c) Bevisa (under lämpliga förutsättningar) *Poissons Summationsformel:*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

6. Bestäm temperaturen $u = u(r,t)$ i klotet $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < 1$, då

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}), & 0 < r < 1, \quad t > 0, \\ u(1,t) + u_r(1,t) = 0, & u(r,0) = f(r), \quad u \text{ begränsad}. \end{cases}$$

7. Formulera och bevisa samplingsteoremet.

8. $J_n(x)$ är Besselfunktion an orning n. Visa *genererande funktionsfomel:*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = e^{\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})}, \quad \forall z \neq 0, \quad \forall x.$$

MA

Lösningar, TMA 132, Fourieranalys F2/Kf2, 2004-01-17

1. a) $\theta(t) \overset{S}{\curvearrowright} e^{-t}\theta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\text{-transf.}} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s} H(s) \Rightarrow H(s) = \frac{s}{s+1}$

så $t\theta(t) \overset{S}{\curvearrowright} y(t)$. Eftersom $t\theta(t) \overset{\mathcal{L}}{\supset} \frac{1}{s^2}$ fås

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} H(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}. \quad \text{Dvs}$$

$$\underline{\underline{y(t) = (1-e^{-t})\theta(t)}}$$

b) $\sin(\omega t) \overset{S}{\curvearrowright} A(\omega)\sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}\sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow$

$$|\hat{H}(\omega)| = |H(i\omega)| = \left|\frac{i\omega}{i\omega+1}\right| = \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$\frac{|\omega|}{\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega^2 + 1 = 4\omega^2 \Rightarrow \underline{\underline{\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}}}.$$

---

2. Använd Hermite polynomen $H_n(x)$. Skriv

$$P(x) = a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \left[|x| - \sum_0^2 a_n H_n(x)\right]^2 e^{-x^2} dx$ blir minimal

precis då $a_n = c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| H_n(x) e^{-x^2} dx$

$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[-e^{-x^2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot 2x \cdot e^{-x^2} dx = 0 \quad \text{(udda integrand)}$$

$$c_2 = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|(4x^2-2) e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx - \frac{c_0}{4} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\cancel{-\frac{x^2}{2} e^{-x^2}}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{c_0}{2} - \frac{c_0}{4} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}$$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 1 + \frac{1}{4\sqrt{\pi}}(4x^2 - 2) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)}}.$$

3. a) (DE): $u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y < \infty$

(RV1): $u(0,y) = 0$ (RV3): $u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 0, & 0<x<1 \\ 1, & 1<x<2 \end{cases}$

(RV2): $u'_x(2,y) = 0$ (RV4): $\lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) = 0$.

Delproblem: Finn lösningar $u(x,y) = X(x)Y(y)$ till DE + RV1 + RV2, som inte är $\equiv 0$.

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0; \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Egenvärdesproblem: $X'' = \lambda X; \quad X(0) = X'(2) = 0$.

Egenlösningar: $X_n(x) = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{2}; \quad n = 0,1,2,\dots$

Egenvärden $\lambda_n(x) = -\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]^2 = -\alpha_n^2$.

$$Y_n''(y) - \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]^2 Y_n(y) = 0,$$

$$Y_n(y) = A_n e^{\alpha_n y} + B_n e^{-\alpha_n y}, \qquad \alpha_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

$X_n(x)Y_n(y)$ klarar delproblemet.

Superposition:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n e^{\alpha_n y} + B_n e^{-\alpha_n y}\right]\sin\alpha_n x$$

uppfyller DE + RV1 + RV2.

RV4 uppfyllt om $A_n = 0, \ \forall n$.

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-\alpha_n y}\sin(\alpha_n x) \quad \text{klarar DE+RV1+RV2+RV4}$$

(RV3): $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(\alpha_n x) = $ OG-serie i $(0,2)$

$$B_n = \frac{1}{M_n}\int_0^2 f(x)\sin(\alpha_n x)\,dx = \int_1^2 \sin(\alpha_n x)\,dx = \left\{M_n = \int_0^2 \sin^2\alpha_n x\,dx = 1\right\}$$

$$= \left[-\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{2}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}\right]_1^2 = \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}.$$

Svar: $$\underline{\underline{u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\alpha_n}{\alpha_n}e^{-\alpha_n y}\sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}$$

b) Värmeledning i området $0<x<2, \ 0<y<\infty, \ -\infty<z<\infty$.

Begränsningsytan $x=0$ hålls vid temp $u=0$, ytan $x=2$ är isolerad, ytan $y=0$ vid temp. $f(x)$. Stationärt tillstånd. Inga inre värmekällor.

4. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = x^2 e^{-x^2} = f(x). \end{cases}$

Fouriertransformera i x-led. $\mathcal{F}_x[u(x,t)] = \hat{u}(\xi, t)$.

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (i\xi)^2 \hat{u} + (i\xi)\hat{u} = (-\xi^2 + i\xi)\hat{u}$$

$$\hat{u}(\xi,t) = C(\xi)\, e^{(-\xi^2 + i\xi)t}$$

$$\hat{u}(\xi,0) = C(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

$$e^{-x^2} \overset{\mathcal{F}}{\supset} \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4} \Rightarrow x e^{-x^2} \overset{\mathcal{F}}{\supset} i \frac{d}{d\xi} \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4} = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2} \xi e^{-\xi^2/4}$$

$$f(x) = x^2 e^{-x^2} \overset{\mathcal{F}}{\supset} i \frac{d}{d\xi}\left(\frac{-i\sqrt{\pi}}{2} \xi e^{-\xi^2/4}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 - \frac{\xi^2}{2}\right) e^{-\xi^2/4} = \hat{f}(\xi)$$

$$\hat{u}(\xi,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 - \frac{\xi^2}{2}\right) e^{-\xi^2/4}\, e^{-\xi^2 t} \cdot e^{i\xi t} =$$

$$= \underline{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 - \frac{\xi^2}{2}\right) e^{-(t+\frac{1}{4})\xi^2}\, e^{i\xi t}}$$

Låt $\underline{A = t + \frac{1}{4}}$; $\frac{1}{\sqrt{4\pi A}} e^{-x^2/4A} \overset{\mathcal{F}}{\supset} e^{-A\xi^2}$

$$-i \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi A}} e^{-x^2/4A}\right) \overset{\mathcal{F}}{\supset} \xi e^{-A\xi^2}$$

$$\xi e^{-A\xi^2} \subset \frac{1}{\sqrt{4\pi A}} \frac{ix}{2A} e^{-x^2/4A}$$

$$\xi^2 e^{-A\xi^2} \subset -i \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi A}} \frac{ix}{2A} e^{-x^2/4A}\right) = \frac{1}{2A\sqrt{4\pi A}}\left(1 - \frac{x^2}{2A}\right) e^{-x^2/4A}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 - \frac{\xi^2}{2}\right) e^{-A\xi^2} \overset{\mathcal{F}}{\subset} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi A}}\left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2A}\left(1 - \frac{x^2}{2A}\right)\right] e^{-x^2/4A}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4t+1}}\left[1 - \frac{1}{4t+1}\left(1 - \frac{2x^2}{4t+1}\right)\right] e^{-x^2/4t+1}$$

$$= \frac{2t(4t+1) + (x+t)^2}{(4t+1)^{5/2}} e^{-x^2/(4t+1)}$$

$$u(x,t) = \frac{2t(4t+1) + (x+t)^2}{(4t+1)^{5/2}} e^{-\frac{(x+t)^2}{4t+1}}.$$

5. a) $F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x+2k\pi)$

$$F(x+2\pi) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x+2(k+1)\pi) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x+2k\pi) = F(x).$$

$\therefore$ $\underline{\underline{F \quad 2\pi\text{-periodisk}}}$.

b) $$C_n(F) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+2k\pi)e^{-inx}\,dx$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-inx} = \underline{\underline{\frac{\hat{f}(n)}{2\pi}}}.$$

c) $$\underline{\underline{\sum_{-\infty}^{\infty} f(2k\pi)}} = F(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n(F)\,e^{in0} = \underline{\underline{\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)}}.$$

---

6. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right); \quad 0<r<1;\ t>0, \\ u(r,t) \text{ begränsad} \\ u(1,t) + u_r(1,t) = 0 \\ u(r,0) = f(r). \end{cases}$$

Vi kan skriva $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$.

För $v = ru$ fås då ekvationerna:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} \\ v(0,t) = v_r(1,t) = 0, \quad v(r,0) = r f(r). \end{cases}$$

$v(r,t) = R(r)T(t)$ i de homogena ekvationer ger $\frac{T'}{T} = \frac{R''}{R} = -\lambda$,

$R'' + \lambda R$, $R(0) = R'(1) = 0 \Rightarrow R = R_n(r) = \sin(n+\frac{1}{2})\pi r$

$T' = -\lambda_n T \Rightarrow T = T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n t}$ Ansats

$v(r,t) = \sum_0^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t}\sin(n+\frac{1}{2})\pi r \Rightarrow v(r,0) = \sum_0^{\infty} C_n \sin(n+\frac{1}{2})\pi r = r f(r)$.

$\{\sin(n+\frac{1}{2})\pi r\}_0^{\infty}$ OG-bas $\Rightarrow$ $\underline{C_n = 2\int_0^1 r f(r)\sin(n+\frac{1}{2})\pi r\,dr}$

Med denna C_n blir lösningen $\underline{\underline{u(r,t) = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 t}\sin(n+\frac{1}{2})\pi r}}$

MA.

Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK Telefon: Erik Broman, 0740–459022
Chalmers tekniska högskola 2003–03–08 kl. 8.45-13.45

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som minimerar
$$\int_0^\infty [e^{-x} - P(x)]^2 x\, e^{-x}\, dx.$$

2. Signalen $x(t)$, $-\infty < t < \infty$ har Fouriertransformen $\hat{x}(\omega)$ där
$$|\hat{x}(\omega)| = \begin{cases} 1, & \text{för } |\omega| < 1, \\ 2, & \text{för } 2 < |\omega| < 3, \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$$
Låt $\alpha > 0$ och sätt $h_\alpha(t) = \frac{\sin \alpha t}{\pi t}$, $-\infty < t < \infty$. Bestäm funktionen
$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big|(h_\alpha * x)(t)\Big|^2\, dt,$$
och rita dess graf.

3. Låt $\chi_a(x) = \theta(x+a) - \theta(x-a)$. Bestäm en lösning till ekvationen
$$\begin{cases} u_{xx} + cu_x = u_t, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \chi_a(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$
där c är en reell parameter och $a > 0$.

4. Bestäm den elektrostatiska potentialen i området utanför två tangerande cylindrar med cirkulära tvärsnitt $C_1 : |z| \le 1$, och $C_2 : |z - 3/2| \le 1/2$ och med motsvarande randvärdena P_1 på $|z| = 1$, resp. P_2 på $|z - 3/2| = 1/2$.

5. Antag att $c > 0$. Bestäm en lösning (spänningen $u(x,t)$ längs en elkabel med konstant polspänning $E \ne 0$) till ekvationen
$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{tt}, & t > 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = E, & u_x(1,t) + 2u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

6. Bestäm den stationära temperaturen i cylindern $x^2 + y^2 \le a^2$, $0 \le z \le b$ då den buktiga ytan $x^2 + y^2 = a^2$ och "toppen": $z = b$ hålls vid temperaturen 0 medan "botten": $z = 0$ är på en "platta" med tempuraturen $f(r,\theta)$ där $f(a,\theta) = 0$, för $-\pi \le \theta \le \pi$.

7. f är 2π-periodisk och styckvis $\mathcal{C}^1$ på $\mathbb{R}$ med $\mathcal{F}$-koefficienter C_n. Visa att
$$\sum_{-N}^{N} C_n e^{in\theta} \longrightarrow \frac{1}{2}\Big[f(\theta_-) + f(\theta_+)\Big], \qquad \text{då } N \longrightarrow \infty.$$

8. Formulera och bevisa Fouriers inversionssats (obs! valfritt version).

MA

Lösningar, TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng; 2003–03–08

1. Använd Laguerre polynom som är ortogonal på $(0,\infty)$ m.a.p. viktfunktionen $w(x) = xe^{-x}$. Integralen blir minimal om $P(x) = \sum_{n=0}^{2} C_n L_n^{(1)}(x)$, där $L_n^{(1)}(x) = \frac{x^{-1}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\Big(x^{1+n}e^{-x}\Big)$ och C_n är Fourierkoefficienter av e^{-x} i basen $\Big\{L_n^{(1)}(x)\Big\}$ med $||L_n^{(1)}||^2 = \frac{\Gamma(n+1+1)}{n!} = \frac{\Gamma(n+2)}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} = (n+1)$:

$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{n+1}\int_0^\infty e^{-x}L_n^{(1)}(x)xe^{-x}\,dx = \frac{1}{n+1}\int_0^\infty e^{-x}\,\frac{x^{-1}e^x}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\Big(x^{1+n}e^{-x}\Big)xe^{-x}\,dx\\
&= \frac{1}{n!(n+1)}\int_0^\infty e^{-x}\,\frac{d^n}{dx^n}\Big(x^{1+n}e^{-x}\Big)\,dx = \{\text{P.I. n gånger}\}\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^\infty x^{1+n}e^{-2x}\,dx = \{s = 2x\}\\
&= \frac{1}{(n+1)!2^{n+2}}\int_0^\infty s^{1+n}e^{-s}\,ds = \frac{\Gamma(n+2)}{(n+1)!2^{n+2}} = \frac{1}{2^{n+2}}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

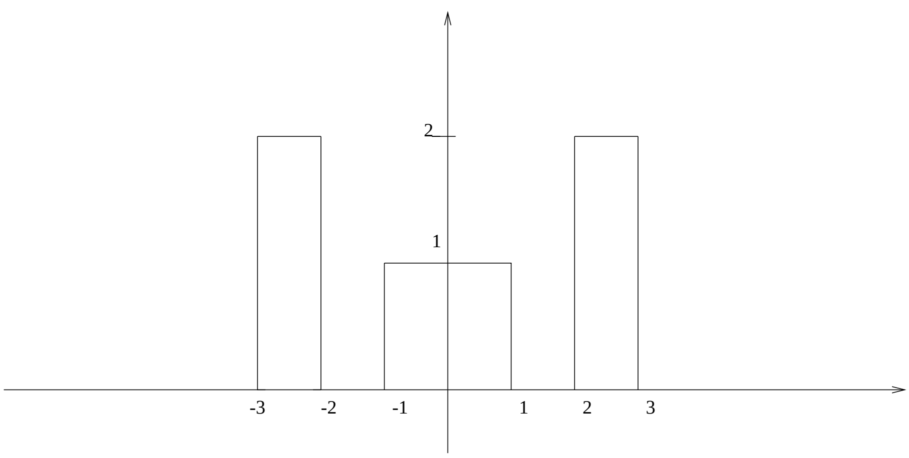
Observera att $L_0^{(1)}(x) = 1$, $L_1^{(1)}(x) = 2-x$, och $L_2^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(6-6x+x^2)$. Alltså vi har att

$$
\begin{aligned}
\underline{\text{Svar:}}\quad P(x) &= \frac{1}{4}L_0^{(1)}(x) + \frac{1}{8}L_1^{(1)}(x) + \frac{1}{16}L_2^{(1)}(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(2-x) + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}(6-6x+x^2)\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} - (\frac{1}{8} + \frac{3}{16})x + \frac{1}{32}x^2 = \frac{1}{32}(22-10x+x^2).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

2. Funktionen $h_\alpha(t) = \frac{\sin\alpha t}{\pi t}$ har Fouriertransformen

$$
\hat{h}_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \alpha,\\ 0, & |\omega| > \alpha. \end{cases}
\tag{3}
$$

Vi har $\hat{x}(\omega)$ enligt figuren:



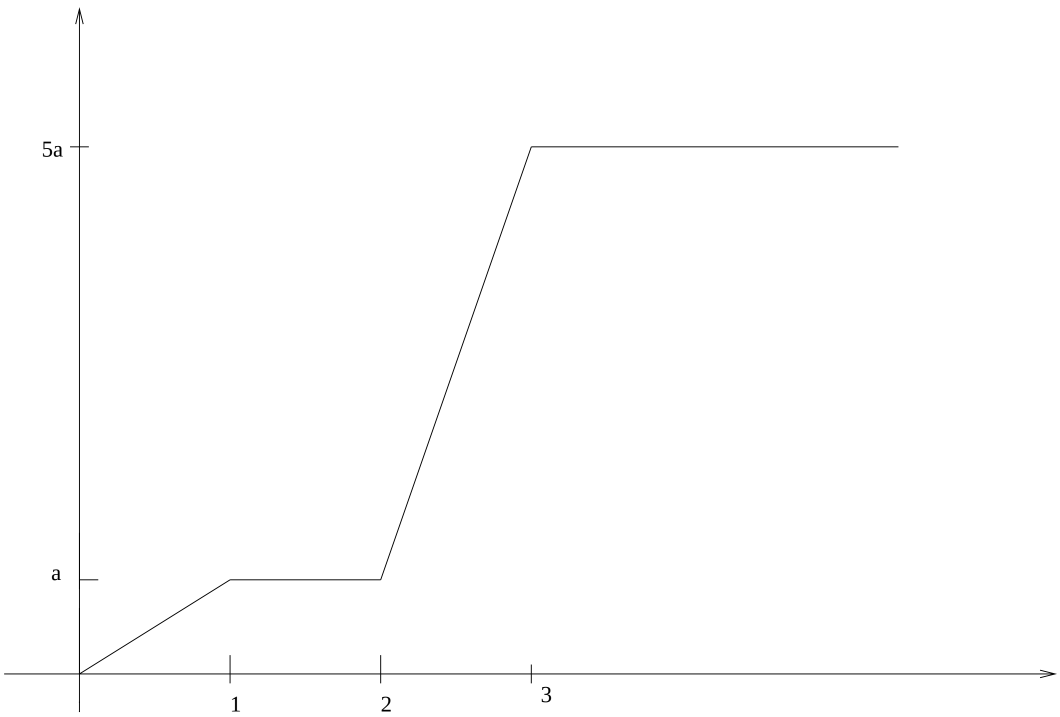
Enligt Plancherel har vi att

$$
\begin{aligned}
f(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|(h_\alpha * x)(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{h}_\alpha(\omega)\hat{x}(\omega)\right|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \left|\hat{x}(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\alpha} \left|\hat{x}(\omega)\right|^2 d\omega,
\end{aligned} \tag{4}
$$

vilket ger

$$
\begin{array}{ll}
0 < \alpha \le 1: & f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^\alpha d\omega = \frac{\alpha}{\pi} \\
1 \le \alpha \le 2: & f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 d\omega = \frac{1}{\pi} \\
2 \le \alpha \le 3: & f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 d\omega + \frac{1}{\pi}\int_2^\alpha 4 d\omega = \frac{4\alpha-7}{\pi} \\
3 \le \alpha < \infty: & f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 d\omega + \frac{1}{\pi}\int_2^3 4 d\omega = \frac{5}{\pi}.
\end{array}
$$

Med a= α/π blir grafen av $f(\alpha)$:



Alltså är

$$
\underline{\text{Svar:}} \qquad f(\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\pi}, & 0 < \alpha \le 1 \\ \frac{1}{\pi}, & 1 \le \alpha \le 2 \\ \frac{4\alpha-7}{\pi}, & 2 \le \alpha \le 3 \\ \frac{5}{\pi}, & 3 \le \alpha < \infty. \end{cases}
$$

3. Vi har den tidsberoende konvektion-diffusion ekvationen:

$$\begin{cases} u_{xx} + cu_x = u_t, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \chi_a(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

där bygynnelsedatan $\chi_a(x)$ har Fouriertransformen:

$$\hat{\chi}_a(x) = \int_{-a}^{a} e^{-i\xi x}\, dx = 2\frac{\sin a\xi}{\xi}.$$

Alternativ **I.** Med Fourier inversionsformel (i x-led) har vi:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi,t)e^{i\xi t}\, d\xi.$$

Insättning i differentialekvationen ger att

$$\begin{cases} (-\xi^2 + ic\xi)\hat{u} = \hat{u}_t, & t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(\xi,0) = 2\frac{\sin a\xi}{\xi}, & \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \hat{u}(\xi,t) = 2\frac{\sin a\xi}{\xi}e^{(-\xi^2+ic\xi)t}.$$

Vi har att $\mathcal{F}_x^{-1}\left[e^{-\xi^2 t}\right] = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$, $t > 0$. Faltningssatsen ger då

$$\mathcal{F}_x^{-1}\left[2\frac{\sin a\xi}{\xi}e^{-\xi^2 t}\right] = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-a}^{a} e^{-\frac{(x-\beta)^2}{4t}}\, d\beta = \left\{s = \frac{x-\beta}{\sqrt{4t}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-a}{\sqrt{4t}}}^{\frac{x+a}{\sqrt{4t}}} e^{-s^2}\, ds.$$

Med $c \in \mathbb{R}$, och translation får vi:

$$\underline{\text{Svar:}} \quad u(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}\left[2\frac{\sin a\xi}{\xi}e^{-\xi^2 t}e^{ic\xi t}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x+ct-a}{\sqrt{4t}}}^{\frac{x+ct+a}{\sqrt{4t}}} e^{-s^2}\, ds.$$

Alternativ **II.** Sätt $u(x,t) = v(x+ct,t)$. Då fås

$$\begin{cases} v_{xx} = v_t, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ v(x,0) = \chi_a(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Samma kalkyler som ovan (med $c = 0$) ger

$$\hat{v}(\xi,t) = 2\frac{\sin a\xi}{\xi}e^{-\xi^2 t},$$

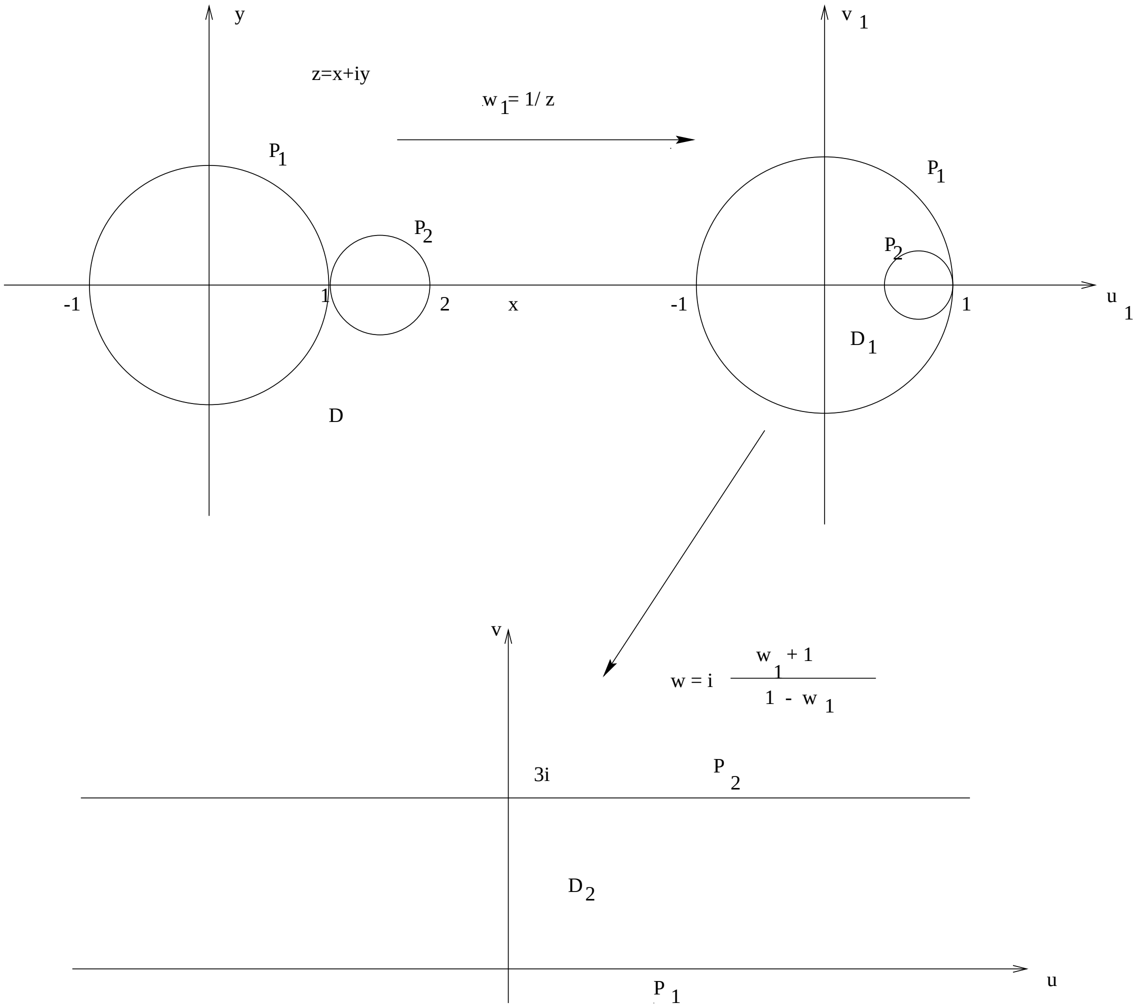
Som har invers transformen:

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-a}{\sqrt{4t}}}^{\frac{x+a}{\sqrt{4t}}} e^{-s^2}\, ds.$$

Alltså vi har igen

$$\underline{\text{Svar:}} \quad u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x+ct-a}{\sqrt{4t}}}^{\frac{x+ct+a}{\sqrt{4t}}} e^{-s^2}\, ds.$$

4. $w_1 = 1/z$ avbildar det aktuella snittet D till området D_1 mellan enhetscirkeln $|w_1| \leq 1$ och cirkeln $|w_1 - 1/2| \leq 1/2$. Sedan avbildar $w = i\frac{w_1+1}{1-w_1}$, D_1 till bandet mellan reella-axeln och $v = 3i$. Den sammansatta avbildningen w avbildar randerna $|z| = 1$ och $|z - 3/2| = 1/2$ på reella-axeln: u, respektive $v = 3i$ i w-planet.



Alltså har vi följande potential problem i w-planet:

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0, & \text{för} \quad (u,v) \in \mathbb{R} \times (0,3), \\ \psi(u,0) = P_1, \quad \psi(u,3) = P_2, & \text{för} \quad u \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Funktionen $\psi(u,v) = P_1 + (P_2 - P_1)\frac{V}{3}$ satisfierar båda differentialekvation och radndata. Sätt $w_1 = u_1 + iv_1$. Då har vi

$$w = i\frac{1 + u_1 + iv_1}{1 - u_1 + iv_1} = i\frac{(1 + u_1 + iv_1)(1 - u_1 + iv_1)}{(1 - u_1)^2 + v_1^2} = i\frac{1 - u_1^2 - v_1^2 - i2v_1}{(1 - u_1)^2 + v_1^2}.$$

Dvs potential problemet i w_1-planet har lösningen

$$\Psi(u_1, v_1) = P_1 + \frac{P_2 - P_1}{3} \cdot \frac{1 - u_1^2 - v_1^2}{(1-u_1)^2 + v_1^2} = \frac{1 - (u_1^2 + v_1^2)}{1 + (u_1^2 + v_1^2) - 2u_1}.$$

Vidare gäller för $w_1 = 1/z$, $u_1 + iv_1 = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$, dvs $u_1 = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v_1 = -\frac{y}{x^2+y^2}$ och $u_1^2 + v_1^2 = \frac{1}{x^2+y^2}$. Alltså lösningen är

$$\underline{\text{Svar:}}\quad \varphi(x,y) = P_1 + \frac{P_2 - P_1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{x^2+y^2}}{1 + \frac{1}{x^2+y^2} + 2\frac{1}{x^2+y^2}} = P_1 + \frac{P_2 - P_1}{3} \cdot \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+3}.$$

Anm: Alternativt kunde vi direkt avbilda D till bandet D_2 i w-planet, genom att avbilda $z = 1$ på $w = \infty$, ...

5. Då $E \neq 0$ har vi inhomogenitet. Ansätt $u(x,t) = S(x) + v(x,t)$ och välj $S(x)$ så att den satisfierar båda differetialekvationen och randvillkoren:

$$S''(x) = 0, \quad S(0) = E, \quad S'(1) + 2S(1) = 0.$$

Vi får $S(x) = E(1 - \frac{2}{3}x)$. Då har vi

$$u(x,t) = E(1 - \frac{2}{3}x) + v(x,t).$$

Insättning i u:s problem ger v:problemet:

$$\begin{cases} v_{xx} = \frac{1}{c^2} v_{tt}, & t > 0, & 0 < x < 1, \\ v(0,t) = 0, & v_x(1,t) + 2v(1,t) = 0, & t > 0, \\ v(x,0) = E(\frac{2}{3}x - 1), & v_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Ansätt $v(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$. Vi får

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \lambda (< 0).$$

Vi får följande egenvärdesproblem för $X(x)$:

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad X(0) = 0, \quad X'(1) + 2X(1) = 0.$$

Sätt $\lambda = -\alpha^2$ fås $X(x) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x$. $X(0) = 0, \Longrightarrow B = 0$, och $X'(1) + 2X(1) = 0 \Longrightarrow A\alpha\cos\alpha + 2A\sin\alpha = 0$. Detta är uppfyllt med $A \neq 0$ om och endast om

$$\tan\alpha = -\alpha/2.$$

Denna ekvation har oändlig många positiva rötter α_n,

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots,$$

som svarar mot skärningspunkter mellan kurvan $y = \tan\alpha,\ \alpha > 0$ och linjen $y = -\alpha/2$. Egenlösning till egenväderproblemet för X är nu

$$X_{n(x)} = \sin\alpha_n x, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Tillhörande tidsfunktioner satisfierar differentialekvationen:

$$T_n''(t) = -c^2\alpha_n^2 T_n(t),$$

med allmänna lösningen

$$T_n(t) = A_n \cos\alpha_n ct + B_n \sin\alpha_n ct.$$

Superposition ger

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[A_n \cos\alpha_n ct + B_n \sin\alpha_n ct\Big] \sin\alpha_n x.$$

Villkoret $v_t(x,0) = 0 \Longrightarrow B_n = 0$ medan

$$v(x,0) = E(\frac{2}{3}x - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\alpha_n x, \quad 0 < x < 1.$$

Egenfunkyionerna $\sin\alpha_n x,\ n = 1, 2, \ldots$ bildar ett fullständigt ortogonalsystem i intervallet $(0,1)$ och A_n är Fourierkoefficienter

$$A_n = \frac{1}{M_n}\int_0^1 [E(\frac{2}{3}x - 1)] \sin\alpha_n x\, dx,$$

med normaliseringsfaktorer

$$M_n = \int_0^1 \sin^2\alpha_n x\, dx = \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4 + \alpha_n}.$$

Därmed (med A_n enligt ovan) har vi lösningen:

$$\underline{\text{Svar:}}\quad u(x,t) = E(1 - \frac{2}{3}x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\alpha_n ct \sin\alpha_n x.$$

6. Vi har randvärdesproblemet:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & 0 \le r < a, \quad -\pi \le \theta \le \pi, \quad 0 < z < b, \\ u(a,\theta,z) = 0, & -\pi \le \theta \le \pi, \quad 0 \le z \le b, \\ u(r,\theta,b) = 0, & 0 \le r < a, \quad -\pi \le \theta \le \pi, \\ u(r,\theta,0) = f(r,\theta), & 0 \le r < a, \quad -\pi \le \theta \le \pi, \end{cases}$$

där $f(a,\theta) = 0,\ -\pi \le \theta \le \pi$. Variabelseparationen $u(r,\theta,z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z) \neq 0$ ger följande differential ekvationer för R, Θ och Z:

$$\begin{aligned} r^2 R'' + rR' - (r^2\lambda + \mu)R &= 0, \\ \Theta'' + \mu\Theta &= 0, \\ Z'' + \lambda Z &= 0. \end{aligned}$$

Här är Θ ekvationen 2π periodisk och har lösningsformen:

$$\Theta(\theta) = A\cos n\theta + B\sin n\theta, \quad \text{för} \quad \mu = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

medan ekvationen för Z är

$$Z(z) = C\sinh\beta(b-z), \quad \text{för} \quad \lambda = -\beta^2, \quad \beta > 0.$$

Nu för varje n är ekvationen för R en Bessels differentialekvation av ordning n. Detta, med randvillkor (och $\lambda = -\beta^2$), ger att R är av formen

$$R_n(r) = DJ_n(\beta r),$$

där J_n är Bessel funktion av första slaget. Randvillkoret $u(a,\theta,z) = 0 \Longrightarrow R(a) = 0$. Dvs

$$J_n(\beta a) = 0.$$

Därför, för varje n, om $0 < \alpha_{n1} < \alpha_{n2} < \cdots < \alpha_{nm} < \cdots$ är nollställerna av J_n, så är $\beta_{nm} = \alpha_{nm}/a$. Detta ger att

$$R_n(r) = DJ_n(\alpha_{nm}r/a).$$

Med supperposition fås

$$\underline{\text{Svar:}} \quad u(r,\theta,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n\Big(\frac{\alpha_{nm}r}{a}\Big)(a_{nm}\cos n\theta + b_{nm}\sin n\theta)\sinh\Big(\frac{\alpha_{nm}(b-z)}{a}\Big),$$

där a_{nm} och b_{nm} är konstanter. Slutligen genom att använda randvillkoren och dubbla ortogonal system involverande både Bessels funktioner och trigonometriska funktioner får vi fram koefficienterna:

$$a_{0m} = \frac{1}{\pi a^2\sinh(\alpha_{0m}b/a)[J_1(\alpha_{0m})]^2}\int_0^a\int_0^{2\pi} f(r,\theta)J_0\Big(\frac{\alpha_{0m}r}{a}\Big)\,r\,dr\,d\theta,$$

för $m = 1, 2, 3, \ldots$ och för $n, m = 1, 2, 3, \ldots,$ fås

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \tfrac{2}{\pi a^2\sinh(\alpha_{nm}b/a)[J_{n+1}(\alpha_{nm})]^2}\int_0^a\int_0^{2\pi} f(r,\theta)J_n\Big(\tfrac{\alpha_{nm}r}{a}\Big)\cos(n\theta)\,r\,dr\,d\theta,\\ b_{nm} &= \tfrac{2}{\pi a^2\sinh(\alpha_{nm}b/a)[J_{n+1}(\alpha_{nm})]^2}\int_0^a\int_0^{2\pi} f(r,\theta)J_n\Big(\tfrac{\alpha_{nm}r}{a}\Big)\sin(n\theta)\,r\,dr\,d\theta. \end{aligned}$$

/MA

Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK Telefon: Georgios Foufas, 0740-459022
Chalmers tekniska högskola 2003-01-18 kl. 8.45-13.45

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som minimerar
$$\int_{-1}^{1}[\sqrt{1-x^2}-P(x)]^2\,dx.$$

2. Bestäm en lösning till ekvationen
$$\begin{cases} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & -\infty<x<\infty, \quad t>0. \\ u(x,0)=e^{-|x|}, & \lim_{t\to\infty}u(x,t)=0. \end{cases}$$

3. Betrakta differentialekvationen
$$u_{xx}=u_t, \qquad -\infty<x<\infty, \quad t\geq 0.$$
Visa att om $u(x,t)$ är periodisk som funktion av x med perioden 2π, så
$$\int_{-\pi}^{\pi}u(x,0)\,dx=0 \Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}|u(x,t)|^2\,dx\leq e^{-2t}\int_{-\pi}^{\pi}|u(x,0)|^2\,dx, \qquad t\geq 0.$$

4. Antag $0<a<L$ och $c>0$. Lös ekvationen
$$\begin{cases} u_{xx}=\frac{1}{c^2}u_{tt}, & t>0, & 0<x<L, \\ u(0,t)=u(L,t)=0, & t>0, & \\ u(x,0)=0, & u_t(x,0)=\delta(x-a), & 0<x<L. \end{cases}$$

5. Bestäm samtliga egenvärden och egenfunktioner till problemet
$$\begin{cases} -\frac{1}{r}(rR')'=\lambda R, & 0<r<a, \\ R(r) \text{ begränsad då } r\to 0, & R'(a)=0. \end{cases}$$
Utveckla funktionen r^2 i Fourierserie m.a.p. egenfunktionerna.
Ledning: Man kan få användning av följande formler:
$$\int J_0^2(x)\,x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big[J_0^2(x)+J_1^2(x)\Big], \quad \frac{d}{dx}\Big(x^pJ_p(x)\Big)=x^pJ_{p-1}(x).$$

6. Undersök hur avbildningen $w=\frac{z}{z-2i}$ avbildar området $\Omega=\{z:|z-i|<1,\ Rez>0\}$. Använd resultatet för att bestämma en funktion $\varphi(x,y)$, $(z=x+iy)$ som är harmonisk i Ω och har randvärdena
$$\varphi(x,y)=\begin{cases} P, & \text{om } |z-i|=1, & x>0, \\ 0, & \text{om } x=0, & 0<y<2. \end{cases}$$

7. Formulera och bevisa samplingsteoremet då $f\in L^2$.

8. Visa att $J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$ satisfierar Bessels differentialekvation
$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0.$$

MA

Lösningar Fourieranalys F2/Kf2, 5p (TMA132), 18/01-2003.

1) Ansätt $P(x) = \sum_{k=0}^{2} c_k P_k(x)$, där $P_k(x)$ är Legendre polynom av grad k.

Då blir integralen minimal om och endast om

$$c_k = (k+\tfrac{1}{2})\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,P_k(x)\,dx,\quad k=0,1,2; \quad P_0(x)=1,\ P_1(x)=1 \text{ och } P_2(x)=\tfrac{1}{2}(3x^2-1):$$

Detta ger

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot 1\,dx = \int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx = \{x=\sin t\} = \int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2t\right)dt = \frac{\pi}{4}.$$

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,x\,dx = \{\text{udda}\} = 0.$$

$$c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)\,dx = \frac{15}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,x^2\,dx - \frac{5}{2}c_0 = \frac{15}{2}\underbrace{\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,x^2\,dx}_{:=J} - \frac{5c_0}{2}$$

$$J = \{x=\sin t\} = \int_0^{\pi/2}\cos t\cdot\sin^2 t\cdot\cos t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(\sin 2t)^2\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{\pi}{16} \implies c_2 = \frac{15}{2}\cdot\frac{\pi}{16} - 5\cdot\frac{\pi}{8} = -\frac{5\pi}{32}.$$

Svar: $\underline{\underline{P_2(x)}} = -\frac{5\pi}{32}\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1) + \frac{\pi}{4} = -\frac{15\pi}{64}x^2 + \frac{21\pi}{64} = \underline{\underline{\frac{3\pi}{64}(-5x^2+7)}}$

---

2)
$$\begin{cases} (DE): & \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -\infty<x<\infty,\ t>0 \\ (RV1): & u(x,0) = e^{-|x|} \quad -\text{"}- \\ (RV2): & \lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \end{cases}$$

F-transf. i x-led ger $\underline{\underline{(DE)^\wedge}}: (i\xi)^4\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_{tt}(\xi,t)$ dvs $\underline{\underline{\hat{u}_{tt} - \xi^4\hat{u} = 0}}$.

$(DE)^\wedge$'s lösningar: $\hat{u}(\xi,t) = A(\xi)e^{\xi^2 t} + B(\xi)e^{-\xi^2 t}$

(RV2): $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \implies \lim_{t\to\infty}\hat{u}(\xi,t) = \lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\xi x}\,dx = 0 \implies$

$A(\xi)=0$ dvs $\underline{\underline{\hat{u}(\xi,t) = B(\xi)e^{-\xi^2 t}}}$.

$t=0$ ger $u(x,0) = f(x) \overset{F}{\supset} \hat{f}(\xi) = \hat{u}(\xi,0) = B(\xi)$.

$f(x) = e^{-|x|} \implies \hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$ dvs $B(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$.

Alltså $\hat{u}(\xi,t) = \frac{2}{1+\xi^2}e^{-\xi^2 t}$. Nu gäller det att $e^{-ax^2/2} \overset{F}{\supset} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,e^{-\xi^2/2a}$

med $\frac{1}{2a} = t$ fås $a = \frac{1}{2t}$ och $e^{-x^2/4t} \overset{F}{\supset} \sqrt{4\pi t}\,e^{-\xi^2 t} \iff \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} \overset{F}{\supset} e^{-\xi^2 t}$.

och $u(x,t) = e^{-|x|} * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t}$

Svar: $\underline{\underline{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|\sigma-x|}\,e^{-\sigma^2/4t}\,d\sigma.}}$

3) Sätt $u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{\underline{u_n(t)}} e^{jn\Omega x} = \left\{ \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \right\} \stackrel{*}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t) e^{jnx}$

$u_{xx} = u_t$ med termvis derivering $\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 u_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n'(t)$

dvs $-n^2 u_n(t) = u_n'(t)$, $n = 0, \pm 1, \dots$ Alltså $\underline{\underline{u_n(t) = C_n e^{-n^2 t}, \; u_n(0) = C_n}}$

$u(x,0) \stackrel{*}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(0) e^{jnx} = \sum_{n=-n}^{n} C_n e^{jnx} \Rightarrow C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x,0) e^{-jnx}\, dx,$

OBS! $C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x,0)\, dx = 0.$ Parsevals $\Rightarrow$

$\underline{\underline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(x,t)|^2\, dt}} = \sum_{-\infty}^{\infty} |u_n(t)|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|^2 e^{-2n^2 t} \leq \{C_0 = 0\}$

$\leq e^{-2t} \sum_{\substack{-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |C_n|^2 \leq \underline{\underline{\frac{1}{2\pi} e^{-2t} \int_{-\pi}^{\pi} |u(x,0)|^2\, dx}}, \boxed{}$

---

4) $\begin{cases} u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{tt} & t > 0, \quad 0 < x < L & \text{(DE)} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0, & \text{(RV)} \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \delta(x-a), & 0 < x < L. & \text{(BV)} \end{cases}$

Sätt $u(x,t) = X(x) T(t) \neq 0$: (DE) $\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \lambda < 0$

(X) $\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) = A \sin \sqrt{-\lambda}\, x$ med $\begin{cases} \underline{\lambda_n = -\left[\frac{n\pi}{L}\right]^2} \;\&\; \underline{X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x}, \\ n = 1, 2, \dots \text{ (egenpar)} \end{cases}$

$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \lambda$ & $u(x,0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{T_n(t) = A_n \sin \frac{c n\pi}{L} t}}, \; n = 1, 2, \dots$

Alltså $u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin c\frac{n\pi}{L} t \Rightarrow$ {Superposition}

$\underline{\underline{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x \sin c\frac{n\pi}{L} t.}}$ Återstår att bestämma A_n:

$\delta(x-a) = u_t'(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{cn\pi}{L} \sin \frac{n\pi}{L} x.$ Multip. med $\sin \frac{k\pi}{L} x$ & $\int_0^L$

fås: $\underbrace{\int_0^L \overbrace{\sin \frac{k\pi x}{L} \delta(x-a)}^{= \sin \frac{k\pi a}{L} \delta(x-a)}\, dx}_{= \sin \frac{k\pi a}{L}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{cn\pi}{L} \underbrace{\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{k\pi x}{L}\, dx}_{= 0 \text{ om } n \neq k, \; \frac{L}{2} \text{ om } n = k} = A_k \frac{ck\pi}{L} \frac{L}{2}$

Alltså $\sin \frac{k\pi a}{L} = A_k \frac{ck\pi}{2} \Rightarrow \underline{\underline{A_k = \frac{2}{cn\pi} \sin \frac{n\pi a}{L}}}$

Svar: $u(x,t) = \frac{1}{c\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi a}{L} \left[\cos \frac{n\pi}{L}(x-ct) - \cos \frac{n\pi}{L}(x+ct) \right].$ $\boxed{}$

5) $$\begin{cases} \frac{1}{r}(rR')' = \lambda R, & 0 < r \\ R(r) \text{ begränsad då } r \to 0 \\ R'(a) = 0 \end{cases}$$

Singulärt S-L-problem; $\lambda \geq 0$.

$\underline{\lambda = 0}$ ger $(rR')' = 0$, $rR' = C$, $R' = \frac{C}{r}$, $\underline{\underline{R(r) = C_1 \ln r + C_2}}$.

Randvillkoren ger egenfunktionen $\underline{\underline{R_0(r) = 1}}$ till egenvärdet $\underline{\underline{\lambda_0 = 0}}$.

$\underline{\lambda > 0}$. Sätt $\lambda = \beta^2$, $\beta > 0$. Då fås ekv. $R'' + \frac{1}{r}R' + \beta^2 R = 0$ som är Bessels diff.-ekv. av ordning 0 med allm. lösning

$R(r) = C_1 J_0(\beta r) + C_2 Y_0(\beta r)$.

$R(r)$ begr. då $r \to 0 \Rightarrow C_2 = 0$.

$R'(a) = C_1 \beta J_0'(\beta a) = 0 \Rightarrow J_0'(\beta a) = 0$.

Låt α_n, $n \geq 1$, vara de positiva nollställena till $J_0'(x) = -J_1(x)$.

Då fås egenvärdena $\underline{\underline{\lambda_n = \beta_n^2 = \left(\frac{\alpha_n}{a}\right)^2}}$ och egenfunkt. $\underline{\underline{R_n(r) = J_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right)}}$.

$\{R_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ är en og-bas för $L_2(w, (0,a))$ där $w(r) = r$.

En funktion $f \in L_2(w, (0,a))$ kan utvecklas som

$$f(r) = C_0 R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n(r) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right) \text{ med } C_n = \frac{1}{\|R_n\|^2}\int_0^a R_n(r) f(r)\, r\, dr, \quad n \geq 0.$$

$\|R_0\|^2 = \int_0^a 1^2 \cdot r\, dr = \frac{a^2}{2}$.

$n \geq 1$: $\|R_n\|^2 = \int_0^a J_0^2\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right) r\, dr = \left[x = \frac{\alpha_n r}{a}\right] = \left(\frac{a}{\alpha_n}\right)^2 \int_0^{\alpha_n} J_0^2(x)\, x\, dx$

$$= \frac{a^2}{\alpha_n^2}\left[\frac{x^2}{2}\left(J_0^2(x) + J_1^2(x)\right)\right]_0^{\alpha_n} = \frac{a^2}{2} J_0^2(\alpha_n)$$

$f(r) = r^2$ ger $\int_0^a R_0(r) f(r)\, r\, dr = \int_0^a r^3\, dr = \frac{a^4}{4}$, och för $n \geq 1$

$$\int_0^a R_n(r) f(r)\, r\, dr = \int_0^a J_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right) r^3\, dr = \left[x = \frac{\alpha_n r}{a}\right] = \left(\frac{a}{\alpha_n}\right)^4 \int_0^{\alpha_n} x^3 J_0(x)\, dx$$

$$\left(\frac{a}{\alpha_n}\right)^4 \underbrace{\left[x^2 \cdot x J_1(x)\right]_0^{\alpha_n}}_{=0} - \left(\frac{a}{\alpha_n}\right)^4 \int_0^{\alpha_n} 2x \cdot x J_1(x)\, dx = \left(\frac{a}{\alpha_n}\right)^4 \int_0^{\alpha_n} 2x^2 J_0'(x)\, dx$$

$$= \left(\frac{a}{\alpha_n}\right)^4 \left[2x^2 J_0(x)\right]_0^{\alpha_n} - \left(\frac{a}{\alpha_n}\right)^4 \int_0^{\alpha_n} 4x J_0(x)\, dx = \frac{2a^4}{\alpha_n^2} J_0(\alpha_n) - 4\left(\frac{a}{\alpha_n}\right)^4 \underbrace{\left[x J_1(x)\right]_0^{\alpha_n}}_{=0},$$

→ forts.

5)
$$c_0 = \frac{a^4}{4} \Big/ \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}, \qquad c_n = \frac{2a^4}{\alpha_n^2} J_0(\alpha_n) \Big/ \frac{a^2}{2} J_0^2(\alpha_n) = \frac{4a^2}{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n)}$$

$$r^2 = \frac{a^2}{2} + 4a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n)} J_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right); \qquad J_0'(\alpha_n) = -J_1(\alpha_n) = 0$$

---

6) Avbildningen $w = \frac{z}{z-2i}$ avbildar $0<y<2$, $x=0$ på negativa realaxeln och $|z-1|=1$, $x>0$ på positiva imaginära axeln ("cirklar" → "cirklar", $0 \to 0$, $i \to -1$, $2i \to \infty$ avb. är konform) och halvcirkelskivan Ω på andra kvadranten.

Vi skall nu bestämma en funktion $\Phi(u,v)$, som är harmonisk i andra kvadranten och uppfyller randvillkoren

$$\Phi(u,v) = \begin{cases} 0, & u<0, \ v=0 \\ P, & u=0, \ v>0. \end{cases}$$

Lösningen av formen

$$\Phi(u,v) = C_1 \operatorname{Arg} w + C_2$$

där
$$\begin{cases} C_1 \pi + C_2 = 0 \\ C_1 \frac{\pi}{2} + C_2 = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{2P}{\pi} \\ C_2 = 2P \end{cases}$$
så att

$$\Phi(u,v) = \frac{2P}{\pi}(\pi - \operatorname{Arg} w) = \frac{2P}{\pi}\left(\pi - \operatorname{arccot}\frac{u}{v}\right) = \frac{2P}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{u}{v}\right).$$

Med substitutionen $w = \frac{z}{z-2i}$ får vi då en lösning $\varphi(x,y)$ till det givna problemet. Då

$$w = u+iv = \frac{x+iy}{x+(y-2)i} = \frac{(x+iy)(x-(y-2)i)}{x^2+(y-2)^2} = \frac{x^2+y^2-2y+2ix}{x^2+(y-2)^2}$$

blir alltså lösningen

$$\varphi(x,y) = \frac{2P}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{x^2+(y-1)^2-1}{2x}\right).$$

//MA.

Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa

MATEMATIK — Telefon: Axel Målqvist, 0740–459022

Chalmers tekniska högskola — 2002–08–29 kl. 14.15-19.15

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Beräkna Fouriertransformen till funktionen $f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$

   Använd resultatet för att beräkna $\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,dx$.

2. Ett linjärt tidsinvariant kausalt system, (obs! för impulssvaret $h(t)$ antag $h'(0) = h(0) = 0$), har tillståndsekvationen: $y''(t) + y(t) = x(t)$.

   Insignalen är periodisk med perioden 1, och $x(t) = e^{-t}$, då $0 < t < 1$. Bestäm utsignalen $y(t)$ i form av en komplex trigonometrisk Fourierserie.

3. Betrakta Sturm-Liouville-problemet

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \qquad u'(0) = u(0), \quad u(1) = 0,$$

   i intervallet $[0,1]$. Hur många egenvärden till detta problem finns i intervallet $-16 < \lambda < 16$?

4. Lös problemet

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} - 3u_t = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 3\sin x - \sin 2x, & u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

5. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} u_{xx} - x^2 u = u_t, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = e^{-i\alpha x}, & \text{där } \alpha \text{ är en reell konstant.} \end{cases}$$

   Ledning: Ansätt lösningen i form av en Fourier-Hermiteserie, $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)h_n(x)$.

6. Undersök hur avbildningen $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ avbildar enhetscirkeln $|z| = 1$ respektive cikelskivan $|z| < 1$. Använd resultatet för att bestämma den elektrostatiska potentialn $\varphi(x,y)$, $(z = x+iy)$ i enhetscirkelskivan $|z| < 1$ med randvärdena

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} P, & \text{om } |z| = 1, \quad x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{om } |z| = 1, \quad x < 0, \text{ eller } y < 0. \end{cases}$$

7. Härled differentialekvationen för Legendrepolynomen; dvs visa att

$$\Big[(1-x^2)P_n'(x)\Big]' + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

8. Visa Fouriers inversionssats under förutsättning att f och $\hat{f}$ tillhör L^1.

MA

Lösningar Fourieranalys F2/Kf2, SP 2002-08-29

1) $f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^{1} (1-t^2) e^{-i\omega t} dt = 2\int_0^1 (1-t^2)\cos(\omega t)\, dt$$

$$= 2\left[(1-t^2)\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^1 - 2\int_0^1 (-2t)\frac{\sin(\omega t)}{\omega} dt = 4\left[t \frac{-\cos\omega t}{\omega^2}\right]_0^1 +$$

$$+ 4\int_0^1 1 \cdot \frac{\cos\omega t}{\omega^2} dt = -\frac{4\cos\omega}{\omega^2} + 4\left[\frac{\sin\omega t}{\omega^3}\right]_0^1 = 4\left(\frac{\sin\omega}{\omega^3} - \frac{\cos\omega}{\omega^2}\right)$$

$$= 4\,\frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3}.$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad \text{Spec för } t = 0$$

$$f(0) = 1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 4 \cdot \frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3} d\omega; \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3} = \frac{\pi}{4}.$$

---

2) Impulssvar $h(t)$: $h''(t) + h(t) = \delta(t) \Rightarrow \{\mathcal{L}\text{-transf.}\} \Rightarrow$

$$s^2 H(s) - s\cancel{h(0)} - \cancel{h'(0)} + H(s) = 1 \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Utv. $x(t)$ i komplex Fourierserie! $T = 1$, $\Omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in(2\pi)t} \quad \text{där } c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-in\Omega t} dt;$$

$$\Rightarrow c_n = \int_0^1 e^{-t} e^{-in(2\pi)t} dt = \left[\frac{e^{-(1+2in\pi)t}}{-(1+2in\pi)}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-1}}{1+2in\pi}$$

$\forall \omega \in \mathbb{R}$ gäller $e^{i\omega t} \curvearrowright \hat{h}(\omega) e^{i\omega t} \Rightarrow \{\omega = n\Omega = n(2\pi)\}$.

$$\Rightarrow e^{i(2\pi n)t} \curvearrowright \hat{h}(2\pi n) e^{i(2\pi n)t} = \hat{H}(i2\pi n) e^{i(2\pi n)t} = \frac{e^{i(2\pi n)t}}{1-4\pi^2 n^2}$$

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-1}}{1+2in\pi} \cdot \frac{1}{1-4\pi^2 n^2} e^{i2n\pi t}.$$

3) Sök positiva egenvärden $\lambda = \mu^2$, där $\mu > 0$.

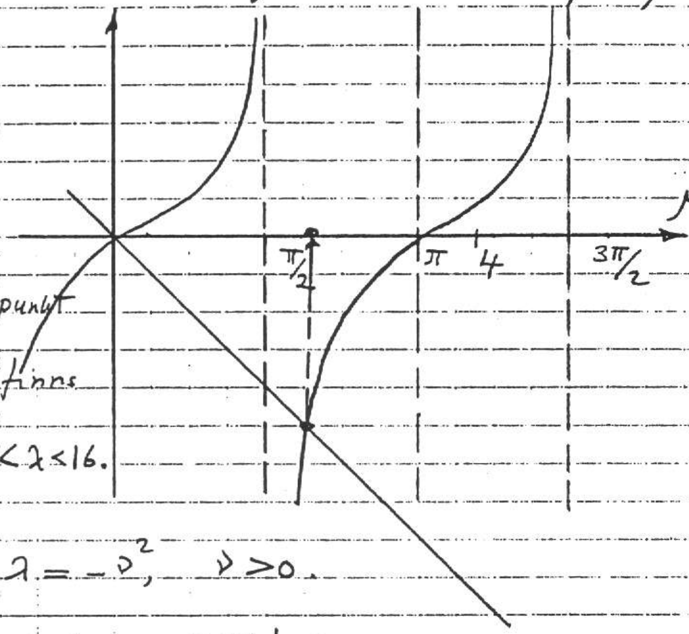
$u'' + \mu^2 u = 0$ ger $u = A\cos\mu x + B\sin\mu x$

Randvärdena: $u'(0) = u(0)$ ger $B\mu = A$, så att $u = B(\mu\cos\mu x + \sin\mu x)$

och $u(1) = 0$ ger $B = 0$ eller $\mu\cos\mu + \sin\mu = 0$, dvs. $\tan\mu = -\mu$.

$0 < \lambda < 16$ ger $0 < \mu < 4$.

Av diagrammet framgår att kurvorna för $\tan\mu$ och $-\mu$ bara har en skärningspunkt där $0 < \mu < 4$. Alltså finns precis ett egenvärde med $0 < \lambda < 16$.



Sök negativa egenvärden, $\lambda = -\nu^2$, $\nu > 0$.

$u'' - \nu^2 u = 0$ ger $u = A\cosh\nu x + B\sinh\nu x$

Randvärdena: $u'(0) = u(0)$ ger $B\nu = A$; $u = B(\nu\cosh\nu x + \sinh\nu x)$

och $u(1) = 0$ ger $B = 0$ eller $\nu\cosh\nu x + \sinh\nu x = 0$;

en ekvation som saknar lösningar $\nu > 0$. Inga negativa egenvärden.

Är $\lambda = 0$ ett egenvärde?

$u'' = 0$ ger $u = Ax + B$

Randvärdena: $u'(0) = u(0)$ ger $A = B$, $u(x) = A(x+1)$

$u(1) = 0$ ger $A = 0$ och $u \equiv 0$.

$\lambda = 0$ är inget egenvärde.

Totalt finns därför ett egenvärde: $-16 < \lambda < 16$.

4) $$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} - 3u_t = 0, & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 3\sin x - \sin 2x, & u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Variabelseparation: $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ ger $X''T = XT'' + 3XT'$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'' + 3T'}{T} = \lambda. \qquad \text{I.} \begin{cases} X'' = \lambda X \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} T'' + 3T' = \lambda T \\ T'(0) = 0 \end{cases}$$

I. ger $\lambda = \lambda_n = -n^2$, $X_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$

II. ger $T'' + 3T' + n^2 T = 0$ med karakt. ekv. $r^2 + 3r + n^2 = 0$

$r = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - n^2}$. Olika typ beroende om $\frac{9}{4} - n^2$ är < 0

eller > 0. Låt $T_n(t)$ vara den lösning som också uppfyller $T_n(0) = 1$ konstant

Ansätt $\underbrace{u(x,t)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) T_n(t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx \, T_n(t)}$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx = 3\sin x - \sin 2x$$

$\therefore$ $\underline{C_1 = 3, \ C_2 = -1}$, övriga $\underline{C_n = 0.}$

$u(x,t) = 3\sin x \cdot T_1(t) - \sin 2x \cdot T_2(t)$

$\underline{\underline{n=1 \text{ ger}}}$ $r = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$; $T_1(t) = c_1 e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} + c_2 e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}t}$

$T_1(0) = 1$, $T_1'(0) = 0$ ger $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ -c_1 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} - c_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0. \end{cases}$

$c_1 = -\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $c_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$; $\underline{T_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(3+\sqrt{5}) e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} - (3-\sqrt{5}) e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} \right]}$

$\underline{\underline{n=2 \text{ ger}}}$ $r = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$; $T_2(t) = e^{-\frac{3t}{2}} \left(d_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} t + d_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t \right)$

$T_2(0) = 1$, $T_2'(0) = 0$ ger $d_1 = 1$, $d_2 \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{3}{2} d_1 = 0$, $d_2 = \frac{3}{\sqrt{7}}$

$\therefore$ $\underline{T_2(t) = e^{-\frac{3t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{7}}{2} t + \frac{3}{\sqrt{7}} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t \right)}$

$$\underline{\underline{u(x,t) = \frac{3}{2\sqrt{5}} \left[(3+\sqrt{5}) e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} - (3-\sqrt{5}) e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} \right] \sin x -}}$$

$$\underline{\underline{- e^{-\frac{3t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{7}}{2} t + \frac{3}{\sqrt{7}} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t \right) \sin 2x.}}$$

5) $\begin{cases} u_{xx} - x^2 u = u_t, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (DE) \\ u(x,0) = e^{-i\alpha x}, & \alpha \in \mathbb{R} \text{ konstant} \end{cases}$

$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\, h_n(x)$ uppfyller i (DE) om

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\left[h_n''(x) - x^2 h_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t)\, h_n(x).$$

Men $h_n''(x) - x^2 h_n(x) = -(2n+1)\, h_n(x)$ så att

$$\sum_{n=0}^{\infty} -(2n+1)\, T_n(t)\, h_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t)\, h_n(t) \Rightarrow T_n'(t) = -(2n+1)\, T_n(t),$$

$T_n(t) = C_n e^{-(2n+1)t}$, Alltså är $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-(2n+1)t} h_n(x)$

$u(x,0) = e^{-i\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n h_n(x)$ är Fourier-Hermiteserien med

$$C_n = \frac{1}{H_n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} h_n(x)\, dx = \frac{1}{n!\, 2^n \sqrt{\pi}}\, \hat{h}_n(\alpha) = \left\{\hat{h}_n(\xi) = i^{-n}\sqrt{2\pi}\, h_n(\xi)\right\}$$

$$= \frac{1}{n!\, 2^n \sqrt{\pi}}\, i^{-n}\sqrt{2\pi}\, h_n(\alpha) = \frac{1}{n!}\, 2^{\frac{1}{2}-n}\, i^{-n} h_n(\alpha) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n!}\, 2^{\frac{1}{2}-n}\, i^{n} h_n(\alpha)}.$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, 2^{\frac{1}{2}-n}\, i^n\, e^{-(2n+1)t}\, h_n(\alpha)\, h_n(x).$$

---

6) Avbildningen $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ avbildar realaxeln på imaginäraxeln. punkterna 1 och -1 går på 0 resp. ∞. Cirkeln $|z| = 1$ går på en rät linje, som skär imaginäraxeln vinkelrätt i $w = 0$ (konf. avb): $|z| = 1 \xrightarrow{\text{avb.}}$ realaxeln i w-planet. Slutligen eftersom $z = 0$ går på $w = i$, så $|z| < 1 \to$ halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$. Då z går från 1 till i längs cirkeln $|z| = 1$ i positiv led går w från 0 till 1 längs realaxeln med växande u (obs! orienteringen bevaras). Vi skall nu bestämma en funktion $\Phi(u,v)$ som är harmonisk i halvp. $\operatorname{Im} w > 0$, och uppfyller randvillkoren $\Phi(u,0) = \begin{cases} P, & 0 < u < 1 \\ 0 & u < 0 \text{ och } u > 1. \end{cases}$

Funktionen $\Phi(u,v) = C_1 \arg w + C_2 \arg(w-1) + C_3$ är harmonisk för $v > 0$, och antar konstanta värden på de tre intervallen: $u < 0$, $0 < u < 1$ och $u > 1$. Vi väljer $0 \le \arg(\cdot) \le \pi$, vi har $\arg(u + iv) = \operatorname{arccot}\frac{u}{v}$, då $v > 0$. Välj C_1, C_2 och C_3 så att de konstanta värdena blir 0, P, resp. 0:

$$\begin{cases} C_1\pi + C_2\pi + C_3 = 0 \\ C_2\pi + C_3 = P \\ C_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{P}{\pi} \\ C_2 = \frac{P}{\pi} \\ C_3 = 0 \end{cases}$$

6) $\overrightarrow{\text{fortst.}}$

Då gäller $\Phi(u,v) = \frac{P}{\pi}\left(\arg(w-1) - \arg w\right) = \frac{P}{\pi}\arg\frac{w-1}{w}$.

Med substitutionen $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ får vi då en lösning

$\varphi(x,y)$ till det givna problemet. Då

$$\frac{w-1}{w} = \frac{1-z+i(1+z)}{1-z} = \frac{1-x-iy+i(1+x+iy)}{1-x-iy} = \frac{1-x-y+i(1+x-y)}{1-x-iy}$$

$$= \frac{\left[1-x-y+i(1+x-y)\right](1-x+iy)}{(1-x)^2+y^2} = \frac{(1-x)^2+y^2-2y+i(1-x^2-y^2)}{(1-x)^2+y^2},$$

blir alltså lösningen

$$\varphi(x,y) = \frac{P}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{(1-x)^2+(1-y)^2-1}{1-x^2-y^2}.$$

/ULA

Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Telefon: Walter Levy, 0740–459022
2002-03-09 kl. 14.15-19.15

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. För ett linjärt tidsinvariant system gäller att insignalen $x_1(t) = \text{sign}(t)e^{-|t|}$ ger upphov till utsignalen $y_1(t) = t\,\text{sign}(t)e^{-2|t|}$. Vad blir utsignalen $y(t)$, om insignalen $x(t)$ är 2π-periodisk $x(t) = \pi - t$ för $0 < t < 2\pi$? Ange $y(t)$ i form av en komplex trigonometrisk Fourierserie.

2. Bestäm den elektrostatiska potentialen $\varphi(x, y)$ i området $D = \{(x, y) : 0 < y < x\}$ om potentialen på randen är

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \alpha, & (x,y) \in \partial D, \quad x^2 + y^2 > r^2, \\ \beta, & (x,y) \in \partial D, \quad x^2 + y^2 \le r^2. \end{cases}$$

3. Beräkna faltningen $(f * f)(x)$, $-\infty < x < \infty$, då

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\xi} \sin(\xi x)\, d\xi, \quad -\infty < x < \infty.$$

4. Lös begynnelsevärdesproblemet (c är konstant),

$$\begin{cases} u_t + c^2 u = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = xe^{-x^2}, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

5. Lös Dirichlets randvärdesproblem $\nabla^2 u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r}$, $0 < a < r < b$, med rand data $u(a, \theta) = \cos\theta$, och $u(b, \theta) = 1$. (Obs! sfäriska koordinater).

6. Bestäm den stationära temperaturfördelningen i cylindern $x^2 + y^2 \le a^2$, $0 \le z \le 1$, då den buktiga ytan $x^2 + y^2 = a^2$ och "toppen" $z = 1$ hålls vid temperaturen 0 medan "botten" $z = 0$ ligger på en platta med radiell värmespridning enligt $u(r, 0) = r^2$.

7. Visa att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = e^{\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})}, \quad \forall z \neq 0, \quad \forall x.$$

8. Definiera vad som menas med derivatan av en distribution. Visa att om $g \in C^{(\infty)}$ och F är en distribution så gäller att:

$$(gF)' = g'F + gF'.$$

Lösningar, TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng; 2002–03–09

---

1. Vi har att

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \operatorname{sign}(t)e^{-|t|} \Longrightarrow \hat{x}_1(t) = \tfrac{-2i\xi}{1+\xi^2}. \\ y_1(y) &= t\operatorname{sign}(t)e^{-2|t|} \Longrightarrow \hat{y}_1(t) = i\tfrac{d}{d\xi}\left(\tfrac{-2i\xi}{4+\xi^2}\right) = i\tfrac{-2i(4+\xi^2)-(-2i\xi)(2\xi)}{(4+\xi^2)^2} \\ &= i(-2i)\tfrac{4+\xi^2-2\xi^2}{(4+\xi^2)^2} = 2\tfrac{4-\xi^2}{(4+\xi^2)^2}. \end{aligned}$$

Detta ger överföringsfuktionen

$$\hat{h}(\xi) = \frac{\hat{y}_1(t)}{\hat{x}_1(t)} = 2\frac{4-\xi^2}{(4+\xi^2)^2} \times \frac{1+\xi^2}{-2i\xi} = \frac{i}{\xi}\cdot\frac{(4-\xi^2)(1+\xi^2)}{(4+\xi^2)^2}.$$

Komplexa Fourierserieutvecklingen av den 2π periodiska $x(t) = \pi - t$ ges av

$$x(t) = \pi - t \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int},$$

där för $n \neq 0$, är

$$\begin{aligned} C_n &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - t)e^{-int}\,dt = \tfrac{1}{2\pi}\left[(\pi - t)\tfrac{e^{-int}}{-in}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(-1)\tfrac{e^{-int}}{-in}\,dt\right] \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\left[-\pi\tfrac{e^{-in(2\pi)}}{-in} - \tfrac{\pi}{-in} + \tfrac{e^{-int}}{(-in)^2}\Big|_0^{2\pi}\right] = \tfrac{1}{2\pi}\left[\tfrac{-\pi}{-in} + \tfrac{-\pi}{-in}\right] \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\tfrac{2\pi}{in} = \tfrac{1}{in} = \tfrac{-i}{n}, \quad n \neq 0. \end{aligned}$$

För $n = 0$, är

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\frac{(\pi - t)^2}{-2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi^2}{-2} - \frac{\pi^2}{-2}\right] = 0.$$

Nu

$$e^{i\xi t} \curvearrowright \hat{h}(n)e^{i\xi t} \Longrightarrow e^{int} \curvearrowright \hat{h}(\xi)e^{int},$$

värför för $n \neq 0$ gäller att

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int} = \sum_{n=-\infty (n\neq 0)}^{\infty} \frac{-i}{n}e^{int} \curvearrowright \sum_{n=-\infty (n\neq 0)}^{\infty} \frac{-i}{n}\hat{h}(n)e^{int} = y(t).$$

Alltså

$$y(t) = \sum_{n=-\infty (n\neq 0)}^{\infty} \frac{-i}{n}\cdot\frac{-i}{n}\frac{(4-n^2)(1+n^2)}{(4+n^2)^2}e^{int}.$$

Dvs svaret är

$$y(t) = \sum_{n=-\infty (n\neq 0)}^{\infty} \frac{(n^2-4)(n^2+1)}{n^2(n^2+4)^2}e^{int}.$$

v.g.v.

2. Avbildningen $w = z^4$, $z = x + iy$ avbildar D på övre halvplanet. Sätt $w = u + iv$, vi skall nu bestämma en funktion $\Phi(u, v)$, som är harmonisk i halvplanet $v > 0$ och uppfyller randvillkoren

$$\Phi(u,0) = \begin{cases} \alpha, & u < -r^4, \\ \beta, & -r^4 \le u \le r^4, \\ \alpha, & u > r^4. \end{cases}$$

Funktionen

$$\Phi(u,v) = A\arg(w + r^4) + B\arg(w - r^4) + C,$$

är harmonisk i övre halvplanet, $v > 0$, och antar konstanta värden på de tre intervallen $u < -r^4$, $-r^4 \le u \le r^4$ och $u > r^4$ på realaxeln. Vi väljer argumenten så att $0 \le \arg(\cdot) \le \pi$; vi har $\arg(u + iv) = \operatorname{arccot}\frac{u}{v}$ då $v > 0$. Välj konstanterna A, B och C så att dessa värden blir α, β, respektive α:

$$\begin{aligned} A\pi + B\pi + C &= \alpha, \\ B\pi + C &= \beta, \\ C &= \alpha. \end{aligned}$$

Detta ger $A = \frac{\alpha-\beta}{\pi}$, $B = -\frac{\alpha-\beta}{\pi}$, $C = \alpha$. Med substitutionen $w = z^4$ får vi då en lösning $\varphi(x, y)$ till det givna problemet. Då

$$w = (u+iv) = (x+iy)^4 = (x^2-y^2+2ixy)^2 = (x^2-y^2)^2-4x^2y^2+4ixy(x^2-y^2),$$

blir alltså lösningen

$$\alpha+\frac{\alpha-\beta}{\pi}\left[\operatorname{arccot}\frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2+r^4}{4xy(x^2-y^2)}-\operatorname{arccot}\frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2-r^4}{4xy(x^2-y^2)}\right].$$

3. Vi kan skriva

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty e^{-\xi}\sin(\xi x)\,d\xi = \int_0^\infty e^{-|\xi|}\sin(\xi x)\,d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -\pi i \operatorname{sign}(\xi) e^{-|\xi|} e^{i\xi x}\,d\xi. \end{aligned}$$

Detta ger att Fouriertransformen av $f(x)$ är

$$\hat{f}(\xi) = (-\pi i)\operatorname{sign}(\xi)e^{-|\xi|}.$$

Då får vi

$$\mathcal{F}[(f * f)(x)](\xi) = [\hat{f}(\xi)]^2 = -\pi^2 e^{-2|\xi|} = -2\pi\frac{\pi}{2}e^{-2|\xi|},$$

som har invers Fouriertransformen

$$(f * f)(x) = \frac{-2\pi}{x^2+4}.$$

4. Vi sätter $xe^{-x^2} = f(x)$. Fouriertransformen ix-led, ger

$$\hat{u}_t = -\xi^2\hat{u} - c^2\hat{u} = -(\xi^2 + c^2)\hat{u} \Longrightarrow \hat{u}(\xi, t) = C(\xi)e^{-(\xi^2+c^2)t},$$

där

$$\hat{u}(\xi, 0) = C(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

Vidare är

$$\mathcal{F}[e^{-x^2}] = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4} \Longrightarrow \hat{f}(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}\right) = i\sqrt{\pi}(-\xi/2)e^{-\xi^2/4}.$$

Detta ger att

$$\hat{u}(\xi, t) = -i\sqrt{\pi}(\xi/2)e^{-c^2t}e^{-(t+1/4)\xi^2}.$$

Med $A = t + \frac{1}{4}$ gäller att

$$e^{-A\xi^2} = \mathcal{F}\Big[\frac{1}{\sqrt{4\pi A}}e^{-x^2/4A}\Big],$$

som innebär att

$$(i\xi)e^{-A\xi^2} = \mathcal{F}\Big[\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\sqrt{4\pi A}}e^{-x^2/4A}\Big)\Big] = \mathcal{F}\Big[\frac{1}{\sqrt{4\pi A}}\frac{-x}{2A}e^{-x^2/4A}\Big].$$

Med invers Fouriertransformering får vi

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-c^2t}\frac{1}{\sqrt{4\pi(t + 1/4)}}\frac{x}{2(t + 1/4)}e^{-x^2/4(t+1/4)}$$

vilket, efter förenkling ger

$$u(x, t) = \frac{x}{(4t + 1)^{3/2}}e^{-c^2t}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}.$$

5. Eftersom data är φ oberoende så är $u = u(r, \theta)$. Först löser vi θ oberoende problemet för $\tilde{u}$ ur ekvationen:

$$\begin{cases} \nabla^2\tilde{u}(r) = \frac{1}{r}, & 0 < a < r < b \\ \tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0. \end{cases}$$

Vi får

$$\begin{aligned} \nabla^2\tilde{u}(r) &= 1/r \Longleftrightarrow \tfrac{1}{r^2}\tfrac{d}{dr}(r^2\tilde{u}') = \tfrac{1}{r},\ \tfrac{d}{dr}(r^2\tilde{u}') = r, r^2\tilde{u}' = \tfrac{r^2}{2} + C, \\ &\Longrightarrow \tilde{u}' = \tfrac{1}{2} + \tfrac{C}{r^2}, \Longrightarrow \tilde{u}(r) = \tfrac{r}{2} - \tfrac{C}{r} + D. \end{aligned}$$

Randvillkoren ger ekvationerna

$$\tilde{u}(a) = 0 \Longrightarrow \frac{a}{2} - \frac{C}{a} + D = 0, \qquad \tilde{u}(b) = 0 \Longrightarrow \frac{b}{2} - \frac{C}{b} + D = 0.$$

v.g.v.

Genom att lösa dessa ekvationer får vi $D = -(a+b)/2$, $C = -ab/2$. Alltså vi har

$$\tilde{u}(r) = \frac{1}{2}\Big[r + \frac{ab}{r} - (a+b)\Big] = \frac{1}{2r}\Big[r^2 - (a+b)r + ab\Big] = \frac{1}{2r}(r-a)(r-b).$$

Sätt $v = u - \tilde{u}$. Då blir ekvationen får v homogen med inhomogena randvillkor:

$$\begin{cases} \nabla^2 v(r,\theta) = 0, & 0 < a < r < b \\ v(a,\theta) = \cos(\theta), & v(b,\theta) = 1. \end{cases}$$

Lösningen för v kan ansättas som

$$v(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(A_n r^n + B_n r^{-n-1}\Big) P_n(\cos\theta),$$

Där P_n är Legendre polynom av ordning n. Vi har att

$$\begin{cases} v(a,\theta) & = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(A_n a^n + B_n a^{-n-1}\Big) P_n(\cos\theta) = \cos(\theta) = P_1(\cos\theta) \\ v(b,\theta) & = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(A_n b^n + B_n b^{-n-1}\Big) P_n(\cos\theta) = 1 = P_0(\cos\theta). \end{cases}$$

Identifiering av koefficienter ger

$$n = 0: \quad \begin{cases} A_0 + B_0/a = 0, & A_0 = -B_0/a, \\ A_0 + B_0/b = 1, & -B_0/a + B_0/b = 1. \quad B_0(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}) = 1 \end{cases}$$

Vi får att

$$B_0 = -\frac{ab}{b-a}, \qquad A_0 = \frac{b}{b-a}$$

P.s.s.

$$n = 1: \quad \begin{cases} A_1 a + B_1/a^2 = 1, & -aB_1/b^3 + B_1/a^2 = 1, \quad B_1(\frac{1}{a^2} - \frac{a}{b^3}) = 1, \\ A_1 b + B_1/b^2 = 0, & A_1 = -B_1/b^3. \end{cases}$$

Vi får att

$$B_1 = \frac{a^2 b^3}{b^3 - a^3}, \qquad A_1 = -\frac{a^2}{b^3 - a^3}.$$

För högre ordnings koefficienter gäller

$$A_n = B_n = 0, \qquad \text{för alla } n \geq 2.$$

Härigenom får vi

$$v(r,\theta) = \Big(\frac{b}{b-a} - \frac{ab}{b-a}\frac{1}{r}\Big) + \Big(\frac{-a^2}{b^3-a^3} r + \frac{a^2 b^3}{b^3-a^3}\frac{1}{r^2}\Big)\cos(\theta).$$

Slutligen $u = \tilde{u} + v$ ger svaret:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2r}(r-a)(r-b) + \frac{b}{(b-a)r}(r-a) - \frac{a^2}{(b^3-a^3)r^2}(r^3 - b^3)\cos(\theta).$$

6. Data oberoende av $\theta \Longrightarrow u = u(r,z)$ satisfierar

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & 0 < r < a, \qquad 0 < z < 1, \\ u(r,z), \text{begränsad då } \; r \to 0, & u(a,z) = 0, \\ u(r,0) = r^2, & u(r,1) = 0. \end{cases}$$

Variabelseparation: $u(r,z) = R(r)Z(z) \neq 0$, ger

$$\frac{1}{r}(rR')'Z + RZ'' = 0 \Longrightarrow -\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} = \frac{Z''}{Z} = \lambda.$$

Vi får separerade differentialekvationer för R och Z:

$$(I) \quad -\frac{1}{r}(rR')' = \lambda R, \quad R(r) \text{ begränsad då } r \to 0, \quad R(a) = 0,$$

$$(II) \quad Z'' = \lambda Z, \qquad Z(1) = 0.$$

(I) är sigulärt Sturm-Liouville problem med $w(r) = r$. Vi har $\lambda > 0$. Sätt $\lambda = \beta^2$, $\beta > 0$. Ekvationen $\frac{1}{r}(rR')' + \beta^2 R = 0$, är en Bessel differetial ekvation av ordning 0, och har allmän lösning:

$$R(r) = C_1 J_0(\beta r) + C_2 Y_0(\beta r). \quad R(r) \text{ begränsad då } r \to 0 \Longrightarrow C_2 = 0,$$

$$R(a) = 0 \Longrightarrow C_1 J_0(\beta a) = 0, \; C_1 \neq 0 \text{ tag } C_1 = 1, \text{ varför } J_0(\beta a) = 0.$$

Sätt $\beta a = \alpha_{0n}$, där α_{0n}, $n = 1, 2, \ldots$, är de positiva nollställerna till ekvationen $J_0(x) = 0$. Då har vi egenvärdena och egenfunktioner enligt:

$$\beta = \beta_n = \frac{\alpha_{0n}}{a}, \quad \lambda_n = \beta_n^2 = \left(\frac{\alpha_{0n}}{a}\right)^2, \quad R_n(r) = J_0(\beta_n r), \quad n \geq 1.$$

(II) blir då $Z_n'' = \beta^2 Z_n$, som ger

$$Z_n(z) = A_n \sinh \beta_n(1-z) + B_n \cosh \beta_n(1-z)$$

. Med $Z_n(1) = B_n = 0$ får vi

$$Z_n(z) = A_n \sinh \beta_n(1-z).$$

Superposition ger

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) Z_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\beta_n r) \sinh \beta_n(1-z),$$

med

$$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \beta_n J_0(\beta_n r) = r^2.$$

v.g.v.

Eftersom $\{J_0(\beta_n r)\}_{n=1}^{\infty}$ är ett fullständigt ortogonalsystem på $(0,a)$ med $w(r)=r$. Fourierkoefficienter till r^2 är:

$$A_n \sinh\beta_n = \frac{1}{\rho_n}\int_0^a r^2 J_0(\beta_n r) r\,dr := \frac{1}{\rho_n} I_a.$$

Nedan räknar vi I_a:

$$\begin{aligned}
I_a &= \textstyle\int_0^a r^3 J_0(\beta_n r)\,dr = \int_0^a r^3 R_n(r)\,dr = -\frac{1}{\lambda_n}\int_0^a r^2 \frac{d}{dr}(rR_n'(r))\,dr\\
&= -\tfrac{1}{\lambda_n}\Big[r^3 R_n'(r)\Big|_0^a - \textstyle\int_0^a 2r\cdot rR_n'(r)\,dr\Big]\\
&= -\tfrac{1}{\lambda_n}\Big[a^3 R_n'(a) - \Big(2r^2 R_n(r)\Big)\Big|_0^a + 4\textstyle\int_0^a rR_n(r)\,dr\Big]\\
&= \{R_n(a)=0\} = -\tfrac{1}{\lambda_n}\Big[a^3R_n'(a) + 4\textstyle\int_0^a J_0(\beta_n r)\,r dr\Big] = \{\beta_n r = x\}\\
&= -\tfrac{1}{\lambda_n}\Big[a^3R_n'(a) + \tfrac{4}{\beta_n^2}\textstyle\int_0^{\beta_n a} J_0(x)\,x dx\Big] = -\tfrac{1}{\lambda_n}\Big[a^3R_n'(a) + \tfrac{4}{\beta_n^2}\Big(xJ_1(x)\Big)\Big|_0^{\beta_n a}\Big]\\
&= -\tfrac{1}{\beta_n^2}\Big[a^3R_n'(a) + \tfrac{4a}{\beta_n}J_1(\beta_n a)\Big] = -\tfrac{1}{\beta_n^2}\Big[a^3\beta_n J_0'(\beta_n a) + \tfrac{4a}{\beta_n}J_1(\beta_n a)\Big]\\
&= \{J_0'(\beta_n a) = -J_1(\beta_n a)\} = -\tfrac{1}{\beta_n^2}\Big[-a^3\beta_n + \tfrac{4a}{\beta_n}\Big]J_1(\beta_n a)\\
&= \Big(\tfrac{a^2\beta_n - 4}{\beta_n^3}\Big)aJ_1(\beta_n a).
\end{aligned}$$

Vidare, enligt Theorem 5.3, är $\rho_n = \frac{a^2}{2}J_1^2(\beta_n a)$. Eller se nedan:

$$\begin{aligned}
\rho_n &= \textstyle\int_0^a J_0^2(\beta_n r)\,rdr = [x=\beta_n r] = \frac{1}{\beta_n^2}\int_0^{\beta_n a} J_0^2(x)\,xdx\\
&= \tfrac{1}{\beta_n^2}\Big[\tfrac{x^2}{2}\Big(J_0^2(x)+J_1^2(x)\Big)\Big]_0^{\beta_n a} = \tfrac{1}{\beta_n^2}\tfrac{\beta_n^2 a^2}{2}J_1^2(\beta_n a) = \tfrac{a^2}{2}J_1^2(\beta_n a).
\end{aligned}$$

Värför

$$A_n\sinh(\beta_n) = \frac{1}{\frac{a^2}{2}J_1^2(\beta_n a)}\cdot\Big(\frac{a^2\beta_n - 4}{\beta_n^3}\Big)aJ_1(\beta_n a) = \frac{2(a^2\beta_n - 4)}{a\beta_n^3 J_1(\beta_n a)}.$$

Och svaret är

$$u(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(a^2\beta_n-4)}{a\beta_n^3}\cdot\frac{J_0(\beta_n r)}{J_1(\beta_n a)}\cdot\frac{\sinh\beta_n(1-z)}{\sinh\beta_n},\quad \beta_n = \frac{\alpha_{0n}}{a}.$$

MA

Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK Telefon: Axel Målqvist, 0740–459022
Chalmers tekniska högskola 2002–01–19 kl. 14.15-19.15

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som minimerar

$$\int_{-1}^{1}\left[(1-\sqrt{|x|})-P(x)\right]^2 dx. \qquad (6p)$$

2. Lös randvärdesproblemet (c är konstant),

$$\begin{cases} cu_x+u_y+2yu=0, & -\infty<x<\infty, \quad y>0, \\ u(x,0)=f(x), & -\infty<x<\infty, \end{cases} \qquad (6p)$$

Ledning: Fouriertransformera i x-led.

3. Utveckla $f(x)$ i cosinusserie med perioden 2π, där

$$f(x)=\begin{cases} \sin(x), & 0<x<\pi/2, \\ 0, & x>\pi/2. \end{cases} \qquad (6p)$$

4. Lös värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_{xx}=u_t-2, & 0<x<1, & t>0, \\ u(0,t)=1, & u_x(1,t)+u(1,t)=0, & t>0, \\ u(x,0)=0, & 0<x<1. \end{cases} \qquad (6p)$$

5. Låt f vara en funktion i $L^1(\mathbb{R})$. Definiera

$$F(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+2k\pi). \qquad (6p)$$

a) Visa att F är 2π periodisk.

b) Härled ett samband mellan F:s Fourierkoefficienter och f:s Fouriertransform.

c) Bevisa (under lämpliga förutsättningar) *Poissons Summationsformel:*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2k\pi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n).$$

6. Lös Laplaces ekvation $u_{xx}+u_{yy}=0$ i halvcirkelskivan $x^2+y^2<1, y>0$, om $u=0$ på sträckan $y=0, -1\le x\le 1$ och $u=y^3$ på halvcirkeln $x^2+y^2=1,\ y\ge 0$. (6p)

7. Låt $\{\varphi_n\}_1^\infty$ vara en ortonormalmängd i $L^2(a,b)$. Visa att följande villkor är ekvivalenta:

a) Om $<f,\varphi_n>=0$, för alla n, så är $f=0$.

b) För varje $f\in L^2(a,b)$ är $f=\sum_{n=1}^{\infty}<f,\varphi_n>\varphi_n$ med konvergens i norm.

c) För varje $f\in L^2(a,b)$ gäller $||f||^2=\sum_{n=1}^{\infty}|<f,\varphi_n>|^2$. (7p)

8. Visa Fouriers inversionssats, då f och $\hat{f}$ tillhör L^1. (7p)

MA

Lösningar Fourieranalys, F2/Kf2, 5 Poäng, 2002-01-19

① Bästa approx som minimera integralen fås genom Legendre polynom utveckling:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{N} c_n P_n(x), \quad \text{där } f(x) = 1-\sqrt{|x|} \;\&\; c_n = \frac{1}{\|P_n(x)\|^2}\int_{-1}^{1} P_n(x) f(x)\,dx,$$

$$P_0(x)=1,\; P_1(x)=x,\; P_2(x)=\tfrac{1}{2}(3x^2-1),\; P_3(x)=\tfrac{1}{2}(5x^3-3x), \ldots$$

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1} \Rightarrow c_n = (n+\tfrac{1}{2})\int_{-1}^{1} P_n(x) f(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{c_0}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-\sqrt{|x|})\,dx = \int_0^1 (1-\sqrt{x})\,dx = \left[x-\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$\underline{\underline{c_1}} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(1-\sqrt{|x|})\,x\,dx = \{\text{udda integrand \& symm. intervall}\} = \underline{\underline{0}}.$$

$$\underline{\underline{c_2}} = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}(1-\sqrt{|x|})\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)\,dx = \frac{5}{2}\int_0^1 (1-x^{1/2})(3x^2-1)\,dx = \frac{5}{2}\int_0^1\left(-3x^{5/2}+3x^2+x^{1/2}-1\right)$$

$$= \frac{5}{2}\left[-\frac{6}{7}x^{7/2}+x^3+\frac{2}{3}x^{3/2}-x\right]_0^1 = \frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{6}{7}\right) = \underline{\underline{-\frac{10}{21}}}$$

För 2^a-grads polynom $N=2$ & $P(x) = c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+c_2P_2(x)$

$\underline{\underline{\text{Svar:}}}$ $\underline{\underline{P(x)}} = \frac{1}{3}+0-\frac{5}{21}(3x^2-1) = \underline{\underline{\frac{1}{7}(4-5x^2)}}$. ▨

---

② $\begin{cases} cu_x+u_y+2yu=0\,; & x\in\mathbb{R},\ y>0 \quad (DE) \\ u(x,0)=f(x) & (RV)\end{cases}$ $\xrightarrow[\text{i x-led}]{\mathcal{F}\text{-transf}}$ $\begin{cases} c(i\xi)\hat{u}+\hat{u}_y+2y\hat{u}=0; & (DE)^\wedge \\ \hat{u}(\xi,0)=\hat{f}(\xi); & (RV)^\wedge\end{cases}$

$$(DE)^\wedge \Rightarrow \hat{u}_y = (-2y-ic\xi)\hat{u} \overset{\hat{u}\neq 0}{\Longrightarrow} \frac{\hat{u}_y}{\hat{u}} = -2y-ic\xi \overset{\int dy}{\Longrightarrow}$$

$$\ln\hat{u} = -y^2-ic\xi y \Rightarrow \hat{u}(\xi,y) = Ce^{-y^2-ic\xi y}$$

$$(RV)^\wedge \Rightarrow C=\hat{f}(\xi), \Rightarrow \hat{u}(\xi,y) = e^{-y^2}\cdot e^{-ic\xi y}\hat{f}(\xi)$$

Invers $\mathcal{F}$-transf. $\Rightarrow$

$\underline{\underline{\text{Svar:}}}$ $\underline{\underline{u(x,y) = e^{-y^2}f(x-cy)}}$. ▨

③ För utveckling av $f(x)$ i cosinusserie definierar vi $f(x)$ även för $x<0$, så att $f(x)$ blir en jämn funktion. Vi har då

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \text{ där}$$

$$\pi a_k = 2\int_0^{\pi/2} \sin x \cos kx\,dx = \int_0^{\pi/2} \left[\sin(k+1)x - \sin(k-1)x\right]dx$$

$$= \left[\frac{\cos(k-1)x}{k-1} - \frac{\cos(k+1)x}{k+1}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\cos(k-1)\frac{\pi}{2}}{k-1} - \frac{\cos(k+1)\frac{\pi}{2}}{k+1} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1}; \quad \text{för } k \neq 1.$$

Då är $\pi a_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} = \frac{-2}{4n^2-1}$, och

$$\pi a_{2n+1} = \frac{\cos(n\pi)-1}{2n} - \frac{\cos(n+1)\pi - 1}{2n+2} = \frac{(-1)^n-1}{2n} - \frac{(-1)^{n+1}-1}{2n+2}, \text{ vilket ger}$$

$$\pi a_{4m+1} = \frac{(-1)^{2m}-1}{4m} - \frac{(-1)^{2m+1}-1}{4m+2} = \frac{1}{2m+1}, \text{ och}$$

$$\pi a_{4m+3} = \frac{(-1)^{2m+1}-1}{4m+2} - \frac{(-1)^{2m+2}-1}{4m+4} = -\frac{1}{2m+1}.$$

Vidare är $\pi a_0 = 2\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \left[2\cos x\right]_0^{\pi/2} = 2$, och

$$\pi a_1 = \int_0^{\pi/2} 2\sin x \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Alltså är

Svar: $$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\cos x + \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1}\left(\cos(4m+1)x - \cos(4m+3)x\right) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$$

④ $$\begin{cases} (DE) & u_{xx} = u_t - 2, & 0<x<1,\ t>0 \\ (RV1,2) & u(0,t)=1,\ u_x(1,t)+u(1,t)=0, & t>0 \\ (BV) & u(x,0)=0, & 0<x<1 \end{cases}$$

Lösning: Inhomogen diff.ekv + Randvillkor. Sätt $u(x,t) = S(x) + v(x,t)$, där $S''(x) = -2$, $S(0)=1$, $S'(1)+S(1)=0$. Härav $\underline{\underline{S(x) = 1 + x - x^2}}$.

Insättning i (DE) + (RV1,2) samt (BV) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} v_{xx} = v_t, & 0<x<1,\ t>0 & (DE)' \\ v(0,t)=0,\ v_x(1,t)+v(1,t)=0, & t>0 & (RV1,2)' \\ v(x,0) = x^2 - x - 1, & 0<x<1, & (BV)'. \end{cases}$$

Ekv + randvillkor för $v(x,t)$ är homogena. Sätt $v(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ i $(DE)'$ få $X''T = XT' \Rightarrow \{\text{mult. m. } \frac{1}{XT}\} \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda < 0$.

St-L. problem: $X''(x) = \lambda X(x)$; $X(0) = 0$, $X'(1) + X(1) = 0$;

har allmänna lösningen $X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$, $(\lambda = -\beta^2,\ \beta > 0)$

$X(0)=0 \Rightarrow A = 0$, $\quad X'(1) + X(1) = 0 \Rightarrow B\beta\cos\beta + B\sin\beta = 0$ dvs $\tan\beta = -\beta$.

Alltså Egenfunktioner till St.L problem är $\underline{\underline{X_n(x) = \sin(\beta_n x)}}$, $n = 1, 2, \ldots$

där β_n är de positiva rötterna till ekvationen $\tan\beta = -\beta$.

Ekvationen för T: $T'(t) = \lambda T(t)$ ger $T_n'(t) = -\beta_n^2 T_n(t)$, vars allmänna lösning är $\underline{\underline{T_n(t) = C_n e^{-\beta_n^2 t}}}$. Alltså

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\beta_n^2 t}\sin(\beta_n x);\ \text{Satisf } (DE)' + (RV1,2)'.$$

$(BV)'$ är uppfyllt om $\underline{\underline{x^2 - x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\beta_n x)}}$. $(*)$

Mult $(*)$ med $\sin(\beta_k x)$ & $\int_0^1 \ldots dx \Rightarrow \int_0^1 (x^2-x-1)\sin(\beta_k x)\,dx = \begin{cases} C_k \int_0^1 \sin^2\beta_k x, & n=k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$

$= C_k\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\beta_k}\sin(2\beta_k)\right) = C_k \frac{2+\beta_k^2}{2(1+\beta_k^2)} \Leftarrow$ (Vi har då utnyttjat $\tan\beta_k = -\beta_k$)

Koefficienterna C_k bestämmes då av

$$C_k = \frac{2(1+\beta_k^2)}{2+\beta_k^2}\int_0^1 (x^2-x-1)\sin(\beta_k x)\,dx = \ldots = \frac{2\sqrt{1+\beta_k^2}}{\beta_k^2(2+\beta_k^2)}\left[2(-1)^k - (2+\beta_k^2)\sqrt{1+\beta_k^2}\right]$$

Svar: $\underline{\underline{u(x,t) = 1 + x - x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\beta_k^2 t}\sin(\beta_k x)}}$.

(5) a $F(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+2k\pi) \Rightarrow F(x+2\pi)=\sum_{-\infty}^{\infty} f\big(x+(2k+2)\pi\big)=\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+2k\pi)=F(x)$.

$\therefore$ F 2π-periodisk.

b $$\underline{\underline{C_n(F)}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+2k\pi)e^{-inx}\,dx \quad (1)$$

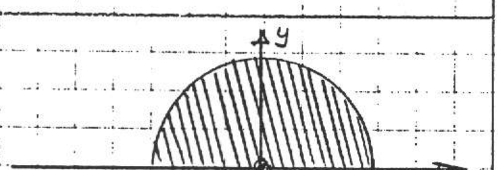
$$=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}f(x)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-inx}\,dx=\underline{\underline{\frac{\hat{f}(n)}{2\pi}}} \quad (2)$$

c $$\underline{\underline{\sum_{-\infty}^{\infty} f(2k\pi)}}=F(0)=\sum_{-\infty}^{\infty}C_n(F)e^{in0}=\underline{\underline{\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)}}. \quad ▨$$

Obs! För omkastningen av summation och integration i (1) räcker det att $\sum f(x+2k\pi)$ konvergerar i $L^1(-\pi,\pi)$, vilket följer om $f\in L^1(\mathbb{R})$. ▨

(6)

Området ges av $0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le\pi$.



I variablerna r, φ har vi problemet:

$$\begin{cases} (DE) & \frac{1}{r}(ru_r)_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=0, \quad 0<r<1, \quad 0<\varphi<\pi \\ (RV)_\varphi & u(r,0)=u(r,\pi)=0, \quad \left[\text{svarar } y=0, \ \begin{matrix}0\le x\le 1\\ -1\le x\le 0\end{matrix}\right] \\ (RV)_r & u(1,\varphi)=\sin^3\varphi \quad [u=y^3 \text{ då } r^2=x^2+y^2=1] \\ & u(0,\varphi) \quad [\text{Existerar; t.ex. är } u(0,0)=u(0,\pi)=0] \end{cases}$$

Var. Sep: Ansätt $u(r,\varphi)=R(r)\,\Phi(\varphi)\neq 0$. Insättning i (DE):

$$\frac{1}{r}(ru_{rr}+u_r)=-\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} \Rightarrow -\Phi(r^2R''+rR')=R\Phi'' \xRightarrow{\left\{\cdot\frac{1}{R\Phi}\right\}} -\frac{r^2R''+rR'}{R}=\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda$$

Lösning för Φ: $\begin{cases}\Phi''=\lambda\Phi\\ \Phi(0)=\Phi(\pi)=0\end{cases} \Rightarrow$ Egenpar: $\begin{cases}\lambda_n=-n^2, \ n=1,2,\ldots\\ \Phi_n(\varphi)=\sin(n\varphi)\end{cases}$

Lösning för R: $r^2R''+rR'-n^2R\overset{(*)}{=}0$. är en Euler diff-ekv.

Den löses antingen med substitutionen $\ln r=t$ eller med ansättningen $R(r)=r^\alpha$ [(DE) för R (*) homogen!].

(6) Med $\ln r = t$ får vi $\frac{dR}{dr} = \frac{1}{r}\frac{dR}{dt}$ och

$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{dR}{dt}\right)$ och för $R(t)$ fås diff. ekvationen:

$R'' - \cancel{R'} + \cancel{R'} - n^2 R = 0$; som har lösningen $R_n(t) = A_n e^{nt} + B_n e^{-nt}$

Alltså: $\underline{R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}}$.

Med $R(r) = r^\alpha$ fås ur (*): $(DE)_2$; $r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - n^2 r^\alpha = 0$,

alltså $\alpha^2 - \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha} - n^2 = 0$; dvs $\alpha = \pm n$ och samma $R_n(r)$.

Att lösningen skall existera för $r=0$ medför nu $B_n = 0$.

Därmed har vi lösningen för (DE) och $(RV)_\varphi$:

$$\underline{u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\Phi_n(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin(n\varphi).}$$

Den skall också satisfiera $(RV)_r$:

$$u(1,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\varphi) = \sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin(3\varphi),$$

dvs, $A_1 = \frac{3}{4}$, $A_2 = 0$, $A_3 = -\frac{1}{4}$, och $A_n = 0$ för $n \geq 4$.

Svar: $\underline{\underline{u(r,\varphi) = \frac{3}{4} r \sin\varphi - \frac{1}{4} r^3 \sin(3\varphi)}}$. ☒

Vill man ha svaret i x, y är det lätt att substituera tillbaka i

$r\sin\varphi = y$

$r^3\sin(3\varphi) = r^3\left(3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi\right) = 3r^2(r\sin\varphi) - 4r^3\sin^3\varphi = 3(x^2+y^2)y - 4y^3$

$\Rightarrow u(x,y) = \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}\left(3(x^2+y^2)y - 4y^3\right)$

Svar i (x,y): $\underline{\underline{u(x,y) = \frac{3}{4}y - \frac{3}{4}x^2 y + \frac{1}{4}y^3}}$. ☒

Anm. a. I den nya formen: Svar i (x,y) är det lättare att verifiera u löser problemet.

b. Alternativ! Lös problemet m.h.a. potential teori: konforma avbildningar. /HL

Jens

Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK   Telefon: Johan Hoffman, 0740–459022
Chalmers tekniska högskola   2001–08–30 kl. 14.15-19.15

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Låt fuktionen f definieras av

$$f(x) = \int_0^2 e^{ix\xi}/(1+\xi)\, d\xi.$$

Beräkna

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx \qquad (b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)\, dx. \qquad (6p)$$

2. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = y, & x > 0, \quad 0 < y < 1, \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, & x > 0, \\ u(0,y) = y - y^3, & 0 < y < 1, \\ u \ \text{ begränsad} & \text{då } x \to \infty. \end{cases} \qquad (6p)$$

3. Funktionen $f(\theta)$ är 2π-periodisk, och $f(\theta) = |\theta|$ för $-\pi < \theta < \pi$. Utveckla f i komplex Fourierserie. Bestäm sedan en 2π-periodisk lösning till ekvationen

$$y'' + 2y = f. \qquad (6p)$$

4. Definiera för $k \in \mathbb{Z}$ funktionen u_k på $\mathbb{R}$ genom $u_k(x) = e^{-ikx}$ om $x \in (-\pi,\pi)$, $u_k(x) = 0$ annars. Låt sedan $\hat{u}_k(\xi)$ vara Fouriertransformen av u_k. Beräkna

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_k(\xi)|^2. \qquad (6p)$$

Ledning: Uppfatta $\hat{u}_k(\xi)$ som Fourierkoefficienter av en viss funktion.

5. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $0 < \theta < \pi/2$, $1 < r < a$ (polära koordinater i planet), med randvillkoren

$$\begin{cases} u(1,\theta) = u(a,\theta) = 0, & 0 < \theta < \pi/2, \\ u(r,0) = 0, & 1 < r < a, \\ u(r,\pi/2) = c, & 1 < r < a. \end{cases} \qquad (6p)$$

6. En lång, rät cirkulär cylinder är delad på längden i två halvor an ledande material isolerade från randen. Den ena halvan är jordad och den andra hålls vid den konstanta potentialen Φ_0. Bestäm potentialen $\Phi(x,y)$ i en godtycklig punkt (x,y) inuti cylindern. Bestäm de ekvipotentiala kurvorna. (6p)

7. Visa att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n = \exp\Big[\frac{x}{2}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\Big], \qquad \forall x, \quad \forall z \neq 0. \qquad (7p)$$

8. Härled differentialekvationen för Legendrepolynomen. (7p)

MA

Lösningar Fourieranalys F2/Kf2, 2001-08-30

1) a) Inversionsformeln säger att

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\,\hat{f}(\xi)\,d\xi\,.$$

Det följer att

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{1+\xi}, & 0<\xi<2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

[P.g.a. entydigheten hos (invers) F-transform]

Parsevals formel $\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi = 2\pi\int_0^2 \frac{d\xi}{(1+\xi)^2}$$

$$= 2\pi\left[\frac{-1}{1+\xi}\right]_0^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

b) Observera att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\,dx = \frac{\hat{f}(-1)+\hat{f}(1)}{2}$$

$$= \frac{2\pi}{2\cdot 2} = \frac{\pi}{2}.$$

Svar: a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \frac{4\pi}{3}$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$

2) Bestäm först $u_0(y)$ som lösning till DE+RV:

$$\begin{cases} u_0'' = y \\ u_0(0) = u_0(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0(y) = \frac{y^3}{6} + ay + b \\ u_0(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \\ u_0(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{6} + a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \underline{u_0(y) = \frac{1}{6}(y^3 - y)}$$

Ansätt sedan $\underline{u = v + u_0}$; där v skall lösa

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0 \\ v(x,0) = v(x,1) = 0 \\ v(0,y) = y - y^3 - u_0 = \frac{7}{6}(y - y^3) \\ v \text{ begr., då } x \to \infty \end{cases}$$

Variabelseparationen ger

$$\underline{v(x,y)} = \underline{\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n e^{n\pi x} + b_n e^{-n\pi x}\right) \sin(n\pi y)}$$

v begr. då $x \to \infty \Rightarrow \underline{a_n = 0}$, $\forall n \ (n \geq 1)$

$$\therefore \quad v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\pi x} \sin(n\pi y)$$

$$v(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi y) = \frac{7}{6}(y - y^3)$$

$$\therefore \quad \underline{b_n} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{7}{6}(y - y^3)\sin(n\pi y)\,dy = \frac{7}{12}\underbrace{\left[(y-y^3)\frac{-\cos(n\pi y)}{n\pi}\right]_0^1}_{=0} +$$

$$\frac{7}{12 n\pi}\int_0^1 (1 - 3y^2)\cos(n\pi y)\,dy$$

$$= \frac{7}{12n\pi}\underbrace{\left[(1-3y^2)\frac{\sin(n\pi y)}{n\pi}\right]_0^1}_{=0} + \frac{7}{12(n\pi)^2}\int_0^1 6y \sin(n\pi y)\,dy$$

$$= \frac{7}{12(n\pi)^2}\left[6y\frac{\cos(n\pi y)}{-n\pi}\right]_0^1 + \frac{42}{12(n\pi)^3}\cancel{\int_0^1 \cos(n\pi y)\,dy}^{\,0}$$

$$= \underline{-\frac{42}{12(n\pi)^3}(-1)^n = \frac{7(-1)^n}{2(n\pi)^3}}$$

$\underline{\underline{\text{Svar:}}}$ $\underline{\underline{u(x,y) = v(x,y) + u_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7(-1)^n}{2(n\pi)^3} e^{-n\pi x} \sin(n\pi y) + \frac{1}{6}(y^3 - y).}}$

3) $f(\theta) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2}$, (se boken! / kolla!)

Ansatt

$$y(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) \quad \text{(p.g.a. att } f \text{ är jämn)}$$

$$\Rightarrow \quad y'' + 2y = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2 - n^2) a_n \cos(n\theta) = f \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2}$$

Välj alltså:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\pi}{2} \\ a_{2n-1} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2 \left(2 - (2n-1)^2\right)} \\ a_{2n} = 0 \end{cases}$$

Svar; $|\theta| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2}$, $y(\theta) = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2 \left(2 - (2n-1)^2\right)}$

---

4) $\hat{u}_k(\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} e^{-ix\xi} \, dx = c_k(f)$

där $f(x) = e^{-ix\xi}$; $x \in (-\pi, \pi)$

$$\therefore \quad \sum |\hat{u}_k(\xi)|^2 = \sum |c_k(f)|^2 = \{\text{Parsevals formel}\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 1$$

Svar; $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_k(\xi)|^2 = 1$.

5) $$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & 0<\theta<\frac{\pi}{2}, \quad 1<r<a \\ u(1,\theta) = u(a,\theta) = 0, & 0<\theta<\pi/2 \\ u(r,0) = 0, \quad u(r,\frac{\pi}{2}) = C, & 1<r<a \end{cases}$$

Ansatz $\underline{u(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta) \neq 0}$ och uppfyll de homogena villk.

$$\frac{1}{r}(rR')'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{r(rR')'}{R} = \frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

$$(1)\begin{cases} -r(rR')' = \lambda R, & 1<r<a, \\ R(1) = 0, \quad R(a) = 0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \Theta'' = \lambda\Theta, & 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ \Theta(0) = 0 \end{cases}$$

(1) är ett Sturm–Liouville-problem med $w(r) = \frac{1}{r}$, $p(r) = r$, $q(r) = 0$.

Egenvärdena är >0; skriv $\lambda = \beta^2$, $\beta>0$.

(1) $\Leftrightarrow$ $r^2R'' + rR' + \beta^2 R = 0$, som är av Euler typ och har lösningar av typ $\underline{R(r) = r^k}$.

Insättning i (1) ger

$$r^2 k(k-1)r^{k-2} + rkr^{k-1} + \beta^2 r^k = 0, \quad k^2 - k + k + \beta^2 = 0$$

$k^2 = -\beta^2$; $k = \pm i\beta$. Allmän lösning:

$$\underline{R(r)} = C_1 r^{i\beta} + C_2 r^{-i\beta} = C_1 e^{i\beta\ln r} + C_2 e^{-i\beta\ln r}$$

$$= \underline{A\cos(\beta\ln r) + B\sin(\beta\ln r)}$$

$R(1) = A = 0$, $R(a) = B\sin(\beta\ln a) = 0$, $B\neq 0 \Rightarrow \sin(\beta\ln a) = 0$

$\beta\ln a = n\pi$, $n\geq 1$, $\beta = \underline{\beta_n = \frac{n\pi}{\ln a}}$, $\underline{\lambda_n = \beta_n^2}$

Egenfunktioner $\underline{R_n(r) = \sin(\beta_n \ln r)} = \underline{\sin\left(\frac{n\pi\ln r}{\ln a}\right)}$

(2) blir $\Theta_n'' = \beta_n^2\Theta$,

$$\Theta_n(\theta) = a_n\sinh(\beta_n\theta) + b_n\cosh(\beta_n\theta)$$

$$\Theta_n(0) = 0 \Rightarrow b_n = 0$$

5) forts.

Ansätt totallösningen

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\,\Theta_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh(\beta_n \theta) \sin(\beta_n \ln r).$$

Återstår $u(r, \frac{\pi}{2}) = c$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n \sinh\left(\beta_n \frac{\pi}{2}\right)}_{c_n} \sin(\beta_n \ln r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\beta_n \ln r) = c$$

$\{\sin(\beta_n \ln r)\}_{n=1}^{\infty}$ är ett fullständigt OG-system på intervallet $(1, a)$

med viktfunktion $w(r) = \frac{1}{r}$, och c_n är Fourier-koeff till den konstanta funktionen c m.a.p. detta OG-system så att

$$c_n = \frac{1}{\rho_n} \int_1^a c \cdot \sin(\beta_n \ln r) \frac{1}{r}\, dr$$

$$\rho_n = \int_1^a \sin^2(\beta_n \ln r) \frac{1}{r}\, dr = \left[\ln r = x,\ \frac{1}{r}dr = dx \right]$$

$$= \int_0^{\ln a} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{\ln a}\right) dx = \frac{\ln a}{2},$$

$$c_n = \frac{2c}{\ln a} \int_0^{\ln a} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ln a}\right) dx = \frac{2c}{\ln a}\left[-\frac{\ln a}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ln a}\right)\right]_0^{\ln a}$$

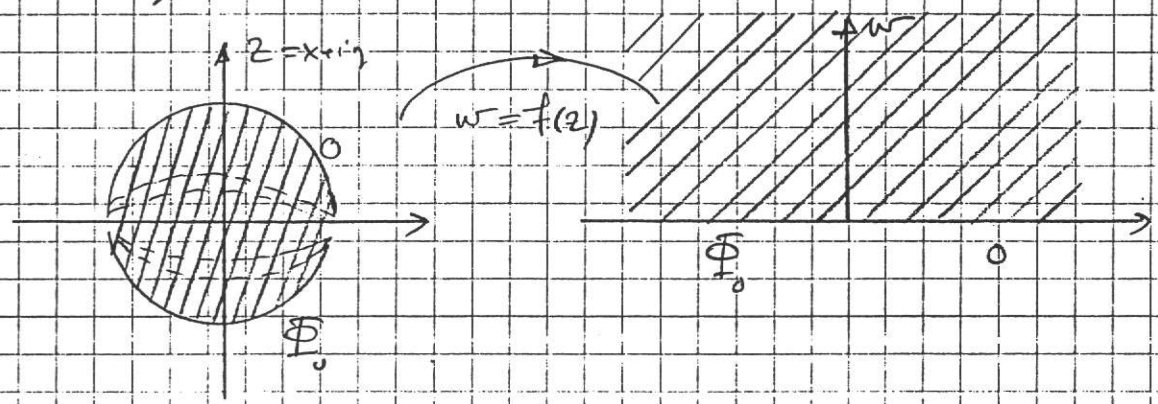
$$= \frac{2c}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \frac{2c}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

$$\Rightarrow \quad c_{2k} = 0, \quad c_{2k-1} = \frac{4c}{(2k-1)\pi}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = \frac{c_{2k-1}}{\sinh\left(\beta_{2k-1} \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Svar: $$u(r,\theta) = \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \frac{\sinh \frac{(2k-1)\pi\theta}{\ln a}}{\sinh \frac{(2k-1)\pi^2}{2\ln a}} \sin \frac{(2k-1)\pi \ln r}{\ln a}$$

6) Cylinderns tvärsnitt är enhetscirkeln (med lämplig längdenhet).
Avbilda cirkeln på övre halvplanet så att halvcirkeln (där $\Phi = 0$)
avbildas på positiva realaxeln och undre halvcirkeln (där $\Phi = \Phi_0$)
på negativa realaxeln:



$w = j\,\frac{1-z}{1+z}$ (Möbiusavbildning)

Välj som Φ: $\Phi(\theta) = A\theta + B$ med $\begin{cases} \cot\theta = \frac{u}{v} \\ 0 < \theta < \pi \end{cases} \Rightarrow$

$\theta = \operatorname{arccot}\left(\frac{u}{v}\right)$

$\Phi(\theta = 0) = 0 \Rightarrow A \cdot 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0.$

$\Phi(\theta = \pi) = \Phi_0 \Rightarrow A \cdot \pi = \Phi_0 \Rightarrow A = \frac{\Phi_0}{\pi}$

$\therefore \quad \underline{\Phi(u,v) = \frac{\Phi_0}{\pi}\operatorname{arccot}\left(\frac{u}{v}\right)}$

$u + iv = j\,\frac{1-x-jy}{1+x+jy} = j\,\frac{(1-x-jy)(1+x-jy)}{(1+x)^2+y^2} = \frac{2y + j(1-x^2-y^2)}{(1+x)^2+y^2}$

Alltså är $\underline{\underline{\Phi(x,y) = \frac{\Phi_0}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{2y}{1-x^2-y^2}}}$.

Speciellt är $\Phi(x,0) = \frac{\Phi_0}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\Phi_0}{2}$, $-1 < x < 1$.

Ekvipotentialkurvor: $\frac{2y}{1-x^2-y^2} = c$ (Cirkelbågar genom $(\pm 1, 0)$)

2005

Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK Telefon: Fredrik Nilsson, 0740–459022
Chalmers tekniska högskola 2001–03–09 kl. 8.45-13.45

TMA132 (även TMA131 på 3 poäng) Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Bestäm ett reellt polynom $P(x)$ av högst andra graden sådant att integralen $\int_{-1}^{1}[P(x)-\cos(\pi x)]^2\,dx$ blir minimal.

2. Låt funktionen f definieras av $f(x)=\int_0^1 \frac{e^{ix\xi}}{\sqrt{1+\xi^2}}\,d\xi$. Beräkna

$$(a)\quad \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx, \qquad (b)\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)\,dx.$$

3. Lös, med hjälp av Fouriertransformering i x–led, begynnelsevärdesproblemet:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+2u_x+u, & t>0, & x\in\mathbb{R}, \\ u(x,0)=f(x), & f\in L^1, & \hat{f}\in L^1, \\ u(x,t)\ \text{begränsad} & \text{då } t\to\infty. & \end{cases}$$

4. **4N.** (för studenter som tenterar den nya kursen TMA132)

Bestäm, m.h.a. konforma avbildningar, lösningen till följande stationära värmeledningsekvation:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & -\pi/2<x<\pi/2, & y>0, \\ u(-\pi/2,y)=u(\pi/2,y)=0, & & y>0, \\ u(x,0)=1, & -\pi/2<x<\pi/2. & \end{cases}$$

4G. (för studenter som tenterar den gamla kursen TMA131)

Lös följande inhomogena värmeledningsekvation:

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=xe^t, & 0<x<\pi, & t>0, \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0, & & t>0, \\ u(x,0)=0, & 0<x<\pi. & \end{cases}$$

5. Bestäm en begränsad lösning till ekvationen:

$$\begin{cases} u_t=\nabla^2 u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}, & 0<r<1,\ t>0, & 0\le\theta<2\pi, \\ u(1,\theta,t)=0, & u(r,\theta,0)=r\sin\theta, & t>0. \end{cases}$$

6. Bevisa samplingssatsen: Antag $f\in L^2$, $\hat{f}(\omega)=0$ för $|\omega|\ge\Omega$, (bandbegränsad signal). Då kan f återvinnas ur den samplade signalen som består av f:s värde i punkter $t_n=n\pi/\Omega$; $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Dvs

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)\frac{\sin(n\pi-\Omega t)}{(n\pi-\Omega t)}.$$

7. Bevisa Bessel's olikhet (I): Antag att f är 2π-periodisk, Riemannintegrerbar på $[-\pi,\pi]$. C_n är, komplexa Fourierkoefficienter till f. Då är

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|C_n|^2\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2\,d\theta.$$

MA

Lösningar TMA132 (TMA 131, 3 poäng) för F2/Kf2, 5 poäng, 2001-03-09

1) Bestäm ett reellt polynom $P(x)$ av högst andra graden sådant att integralen $\int_{-1}^{1}[P(x)-\cos(\pi x)]^2dx$ blir minimal.

Lösning: Integralen blir minimal då $P(x)=\sum_{n=0}^{2} c_n P_n(x)$, där

$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} P_n(x)\cos(\pi x)dx$, $n=0,1,2$; P_n = Legendre polynom.

$P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$.

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos(\pi x)dx = \{\text{jämn}\} = \int_0^1 \cos(\pi x)dx = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\Big|_0^1 = 0.$$

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x\cos(\pi x)\,dx = \{\text{udda integrand}\} = 0.$$

$$c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(3x^2-1)\cos(\pi x)dx = \frac{15}{4}\int_{-1}^{1}x^2\cos(\pi x)dx - \frac{5}{2}c_0 = \{\text{jämn integrand}\}$$

$$= \frac{15}{2}\int_0^1 x^2\cos(\pi x)dx = [PI] = \frac{15}{2}\Big[x^2\cdot\frac{1}{\pi}\cancel{\sin(\pi x)}\Big]_0^1 - \frac{15}{2}\int_0^1 2x\cdot\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)dx$$

$$= -\frac{15}{\pi}\Big[x\cdot\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\Big]_0^1 + \frac{15}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{\pi}dx = \frac{15}{\pi^2}\cos(\pi) = -\frac{15}{\pi^2}.$$

$$\therefore\ P(x) = c_2P_2(x) = -\frac{15}{\pi^2}\,\frac{1}{2}(3x^2-1) = \frac{15}{2\pi^2} - \frac{45}{2\pi^2}x^2$$

---

2) Låt funktionen $f(x)$ definieras av $f(x)=\int_0^1 \frac{e^{ix\xi}}{\sqrt{1+\xi^2}}d\xi$.

Beräkna a) $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$, b) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(x)dx$.

Lösning

a) Enligt Fouriers inversionsformel $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$. Det följer att

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases}\frac{2\pi}{\sqrt{1+\xi^2}}, & 0<\xi<1\\ 0 & \text{annars.}\end{cases}$$

(P.g.a. entydigheten hos invers Fouriertransform.)

Parsevals $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi = 2\pi\int_0^1\frac{d\xi}{1+\xi^2} = 2\pi\arctan(\xi)\Big|_0^1$

$$= 2\pi\cdot\frac{\pi}{4} = \pi^2/2$$

b) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}[\hat{f}(-1)+\hat{f}(1)]$.

Men $\hat{f}(-1)=0$ och eftersom $\xi=1$ är en diskontinuitetspunkt av $\hat{f}(\xi)$

$\hat{f}(1) = \frac{1}{2}[\hat{f}(1+)+\hat{f}(1-)] = \frac{1}{2}\Big[\frac{2\pi}{\sqrt{2}}+0\Big] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$; $\therefore \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(x)dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Svar; a) $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx = \pi^2/2$ b) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(x)dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

3) Lös, med hjälp av Fouriertransformering i x-led, begynnelsevärdesproblemet:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2u_x + u, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), & f \in L^1, \ \hat{f} \in L^1, \\ u(x,t) \text{ begränsad} & \text{då } t \to \infty. \end{cases}$$

Lösning $u_{tt} = u_{xx} + 2u_x + u \xrightarrow[\text{i x-led}]{\text{F-transf.}} \hat{u}_{tt} = [(i\xi)^2 + 2(i\xi) + 1]\hat{u}$,

med den partielle (m.a.p. x) F-transformen

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-ix\xi}\, dx.$$

$$\because \ \hat{u}_{tt} = (1+i\xi)^2 \hat{u} \Rightarrow \hat{u}(\xi,t) = c_1(\xi)\, e^{(1+i\xi)t} + c_2(\xi)\, e^{-(1+i\xi)t}.$$

u begränsad då $t \to \infty \Rightarrow c_1(\xi) = 0$

$u(x,0) = f(x) \Rightarrow \hat{u}(\xi, 0) = c_2(\xi) = \hat{f}(\xi)$

$$\therefore \ \hat{u}(\xi,t) = e^{-(1+i\xi)t}\, \hat{f}(\xi)$$

Invers F-transform $\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi,t)\, e^{i\xi x}\, d\xi =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{-(1+i\xi)t}\, e^{i\xi x}\, d\xi = e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi(x-t)}\, d\xi$$

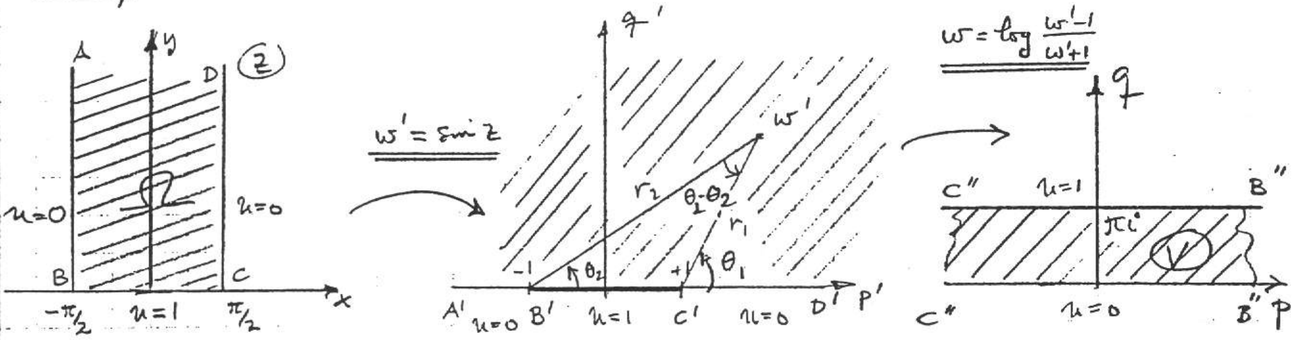
$$= e^{-t} f(x-t).$$

Svar: $u(x,t) = e^{-t} f(x-t)$.

4) 4N. Bestäm, m.h.a. konforma avbildningar, lösningen till följande stationära värmeledningsekvation:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\pi/2 < x < \pi/2, \quad y > 0 \\ u(-\pi/2, y) = u(\pi/2, y) = 0, & y > 0 \\ u(x, 0) = 1, & -\pi/2 < x < \pi/2. \end{cases} \qquad (*)$$

Lösning



$w' = \sin z$ och $w = \log\frac{w'-1}{w'+1}$ är analytiska funktioner som avbildar det aktuella området Ω till övrehalvplan, resp. övrehalvplan till bandet (V)

$$w = \log\frac{w'-1}{w'+1} = \log\frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2), \quad (0<\theta_1<\pi, \quad 0<\theta_2<\pi).$$

$u = \frac{1}{\pi}q$ def. på (V) är harmonisk och satisf. $(*)$.

$$w = \log\frac{w'-1}{w'+1} = \ln\left|\frac{w'-1}{w'+1}\right| + i\arg\left(\frac{w'-1}{w'+1}\right), \quad w' = p' + iq' \Rightarrow$$

$$q = \arg\left(\frac{p'-1+iq'}{p'+1+iq'}\right) = \arg\left(\frac{p'^2+q'^2-1+2iq'}{(p'+1)^2+q'^2}\right) = \operatorname{arccot}\left(\frac{p'^2+q'^2-1}{2q'}\right)$$

$$w' = \sin z \iff p' + iq' = \sin(x+iy) = \sin x\cosh(y) + i\cos x\sinh(y).$$

$$\therefore\ u = \frac{1}{\pi}q = \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\left(\frac{\sin^2 x\cosh^2(y) + \cos^2 x\sinh^2(y) - 1}{2\cos x\sinh y}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\left(\frac{\sin^2 x(1+\sinh^2(y)) + \cos^2 x\sinh^2(y) - 1}{2\cos x\sinh y}\right) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\left(\frac{\sin^2 x + \sinh^2(y) - 1}{2\cos x\sinh(y)}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\left(\frac{\sinh^2(y) - \cos^2 x}{2\cos x\sinh(y)}\right) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\left(\frac{1-(\cos x/\sinh(y))^2}{2(\cos x/\sinh(y))}\right)$$

$$= \{\tan\alpha := \cos x/\sinh(y)\} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{\tan 2\alpha}\right) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}(\cot 2\alpha) = \frac{2\alpha}{\pi}$$

Svar: $u(x,y) = \frac{2}{\pi}\cdot\arctan\left(\frac{\cos x}{\sinh(y)}\right)$

4) 46. Lös följande inhomogena värmeledningsekv:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x e^t, & 0<x<\pi,\ t>0, & (DE) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t>0, & (RV) \\ u(x,0) = 0, & 0<x<\pi. & (BV) \end{cases}$$

Lösning: Betrakta motsv. homogen problem: $u_t = u_{xx}$ $\wedge$ $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$.

Variabelseparation leder till egenvärdesproblemet: $X'' = -\lambda X$, $X'(0) = X'(\pi) = 0$;

med egenfunktionen $X_n(x) = \cos(nx)$; $n \geq 0$.

Utv. för fixed t, xe^t i basen $\{\cos(nx)\}_{n=0}^{\infty}$.

$$x e^t = e^t\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\right), \text{ dvs } x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx); \quad 0<x<\pi$$

(jfr. jämn utvidg. av F-series),

$$n \neq 0: \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{x\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi}}_{0} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\text{för } n=0; \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

$$\therefore \quad xe^t = \frac{\pi}{2}e^t + e^t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos(nx).$$

Ansätt $\underline{u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\cos(nx)}$. (DE) + (BV) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\left[u_n'(t) + n^2 u_n(t)\right]\cos(nx) = \frac{\pi}{2}e^t + e^t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos(nx) \\ u_n(0) = 0 \end{cases}$$

$n \neq 0$; $u_n'(t) + n^2 u_n(t) \overset{(*)}{=} \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)e^t$; $u_n(0) = 0$; Integrerande faktorn

är $I.F. = e^{n^2 t}$; $(*)\cdot(I.F.) \Leftrightarrow \left(u_n(t)e^{n^2 t}\right)' = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)e^{t(1+n^2)}$

dvs $u_n(t)e^{n^2 t} = \frac{2}{\pi n^2(1+n^2)}\left((-1)^n - 1\right)e^{t(1+n^2)} + C$

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi n^2(1+n^2)}\left((-1)^n - 1\right)e^t + Ce^{-n^2 t}, \quad u_n(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{-2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2(1+n^2)}$$

$$\therefore \quad \underline{u_n(t) = \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2(1+n^2)}\left(e^t - e^{-n^2 t}\right)}.$$

$n=0$; $u_0'(t) = \frac{\pi}{2}e^t \Rightarrow u_0(t) = \frac{\pi}{2}e^t + C_0$, $u(0) = 0 \Rightarrow C_0 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{u_0(t) = \frac{\pi}{2}(e^t - 1)}$

Alltså:

Svar: $$\underline{\underline{u(x,t) = \frac{\pi}{2}(e^t - 1) - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^t - e^{-(2k-1)^2 t}}{(2k-1)^2\left(1+(2k-1)^2\right)}\cos(2k-1)x.}}$$

5.) Bestäm en begränsad lösning till ekvationen:

$$\begin{cases} u_t = D^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}, & 0<r<1,\ t>0,\quad 0\le\theta<2\pi \\ u(1,\theta,t) = 0, \quad u \text{ begr.} & u(r,\theta,0) = r\sin\theta \end{cases}$$

Lösning. Variabelseparation: $u(r,\theta,t) = R(r)\,\Theta(\theta)\,T(t) \neq 0$;

$$R\Theta T' = \left(R'' + \tfrac{1}{r}R'\right)\Theta T + \tfrac{1}{r^2}R\Theta'' T \Rightarrow r^2\frac{T'}{T} - \frac{r^2R'' + rR'}{R} = \frac{\Theta''}{\Theta} = -\nu^2$$

$\Theta'' + \nu^2\Theta = 0$; $\Theta(\theta)$, 2π-periodisk $\Rightarrow \nu = n$ heltal ≥ 0:

$$\Theta_n(\theta) = a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta), \quad n \ge 0$$

$$\frac{T'}{T} = \frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} - \frac{\nu^2}{r^2} = -\mu^2 \Rightarrow T' = -\mu^2 T \quad \wedge \quad R'' + \tfrac{1}{r}R' + \left(\mu^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)R = 0$$

ekv. för R är Bessels diff-ekv av ord $\nu = n$; $\Rightarrow R(r) = A J_n(\mu r) + B Y_n(\mu r)$, $\mu \ge$

$R(r)$ begr. då $r \to 0+ \Rightarrow B = 0 \Rightarrow R(r) = A J_n(\mu r)$

$R(1) = 0 \Rightarrow J_n(\mu) = 0$. Låt $\mu_{n,k}$, $k = 1,2,\dots$ vara de positiva nollställena

till $J_n(x)$ då $\quad R_{n,k}(r) = A_{n,k} J_n(\mu_{n,k} r) \qquad n \ge 0,\ k \ge 1.$

$$T'_{n,k} = -\mu_{n,k}^2 T_{n,k} \Rightarrow T_{n,k}(t) = C_{n,k} e^{-\mu_{n,k}^2 t}.$$

$$\therefore u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(p_{n,k}\cos(n\theta) + q_{n,k}\sin(n\theta)\right)J_n(\mu_{n,k} r)\, e^{-\mu_{n,k}^2 t}$$

$$u(r,\theta,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(p_{n,k}\cos(n\theta) + q_{n,k}\sin(n\theta)\right)J_n(\mu_{n,k} r) = r\sin\theta \Rightarrow$$

$p_{n,k} = 0$ för alla n,k, $q_{n,k} = 0$ för $n \neq 1$. Och

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_{1,k}\sin(\theta)J_1(\mu_{1,k} r) = r\sin\theta; \text{ vilket ger } \sum_{k=1}^{\infty} q_{1,k}J_1(\mu_{1,k} r) = r$$

$\|J_1(\mu_{1,k} r)\|^2 = \frac{1}{2}J_2^2(\mu_{1,k})$ (Thm 5.3). Men $J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)$ enl. (5.17)

så $J_2(\mu_{1,k}) \overset{\text{obs!}}{=} \{J_1(\mu_{1,k}) = 0\} \overset{(*)}{=} -J_0(\mu_{1,k})$; $\therefore \|J_1(\mu_{1,k} r)\|^2 = \frac{1}{2}J_0^2(\mu_{1,k})$.

$$\int_0^1 r J_1(\mu_{1,k} r)\, r\,dr = \{\mu_{1,k} r = x\} = \frac{1}{\mu_{1,k}^3}\int_0^{\mu_{1,k}} x^2 J_1(x)\,dx = \frac{1}{\mu_{1,k}^3}\int_0^{\mu_{1,k}}\frac{d}{dx}\left[x^2 J_2(x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{\mu_{1,k}^3}\left[x^2 J_2(x)\right]_0^{\mu_{1,k}} = \frac{1}{\mu_{1,k}}J_2(\mu_{1,k}) \overset{(*)}{=} -\frac{1}{\mu_{1,k}}J_0(\mu_{1,k})$$

$$\Rightarrow q_{1,k} = \frac{2}{J_0^2(\mu_{1,k})}\cdot\frac{-1}{\mu_{1,k}}J_0(\mu_{1,k}) = \frac{-2}{\mu_{1,k}J_0(\mu_{1,k})}$$

Varför Svar; $\quad u(r,\theta,t) = -2\sin\theta\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(\mu_{1,k} r)}{\mu_{1,k}J_0(\mu_{1,k})}e^{-\mu_{1,k}^2 t}.$