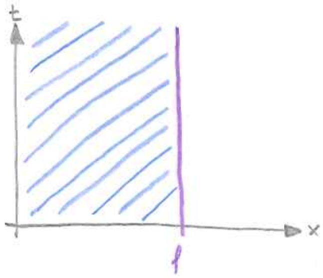
16/1 2011

Fourieranalys

Värmeledningsekvationen



$u = u(x,t)$, $\quad 0 < x < l$, $\quad t > 0$

$u'_t = k u''_{xx}$, $\quad k > 0$

Randvillkor: $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $\ t > 0$

Begynnelsevillkor: $u(x,0) = f(x)$, $\ 0 < x < l$

Sök först separerade lösningar $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ till värmeledningsekvationen, med randvillkoren uppfyllda, det vill säga så att $X(0) = X(l) = 0$.

Insättning i värmeledningsekvationen ger

$$X(x)\,T'(t) = k\,X''(x)\,T(t),$$

$$\frac{1}{k}\,\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \overset{\text{def}}{=} \lambda. \quad \text{(En konstant)}$$

Ekvationen $T'(t) = k\lambda T(t)$ erhålles, med lösningen $T(t) = C_0 e^{k\lambda t}$, och dessutom erhålles $X''(x) = \lambda X(x)$, med karakteristisk ekvation $r^2 - \lambda = 0$, vilken har lösningen $r_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$.

Tre fall kan nu behandlas:

1. $\lambda > 0$: $X(x) = a e^{\sqrt{\lambda} x} + b e^{-\sqrt{\lambda} x}$

   Randvillkoren ger: $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$, $\ a e^{\sqrt{\lambda} l} - a e^{-\sqrt{\lambda} l} = 0$

   Alltså: $2a \sinh \lambda l = 0$. Inga lösningar, utöver $X(x) \equiv 0$.

2. $\lambda = 0$: $X(x) = ax + b$. Inga lösningar, utöver $X(x) \equiv 0$.

3. $\lambda < 0$: Inför ν sådant att $\lambda = -\nu^2$, där $\nu > 0$.

   $X''(x) = -\nu^2 X(x)$, med allmän lösning:

   $X(x) = a \cos \nu x + b \sin \nu x$.

   Randvillkoren ger: $X(0) = 0$ ger $a = 0$.

   $X(l) = 0$ ger $\sin \nu l = 0$, vilket ger $\nu l = n\pi$, för $n \in \mathbf{N}$.

   $\lambda = -\nu^2 = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$

   Separerade lösningar: $X(x)\,T(t) = b \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot C_0 e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$.

Slutligen: $X(x)\,T(t) = C \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$, $\quad n \in \mathbf{N}$.

Begynnelsevillkor: $u(x,0) = f(x)$ ger

$$\sin \frac{n\pi}{\ell}x = f(x)$$

Även en summa $u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell}x \cdot e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$ satisfierar värmeledningsekvationen, och randvillkoren.

Kan b_n väljas så att begynnelsevillkoret satisfieras?

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell}x = f(x), \qquad 0 < x < \ell$$

Fourier påstod att varje funktion f kan skrivas som en serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell}x \quad \text{i} \quad 0 < x < \ell.$$

I så fall löser $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell}x \cdot e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$ hela problemet, om inga konvergensproblem uppstår.

Variant på problemet: $u'_x(0,t) = u'_x(\ell,t) = 0$, som randvillkor.

Lösningen fortsätter som förut, fram till:

1. $\lambda > 0$:
$$X(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$$
$$X'(x) = \sqrt{\lambda}ae^{\sqrt{\lambda}x} + \sqrt{\lambda}be^{-\sqrt{\lambda}x}$$
Då är $a = b$, och $\sqrt{\lambda}\, a\, 2\cosh \sqrt{\lambda}\ell = 0$, vilket ej går.

2. $\lambda = 0$:
$$X(x) = ax + b$$
$$X'(x) = a$$
Då är $a = 0$, $X(x) = b$.
$u = b$ är en separerad lösning.

3. $\lambda < 0$:
$$\lambda = -\nu^2, \quad \nu > 0$$
$$X(x) = a\cos \nu x + b \sin \nu x$$
$$X'(x) = -a\nu \sin \nu x + b\nu \cos \nu x$$
Alltså $b = 0$, $\sin \nu x = 0 \Rightarrow \nu = \frac{n\pi}{\ell}$, $n \in \mathbf{N}$.

Separerade lösningar: $u(x,t) = 1$, och $u(x,t) = \cos \frac{n\pi}{\ell}x \cdot e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$, $n \in \mathbf{N}$.

Försök med $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{\ell}x \cdot e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$.

Begynnelsevillkor: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{\ell}x = f(x)$

Ytterligare en variant: En cirkel

$\theta \in \mathbb{R}$

$u = u(\theta, t)$, 2π-periodisk

Det nya problemet formuleras som:

$$\begin{cases} u'_t = k u''_{\theta\theta} \\ u(\theta,t) = u(\theta + 2\pi, t) \\ u(\theta,0) = f(\theta) \end{cases}$$

Separat lösning: $u(\theta,t) = \Theta(\theta)\, T(t)$

Som förut erhålls:

$T(t) = C_0 e^{k\lambda t}$

$\Theta''(\theta) = \lambda \Theta(\theta)$

1. $\lambda > 0$: $a^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$, kan omöjligt vara periodisk.

2. $\lambda = 0$: $a\theta + b$, $\Theta(\theta) = 1$ är periodisk.

3. $\lambda < 0$: $\Theta(\theta) = a\cos\nu\theta + b\sin\nu\theta$ är 2π-periodisk, om $\nu \in \mathbb{N}$, och inte annars.

Separerade lösningar: $u(\theta,t) = (a_n\cos n\theta + b_n \sin n\theta)e^{-kn^2t}$

Ansätt $u(\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = f(\theta)$, för alla $\theta \in \mathbb{R}$.

Det räcker att betrakta ett 2π-intervall, till exempel $|\theta| \leq \pi$

Serierna som figurerat i lösningarna ovan är alla exempel på Fourierserier.

Fourierserier

Koefficienter: Antag f 2π-periodisk på $\mathbb{R}$.

$f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, eller $\mathbf{C}$

Vill utveckla f som

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

eller ekvivalent:

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}.$$

Detta ses med de Moivres formel:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$c_n e^{i\theta} - c_{-n} e^{-i\theta} = (c_n + c_{-n})\cos n\theta + i(c_n - c_{-n})\sin n\theta$$

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases}, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$$

Detta fungerar just eftersom $c_0 = \frac{1}{2}a_0$ valdes. Sambanden kan inverteras:

$$\begin{cases} c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}, \quad n \in \mathbf{N}$$

Vad är c_n?

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} e^{-ik\theta}\, d\theta = \left[\frac{1}{i(n-k)} e^{i(n-k)\theta}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{i(n-k)}\left(e^{i(n-k)\pi} - e^{-i(n-k)\pi}\right) = 0, \quad \text{där } n \neq k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} e^{-ik\theta}\, d\theta = 2\pi, \quad \text{om } n = k.$$

För $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ bör $\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta}\, d\theta = 2\pi c_k$.

Alltså, en rimlig gissning för c_k är

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta}\, d\theta$$

Ur detta kan även a_k och b_k erhållas:

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(e^{-ik\theta} + e^{ik\theta})\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi} i\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(e^{-ik\theta} - e^{ik\theta})\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\,d\theta \quad , \; n \in \mathbf{N}$$

Det går att betrakta c_0, eller $\frac{a_0}{2}$, som medelvärdet av f över en period:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta$$

Specialfall: Om f är jämn blir

$b_n = 0$ för alla n,

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta$ för alla n.

Exempel: $f_2(\theta) = |\theta|$, $-\pi \le \theta \le \pi$, är jämn

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\theta|\cos n\theta\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\theta\cos n\theta\,d\theta = \frac{2}{\pi}\left[\theta\frac{\sin n\theta}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin n\theta}{n}\,d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos n\theta\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\theta - 1) = \begin{cases} 0, & n \text{ jämnt} \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ udda} \end{cases} \quad , \quad n > 0$$

För $n = 0$: $\quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\theta\,d\theta = \pi$

Slutligen erhålls Fourierserien:

$$f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty}\frac{4}{\pi n^2}\cos n\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\theta$$

Specialfall: Om f är udda är

$a_n = 0$ för alla n,

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta$ för alla n.

Exempel: $f_1(\theta) = \theta, \quad -\pi < \theta < \pi$ är udda.

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \theta \sin n\theta \, d\theta = (-1)^n \frac{2}{n}, \quad n \in \mathbf{N}$$

Fourierserien är $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n\theta$.

Exempel: $f_6(\theta) = \begin{cases} +1, & 0 < \theta < \pi \\ -1, & -\pi < \theta < 0 \end{cases} = \operatorname{sgn}\theta$ är udda.

$$a_n = 0$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n}, & n \text{ udda} \\ 0, & n \text{ jämnt} \end{cases}$$

Fourierserien är $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1}$.

Konvergens

Hur små är koefficienterna för stora n?

Sats (Bessels olikhet): Antag f 2π-periodisk och Riemannintegrerbar i $[-\pi, \pi]$.
Då är $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta$.

Bevis: $$0 \leq \left| f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} \right|^2 = \left(f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} \right)\left(\overline{f(\theta)} - \sum_{n=-N}^{N} \bar{c}_n e^{-in\theta} \right) =$$

$$= |f(\theta)|^2 - \sum_{n=-N}^{N} \bar{c}_n f(\theta) e^{-in\theta} - \sum_{n=-N}^{N} c_n \overline{f(\theta)} e^{in\theta} + \sum_{n=-N}^{N}\sum_{n'=-N}^{N} c_n \bar{c}_{n'} e^{in\theta} e^{-in'\theta}$$

Integrera:

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta - 2\pi \sum_{n=-N}^{N} \bar{c}_n c_n - \sum_{n=-N}^{N} \underbrace{\overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta}}_{\bar{c}_n} + \sum_{n=-N}^{N} c_n \bar{c}_n 2\pi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta - 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

Alltså $\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$, varpå n låtes växa obegränsat, och satsen följer.

Det följer: $|a_n|^2 + |b_n|^2 = |c_n + c_{-n}|^2 + |c_n - c_{-n}|^2 = 2|c_n|^2 + 2|c_{-n}|^2$, och

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$$

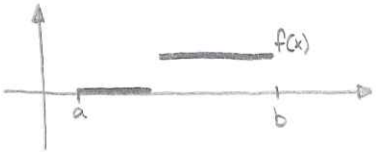
Corollarium (Riemann-Lebesgues lemma): Antag f som i Bessels olikhet.

Då $a_n, b_n, c_{\pm n} \longrightarrow 0$ då $n \longrightarrow \infty$

Definition: En funktion definierad i intervallet $[a, b]$ kallas styckvis kontinuerlig om f är kontinuerlig i $[a, b]$, utom eventuellt i ändligt många punkter $x_1, x_2, \dots, x_n$, och om x har ändliga vänster- och högergränsvärden $f(x_j-)$ och $f(x_j+)$ i alla x_j.

Definition: f kallas styckvis glatt i $[a, b]$ om f och f' är styckvis kontinuerliga, det vill säga om f och f' är kontinuerliga utom eventuellt i $x_1, \dots, x_n$, och båda har vänster- och högergränsvärden i varje x_j

Exempel:



f är styckvis glatt i $[a, b]$

Konvergens, fortsättning

Går $\sum c_n e^{in\theta}$ mot $f(\theta)$?

Sätt $S_N(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$. Går $S_N(\theta)$ mot $f(\theta)$ då $N \longrightarrow \infty$.

Sats: Antag att f är 2π-periodisk och styckvis glatt i $[-\pi, \pi]$. Då konvergerar $S_N(\theta)$ för varje θ. Gränsvärdet är $f(\theta)$ om f är kontinuerlig i θ, annars $\frac{1}{2}(f(\theta-) + f(\theta+))$.

Bevis (i kontinuitetspunkt): Antag f är kontinuerlig i θ_0.

Inför $g(\theta) = \dfrac{f(\theta) - f(\theta_0)}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}$, $\theta \neq \theta_0$.

Utanför θ_0 (i det valda intervallet) är g styckvis glatt.

g har vänster- och högergränsvärden i θ_0, ty

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(\theta_0)}{\theta - \theta_0} \, \frac{\theta - \theta_0}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}$$

Notera att $\dfrac{\theta - \theta_0}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}} \longrightarrow \dfrac{1}{\left.\frac{de^{i\theta}}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_0}}$.

Använd sedan att $\dfrac{f(\theta) - f(\theta_0)}{\theta - \theta_0} = f'(\xi)$, där ξ är mellan θ och θ_0 (Lagranges medelvärdessats).

Då $\theta \longrightarrow \theta_0$ från vänster eller höger går $f'(\xi)$ mot $f'(\theta_0-)$ respektive $f'(\theta_0+)$.

Då är g styckvis kontinuerlig, och Riemann–Lebesgues lemma ger att $c_n(g) \to 0$ då $n \longrightarrow \pm\infty$.

$$f(\theta) = f(\theta_0) + e^{i\theta} g(\theta) - e^{i\theta_0} g(\theta)$$

$$c_n(f) = f(\theta_0)\delta_{n0} + c_n(e^{i\theta} g(\theta)) - e^{i\theta_0} c_n(g(\theta))$$

$$c_n(e^{i\theta} g(\theta)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} g(\theta) e^{-in\theta} \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) e^{-i(n-1)\theta} \, d\theta = c_{n-1}(g(\theta))$$

$$S_N(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{in\theta} = f(\theta_0) + \sum_{n=-N}^{N} c_{n-1}(g) e^{in\theta} - \sum_{n=-N}^{N} e^{i\theta_0} c_n(g) e^{in\theta}$$

Nästa steg är att sätta $\theta = \theta_0$.

$$S_N(\theta_0) = f(\theta_0) + \sum_{n=-N}^{N} c_{n-1}(g) e^{in\theta_0} - \sum_{n=-N}^{N} c_n(g) e^{i(n-1)\theta_0} = \{\text{skifta första summan}\} =$$

$$= f(\theta_0) + \sum_{n=-N-1}^{N-1} c_n(g) e^{i(n+1)\theta_0} - \sum_{n=-N}^{N} c_n(g) e^{i(n+1)\theta_0} =$$

$$= f(\theta_0) + c_{-N-1}(g) e^{-iN\theta_0} - c_N(g) e^{i(N+1)\theta_0} \longrightarrow f(\theta_0), \text{ då } N \longrightarrow \infty.$$

Det sökta påståendet följer.

Exempel: $f_6(\theta) = \operatorname{sgn}(\theta)$. Fourierserie: $\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1}$. Man ser att serien i diskontinuitetspunkter antar värdet $(f_6(\pi+) + f_6(\pi-))/2 = 0$

Derivator och Integraler av Fourierserier

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \overset{?}{\Longrightarrow} f'(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{in\theta}$$

eller

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \overset{?}{\Longrightarrow} f'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos n\theta - na_n \sin n\theta)$$

Sats: Om f är 2π-periodisk, kontinuerlig och styckvis glatt kan f deriveras termvis enligt ovan.

Exempel: $f_2(\theta) = |\theta|$

$f_2' = \operatorname{sgn}\theta = f_6$

$$f_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)\theta \overset{?}{\Longrightarrow} f_2' = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)\theta = f_6. \text{ Stämmer!}$$

$$f_6 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)\theta \overset{?}{\Longrightarrow} f_6' = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2k-1)\theta. \text{ Divergent! } f_6 \text{ ej kontinuerlig}$$

Bevis: $c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta$

Diskontinuitetspunkter: $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_k = \pi$

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{k} \left[f(\theta) e^{-in\theta} \right]_{x_{j-1}}^{x_j} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{k} in \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \left[f(\theta) e^{-in\theta} \right]_{-\pi}^{\pi} + inc_n(f) =$$

$$= inc_n(f)$$

Proposition: Tag f 2π-periodisk. En primitiv funktion F till f är 2π-periodisk om och endast om $F(\theta) = F(\theta+2\pi)$ för alla θ, det vill säga $\int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(\theta')\,d\theta' = 0$, eller ekvivalent $\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta = 0$. Detta innebär $c_0 = 0 = a_0$

Sats: Antag f 2π-periodisk med Fourierkoefficienter c_n, a_n, b_n, där $c_0 = a_0 = 0$. Antag att f är styckvis kontinuerlig. Om F är en primitiv funktion till f, så har F en Fourierserie $C_0 + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{in} e^{in\theta}$ respektive $\frac{A_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n}\sin n\theta - \frac{b_n}{n}\cos n\theta\right)$, där $C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\,d\theta = \frac{A_0}{2}$ beror på vilken primitiv funktion vi väljer.

Bevis: F är styckvis glatt och kontinuerlig. Om F har Fourierkoefficienter C_n ger deriverbarhetssatsen att $c_n = inC_n$. Satsen följer.

Likformig Konvergens

Antag att f är 2π-periodisk, styckvis glatt och kontinuerlig, så att $S_N(\theta) \to f(\theta)$ för alla θ. Då erhålls:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| = |c_0| + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{|n|}|nc_n| \leq |c_0| + \sqrt{\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{n\neq 0} |inc_n|^2} \quad \text{(Enligt Cauchy-Schwarz olikhet.)}$$

inc_n är Fourierkoefficienten för f' som är styckvis kontinuerlig, så Bessels olikhet ger $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |inc_n|^2 < \infty$.

Alltså $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$

Då fås $|f(\theta) - S_N(\theta)| = \left|\sum_{|n|>N} c_n e^{in\theta}\right| \leq \sum_{|n|>N} |c_n| \longrightarrow 0$ då $N \longrightarrow \infty$.

Alltså: $\sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left|f(\theta) - S_N(\theta)\right| \leq \sum_{|n|>N} |c_n| \longrightarrow 0$ då $N \longrightarrow \infty$.

Detta betyder, definitionsmässigt, att $S_N(\theta)$ konvergerar likformigt mot $f(\theta)$ i $[-\pi, \pi]$.

Sats: Om f är 2π-periodisk, styckvis glatt och kontinuerlig, så konvergerar dess Fourierserie likformigt och absolut mot $[-\pi, \pi]$.

Exempel: Funktionen f_6 har ej likformigt konvergent Fourierserie. Den är inte kontinuerlig.

Anmärkning: Analogt med satsen ovan visas Weierstrass majorantsats, vilken säger:

Om funktioner $\{f_n(x)\}$ är kontinuerliga på ett intervall I, och det finns tal $M_n \geq 0$ så att $|f_n(x)| \leq M_n$ för alla $x \in I$ och $\sum M_n < \infty$.

Då konvergerar $\sum f_n(x)$ likformigt.

2.2.4 Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

Lösning: $f_{16} = \theta^2$, $|\theta| \leq \pi$, har Fourierserien $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\theta$.

Serien är konvergent för alla θ.

$$\theta^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\theta$$

$\theta = 0$ ger $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Alltså: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

$\theta = \pi$ ger: $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n$

Alltså $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2.2.7 Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + b^2}$, $b > 0$.

Lösning:

$f_{19} = e^{b\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$, har Fourierserien $\frac{e^{2\pi b} - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{b - in}$, vilken konvergerar mot $f_{19}(\theta)$ i alla θ där f_{19} är kontinuerlig, det vill säga överallt utom i $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

I $\theta = 0$ konvergerar den mot $\frac{1}{2}\left[f_{19}(0+) + f_{19}(0-)\right] = \frac{1}{2}(1 + e^{b2\pi})$.

Tag $\theta = 0$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{b-in} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b-in} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b+in} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b+in} + \frac{1}{b-in}\right) =$

$$= \frac{1}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b}{n^2 + b^2}$$

Därför $\frac{1}{2}(1+e^{2\pi b}) = \frac{e^{2\pi b} - 1}{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b}{b^2+n^2} + \frac{1}{b}\right)$, och alltså

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^2+n^2} = -\frac{1}{2b^2} + \frac{\pi}{2b} \frac{1+e^{2\pi b}}{e^{2\pi b} - 1} = -\frac{1}{2b^2} + \frac{\pi}{2b} \frac{e^{\pi b} + e^{-\pi b}}{e^{\pi b} - e^{-\pi b}} = -\frac{1}{2b^2} + \frac{\pi}{2b} \coth \pi b$$

2.3.2 $f_{16}(\theta) = \theta^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\theta$ $\quad (f_{16}(\theta) = \theta^2 \ ; \ |\theta| \leq \pi)$

a) Integrera Fourierserien.

Lösning: $f(\theta) = \theta^2 - \frac{\pi^2}{3}$ har medelvärde 0 ; $[-\pi, \pi]$.

En primitiv funktion är $F(\theta) = \int_0^\theta f'(\theta')d\theta' = \frac{\theta^3}{3} - \frac{\pi^2}{3}\theta$

Fourierserien är:

$$\frac{A_0}{2} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin n\theta$$

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)d\theta = 0, \text{ ty } F \text{ udda.}$$

F är styckvis glatt och kontinuerlig i $(-\pi, \pi)$. Är F kontinuerlig i $\pm\pi$?

Ja, ty $F(\pi-) = 0 = F(-\pi+)$.

Alltså: $\theta^3 - \pi^2\theta = 3F(\theta) = 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin n\theta$

b) Integrera igen

Lösning: Sätt $H(\theta) = \frac{\theta^4}{4} - \frac{\pi^2\theta^2}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin n\theta$ har konstant term 0.

Så H har Fourierserie

$$\frac{\tilde{A}_0}{2} + 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos n\theta$$

$$\frac{\tilde{A}_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} H(\theta)d\theta = \ldots = -\frac{7}{60}\pi^4$$

Alltså $\theta^4 - 2\pi^2\theta^2 = -\frac{7}{15}\pi^4 + 48\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos n\theta$.

H styckvis glatt och kontinuerlig även i $\pm\pi$, ty jämn. Alltså konvergens överallt.

c) Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Lösning: Sätt $\theta = \pi$: $\quad \pi^4 - 2\pi^2 = -\frac{7}{15}\pi^4 + 48\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^4}$, och alltså:

Svar: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

2.3.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^4}$

Lösning: $f_{17}(\theta) = \theta(\pi - |\theta|) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\theta}{(2n-1)^3}, \quad |\theta| \le \pi$

f_{17} udda: $\int_{-\pi}^{\pi} f_{17}(\theta)\,d\theta = 0$

$F_{17}(\theta) = \int_0^{\theta} f_{17}(\theta')\,d\theta'$ har Fourierserien:

$$\frac{A_0}{2} - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^4}$$

F_{17} är jämn, $F_{17}' = f_{17}$

För $\theta \in (0, \pi]$ är $F_{17}(\theta) = \int_0^{\theta} \theta'(\pi - |\theta'|)\,d\theta' = \frac{\pi\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{3}$.

För $\theta \in [-\pi, 0)$ är $F_{17}(\theta) = \frac{\pi}{2}\theta^2 - \frac{|\theta|^3}{3} = \frac{\pi}{2}\theta^2 + \frac{\theta^3}{3}$

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_{17}(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F_{17}(\theta)\,d\theta = \left[\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^4}{12\pi}\right]_{\theta=0}^{\pi} = \frac{\pi^3}{12}$$

Fourierserien för F_{17} konvergerar överallt, och:

$$\frac{\pi}{2}\theta^2 - \frac{|\theta|^3}{3} = \frac{A_0}{2} - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^4}$$

Alltså: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{\pi|\theta|^3}{24} - \frac{\pi^2\theta^2}{16}$

2.3.4 $|\sin\theta| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{4n^2-1}$, $|\theta| \le \pi$, jämn, styckvis glatt, kontinuerlig. Derivera och integrera.

Lösning: För $0 \le \theta \le \pi$ är $\sin\theta = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{4n^2-1}$

Derivera: $\cos\theta = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n^2-1}\sin 2n\theta$

$f(\theta) = |\sin\theta| - \frac{2}{\pi}$ har medelvärde 0 i $[-\pi, \pi]$.

$F(\theta) = -\cos\theta - \frac{2}{\pi}\theta$ är en primitiv funktion till f i $[0, \pi]$. F fortsatt till udda funktion har en Fourierserie:

$$\frac{A_0}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n(4n^2-1)}$$

Antag f 2π-periodisk, och att f är Riemannintegrerbar.

Då existerar $\sum |c_n|^2$, och $c_n \to 0$, då $n \longrightarrow \pm\infty$.

Antag f 2π-periodisk, och att f är styckvis glatt.

Då konvergerar Fourierserien i varje punkt.

Antag f 2π-periodisk, och att f både är styckvis glatt och kontinuerlig.

Då kan Fourierserien deriveras termvis, och $\sum |c_n|$ existerar. Dessutom konvergerar Fourierserien, likformigt och absolut, mot f i $[-\pi, \pi]$.

Definition: Att $f \in C^k$ innebär att $f, f', \dots, f^{(k)}$ existerar och är kontinuerliga.

Sats: Antag att f är 2π-periodisk och Riemannintegrerbar.

(a) Om $f \in C^{k-1}$ och $f^{(k-1)}$ är styckvis glatt, så existerar $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k c_n|^2$, och därmed $n^k c_n \longrightarrow 0$, då $n \longrightarrow \pm\infty$. Det senare skrives $c_n = o(\frac{1}{n^k})$, $n \longrightarrow \pm\infty$.

(b) Omvänt om $|c_n| \le \frac{\xi}{n^{k+\alpha}}$, där ξ är en konstant, för alla n, och med $\alpha > 1$, så är $f \in C^k$.

Bevis: Sats 2.2 ger att $f^{(j)}$ har Fourierkoefficienter $(in)^j c_n$, $j = 1, \dots, k$.

Bessels olikhet ger då att $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(in)^k c_n|^2$ existerar, varpå (a) följer.

(b) visas ej.

Fourierserier i godtyckliga intervall

Antag att f har period 2ℓ, $\ell > 0$. Sätt $\theta = \frac{\pi}{\ell} x$, $|x| \le \ell \Leftrightarrow |\theta| \le \pi$, och $f(x) = g(\theta)$, $g(\theta) = f(\frac{\ell}{\pi}\theta)$.

Då blir g 2π-periodisk, och $g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$, med $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta$.

$f(x) = g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n}{\ell}x}$, samma c_n.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\frac{\pi n}{\ell}x}\, dx = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\frac{\pi n}{\ell}x}\, dx.$$

På samma sätt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum \left(a_n \cos \frac{\pi n}{\ell} x + b_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x\right), \text{ där}$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n}{\ell} x \, dx, \text{ och}$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x \, dx.$$

Om f är jämn blir $b_n = 0$, $a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n}{\ell} x \, dx$.

Om f är udda blir $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x \, dx$.

Om f är en given funktion definierad bara i $[0, \ell]$, kan f fortsättas till en udda funktion f_{udda} i $[-\ell, \ell]$, genom $f_{udda}(x) = -f(-x)$, $-\ell \leq x \leq 0$. Fortsätt sedan f_{udda} till en 2ℓ-periodisk funktion f_{udda}.

Då kan f_{udda} utvecklas i en Fourierserie med enbart sinustermer, så att

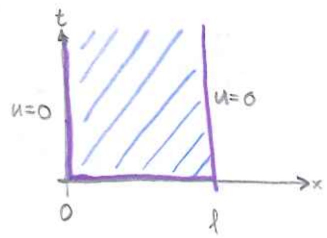
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x, \quad 0 \leq x \leq \ell. \qquad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x \, dx.$$

Analogt om f utvidgas till $f_{jämn}$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n}{\ell} x, \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n}{\ell} x \, dx.$$

Vågekvationen

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}, \quad c > 0 \qquad 0 < x < \ell, \; t > 0$$



$u(0, t) = u(\ell, t) = 0$

$u(x, 0) = f(x)$

$u'_t(x, 0) = g(x)$ $\qquad 0 \leq x \leq \ell$

Som förut, sök $u = T(t) X(x)$. Då erhålles $T''(t) = c^2 \lambda T(t)$ och $X''(x) = \lambda X(x)$, $X(0) = X(\ell) = 0$.

Också som förut fås $\lambda < 0$, $\lambda = -\nu^2$, $\nu = \frac{\pi n}{\ell}$ och $X(x) = \sin \frac{\pi n}{\ell} x$, $\lambda = -\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2$, $n \in \mathbf{N}$.

$$T''(t) = -\left(\frac{c\pi n}{\ell}\right)^2 T(t)$$

$$T(t) = a \cos \frac{c\pi n}{\ell} t + b \sin \frac{c\pi n}{\ell} t$$

Ansätt $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{\ell} x \left(a_n \cos \frac{c\pi n}{\ell} t + b_n \sin \frac{c\pi n}{\ell} t\right)$

Initialvillkoren ger $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x$.

$$u'_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cdot \frac{cn\pi}{\ell} \left(-a_n \sin \frac{cn\pi}{\ell} + b_n \cos \frac{cn\pi}{\ell} \right).$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{\ell} b_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x$$

$g(x)$ är derivatan av $-c \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{\pi n}{\ell} x = G(x)$. Alltså $G'(x) = g(x)$.

De trigonometriska produktformlerna ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left(\sin \frac{\pi n}{\ell}(x+ct) + \sin \frac{\pi n}{\ell}(x-ct) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2} \left(\cos \frac{\pi n}{\ell}(x-ct) - \cos \frac{\pi n}{\ell}(x+ct) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct) \right) + \frac{1}{2c}\left(G(x+ct) - G(x-ct) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi$$

Slutligen: $u(x,t) = \dfrac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \dfrac{1}{2c} \displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi$, d'Alamberts formel.

Fouriertransformen

Definition: Nedan är f en funktion, och I ett intervall (eventuellt $\mathbf{R}$).

$$L^1 = \left\{ f : \int_I |f(x)|\, dx \text{ existerar} \right\}$$

$$L^2 = \left\{ f : \int_I |f(x)|\, dx \text{ existerar} \right\}$$

Exempel: $\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1([0,1])$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin L^2([0,1])$

$\frac{1}{1+x^2} \in L^1(\mathbf{R})$ och $\frac{1}{1+x^2} \in L^2(\mathbf{R})$

$\frac{1}{1+|x|} \notin L^1(\mathbf{R})$ och $\frac{1}{1+|x|} \in L^1(\mathbf{R})$

FALTNING

Antag f och g två funktioner på $\mathbf{R}$.

$$(f*g)(x) = (g*f)(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy = \int f(y)g(x-y)\,dy$$

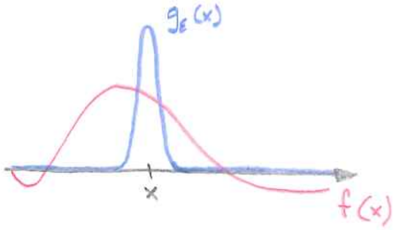
Definition: $L^1(\Omega) = \{f : \int_\Omega |f(x)|\,dx \text{ existerar}\}$

Norm: $\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|\,dx$

$$(f * g)(x) = \int_\Omega f(x-y)g(y)\,dy$$

Ta $g \in L^1$, $g \geq 0$, $\int g(x)\,dx = 1$.

För $\varepsilon > 0$, inför $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.



Sats: Antag att g är begränsad, och att $x^2 g(x) \longrightarrow 0$, då $x \longrightarrow \pm\infty$, så att $g \in L^1(\mathbb{R})$, och att $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 1$. Låt $f \in L^1(\mathbb{R})$.
Om f är kontinuerlig i punkten x gäller $(f * g_\varepsilon)(x) \longrightarrow f(x)$, då $\varepsilon \longrightarrow 0$.
Om f har ändliga vänster- och högergränsvärden i x, och g är en jämn funktion, gäller $(f * g_\varepsilon)(x) \longrightarrow \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$, $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Diracs deltafunktion

$\int \varphi(x)\delta(x)\,dx = 0$ "för alla" φ

$(f * \delta)(x) = \int f(x-y)\delta(y)\,dy = f(x)$

$f * g_\varepsilon \longrightarrow f = f * \delta$

$g_\varepsilon \longrightarrow \delta$

Bevis av satsen: Antag x en kontinuitetspunkt.

$$(f * g_\varepsilon)(x) = \int f(x-y)\frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy = \int f(x - \varepsilon z)\, g(z)\,dz$$

$$(f * g_\varepsilon)(x) - f(x) = \int \big(f(x-\varepsilon z) - f(x)\big) g(z)\,dz = \int_{|z|<\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \big(f(x-\varepsilon z) - f(x)\big) g(z)\,dz + \int_{|z|>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} f(x-\varepsilon z) g(z)\,dz -$$

$$- \int_{|z|>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} f(x) g(z)\,dz \overset{\text{def}}{=} I_1, I_2, I_3$$

$$|I_1| \leq \int_{|z|<\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} |f(x-\varepsilon z) - f(x)|\,|g(z)|\,dz \leq \sup_{|z|<\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} |f(x-\varepsilon z) - f(x)| \int_{|z|<\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} |g(z)|\,dz \leq \sup_{|z|<\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} |f(x-\varepsilon z) - f(x)| \cdot \|g\|_1 \longrightarrow 0,\ \varepsilon \longrightarrow 0,$$

$$|I_2| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-\varepsilon z)|\,dz \sup_{|z|>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} |g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\,dy \sup_{|z|>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} |g(z)| \leq \|f\|_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \sup_{|z|>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} |g(z)| \longrightarrow 0,\ \varepsilon \longrightarrow 0,$$

$$|I_3| \leq |f(x)| \int_{|z|>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} |g(z)|\,dz \longrightarrow 0,\ \varepsilon \longrightarrow 0$$

Om f har vänster- och högergränsvärden i x:

Kan anta $x=0$. Sätt $f(0)=\frac{1}{2}(f(0+)+f(0-))$

$$(f*g_\varepsilon)(0)=\int f(y)g_\varepsilon(y)\,dy = \int f(y)g_\varepsilon(-y)dy = \int f(-y)g_\varepsilon(y)dy$$

$$(f*g_\varepsilon)(0)=\int \frac{f(y+)+f(y-)}{2}g_\varepsilon(y)dy = (f_s*g_\varepsilon)(0),$$ där $f_s(x)=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ är

kontinuerlig i 0, med värde $f_s(0)=\frac{f(0+)+f(0-)}{2}$

Enligt ovan fås $(f_s*g_\varepsilon)(0)\longrightarrow \frac{f(0+)+f(0-)}{2}$

Definition: Antag att $f\in L^1(\mathbb{R})$. Fouriertransformen av f definieras som funktionen

$$\hat{f}(\xi)=\mathcal{F}[f(x)](\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx.$$

Detta skrivs även $f\supset\hat{f}$.

$$|\hat{f}(\xi)|\le\int|f(x)|\cdot 1\,dx = \|f\|_1$$

$\hat{f}$ är kontinuerlig om f är det.

Sats: Antag att $f\in L^1$. Då är följande påståenden sanna:

(a) $\mathcal{F}[f(x-a)](\xi)=e^{-iax}\hat{f}(\xi)$

$\mathcal{F}[e^{iax}f(x)](\xi)=\hat{f}(\xi-a)$

(b) $f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}f(\frac{x}{\varepsilon})$ har Fouriertransformen

$\hat{f}_\varepsilon(\xi)=\hat{f}(\varepsilon\xi)$

(c) Om $f\in L^1$ är styckvis glatt och kontinuerlig, och $f\in L^1$, så

$\hat{f'}(\xi)=i\xi\hat{f}(\xi)$

Om f och $xf\in L^1$, så $i\frac{d}{dx}\hat{f}(\xi)=\mathcal{F}$

(d) Om $f,g\in L^1$ så $\mathcal{F}[f*g]=\hat{f}\hat{g}$

Bevis:

c) $\widehat{f'}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ix\xi}\,d\xi = \left[f(x)e^{-ix\xi}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, i\xi\, e^{-ix\xi}\,dx = i\xi\hat{f}(\xi)$

d) $\mathcal{F}[f*g](\xi) = \iint f(x-y)\,g(y)\,dy\, e^{-ix\xi}\,dx = \iint f(x-y)e^{-i(x-y)\xi}\,dx\; g(y)\,e^{-iy\xi}\,dy =$

$= \iint f(x')e^{-ix'\xi}\,dx'\; g(y)e^{-iy\xi}\,dy = \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi)$

Exempel: $f = \chi_{(-a,a)} = \Theta(x+a) - \Theta(x-a)$, $\quad \Theta$ = Heavysides stegfunktion $= \Theta_{\mathbb{R}_+}$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{-i\xi}\left(e^{-ia\xi} - e^{ia\xi}\right) = \frac{2\sin a\xi}{\xi}$$

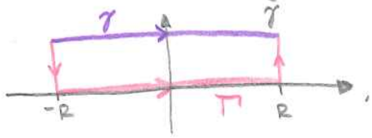
$$\mathcal{F}[e^{-a|x|}] = \int_{-a}^{a} e^{-a|x|}e^{-ix\xi}\,dx = \int_{0}^{\infty} e^{-ax-ix\xi}\,dx + \int_{-\infty}^{0} e^{ax-ix\xi}\,dx = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\xi)x}\,dx + \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\xi)x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$$

$$f(x) = e^{-\frac{ax^2}{2}}$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}}e^{-ix\xi}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}\left(x^2+2i\frac{\xi}{a}x\right)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}\left(x+\frac{i\xi}{a}\right)^2 - \frac{a}{2}\frac{\xi^2}{a^2}}\,dx = e^{-\frac{\xi^2}{2a}}\int_{\gamma} e^{-\frac{a}{2}z^2}\,dz,$$

där $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = \frac{\xi}{a}\}$. Inför då Γ_R som



$$\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2a}} \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} e^{-\frac{a}{2}z^2}\,dz = \lim_{R\to\infty} e^{-\xi^2/(2a)} \int_{-R}^{R} e^{-\frac{a}{2}x^2}\,dx =$$

$$= e^{-\frac{\xi^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}\,dx = e^{-\frac{\xi^2}{2a}} \sqrt{} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x')^2}\,dx' = \sqrt{}\; e^{-\frac{\xi}{2a}}$$

Fouriers Inversionsformel

Antag $f \in L^1(\mathbb{R})$, och $l \in \mathbb{R}$ stort.

Fourierserieutveckla f i $(-l, l)$. Då erhålles

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n}{l}x}, \quad c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{\pi n}{l}x}\,dx \approx \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\frac{\pi n}{l}x}\,dx = \frac{1}{2l}\hat{f}\left(\frac{\pi n}{l}\right)$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{\pi n}{l}\right)e^{i\frac{\pi n}{l}x} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{l}\hat{f}\left(\frac{\pi n}{l}\right)e^{i\frac{\pi n}{l}x} \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi$$

Alltså kan det förmodas att

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi \quad , \quad \text{om } \hat{f} \in L^1$$

FOURIERS INVERSIONSFORMEL

"Sats": Antag $f, \hat{f} \in L^1$. Då

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi.$$

Försök till bevis:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy\xi}\, dy\right) e^{ix\xi}\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(y-x)\xi}\, d\xi\, dy, \text{ divergerar! } (\text{Ty } |e^{-i(y-x)\xi}| = 1)$$

För att detta ska fungera, skjut in en faktor $e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}$.

Bevis: $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}} e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}} e^{-i(y-x)\xi}\, d\xi\, dy$$

Den inre integralen är Fouriertransformen av funktionen $t \longmapsto e^{-\frac{\varepsilon^2 t^2}{2}}$ i punkten $\xi = y - x$, det vill säga

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}} e^{-i(y-x)\xi}\, d\xi = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon} e^{-\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)^2/2}.$$

Alltså erhålles, för hela integralen,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\varepsilon} e^{-\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)^2/2}\, dy = f * \phi_\varepsilon(x), \text{ där } \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \text{ så att } \phi \in L^1,$$

$\phi \geq 0$, ϕ begränsad, och $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\, dt = 1$

Tidigare resultat (sidan 19) ger nu att $f * \phi_\varepsilon \longrightarrow f(x)$, då $\varepsilon \longrightarrow 0$, om $f \in L^1$, kontinuerlig i x.

Sats (Fouriers inversionsformel): Antag att $f \in L^1$, och att f är styckvis kontinuerlig. Då $\varepsilon \longrightarrow 0$ konvergerar $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}} e^{ix\xi}\, d\xi$ mot $f(x)$ i kontinuitetspunkter, och mot $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ i språngpunkter. Om dessutom $\hat{f} \in L^1$ så är f kontinuerlig (efter ändring i ändligt många punkter), och $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$, för alla x.

Det enda som kvarstår att visa är det sista. För detta krävs en sats, vilken presenteras utan bevis.

Sats (Lebesgues dominerade konvergenssats):

Antag att $h_n \in L^1$, $n \in \mathbf{N}$, att $h_n \longrightarrow h$ i varje punkt, och att det existerar en funktion $\phi \in L^1$, $\phi \geq 0$, sådan att $\phi \geq |h_n|$ för alla x.

Då $\int_I h_n(x)dx \longrightarrow \int_I h(x)dx$, då $n \longrightarrow \infty$, där I är ett intervall eller segment, eventuellt hela $\mathbf{R}$.

Satsen gäller även om n är en kontinuerlig parameter.

Fouriers inversionsformel följer nu, ty tag

$$\phi(x) = |\hat{f}(\xi)|.$$

$$\left|\hat{f}(\xi)e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}e^{ix\xi}\right| \leq \left|\hat{f}(\xi)\right| = \phi(x)$$

Får $\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}e^{ix\xi}\,d\xi \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi \longrightarrow f(x)$ i kontinuitetspunkter x.

Notera att följande påståenden nu följer:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\hat{f}(-x)]$$

$$\mathcal{F}^{-1}[h(x)] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[h(-x)]$$

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]] = 2\pi f(-x)$$

Dessutom $\hat{f} * \hat{g} = 2\pi\mathcal{F}[fg]$, ty

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f} * \hat{g}] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\hat{f} * \hat{g}\,(-x)] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\hat{f}(-x)]\,\mathcal{F}[\hat{g}(-x)] = 2\pi f(x)g(x).$$

Påståendet följer om Fouriertransformen av båda sidor tas

Fouriertransformen på L^2

$L^2 = \{f : \int |f(x)|^2 dx$ existerar$\}$

Skalärprodukt: $\langle f, g \rangle = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx$

Norm: $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f \rangle} = \sqrt{\int |f(x)|^2 dx}$

Cauchy-Schwarz olikhet: $|\langle f, g\rangle| = \|f\|_2 \|g\|_2$

Triangelolikheten: $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$

Antag $f, g \in L^1$, $\hat{f}, \hat{g} \in L^1$, f, g styckvis kontinuerliga. Då är $f, g, \hat{f}, \hat{g}$ begränsade, och därmed i L^2, ty $\int |f(x)|^2 dx \leq \sup|f| \int |f(x)|\,dx < \infty$.

Bilda $\langle f, g \rangle = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int f(x) \int \overline{\hat{g}(\xi) e^{-ix\xi}}\,d\xi\,dx = \frac{1}{2\pi}\int \int f(x) e^{-ix\xi}\,dx\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi =$

$= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$

Speciellt, om $g = f$, erhålles

$$\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2 .$$

Sats (Plancherels sats): Fouriertransformen kan utvidgas till en inverterbar avbildning $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$, vars invers ges av $\mathcal{F}^{-1}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f(-x)]$, $f \in L^2$. Man har $\langle f, g \rangle$ för $f, g \in L^2$, och därmed $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$.
$\mathcal{F}$ är alltså en bijektion på L^2.

Exempel: Vad är $\frac{\sin ax}{x}$? $\quad \left(\frac{\sin ax}{x} \in L^2, \notin L^1\right)$

$\mathcal{F}\left[\frac{\sin ax}{x}\right](\xi) = 2\pi \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin ax}{x}\right](-\xi)$, och $\mathcal{F}[\chi_{(-a,a)}](\xi) = 2\frac{\sin a\xi}{\xi}$, så

$\mathcal{F}\left[\frac{\sin ax}{x}\right](\xi) = \pi \chi_{(-a,a)}(\xi)$

VÄRMELEDNINGSEKVATIONEN I ETT HALVPLAN

$u_t' = \lambda u_{xx}'', \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$

$u(x,0) = f(x)$

Fouriertransformera u i x-variabeln:

$$\hat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-ix\xi} d\xi$$

$$\hat{u}_{xx}'' = (i\xi)^2 \hat{u} = -\xi^2 \hat{u}$$

Hoppas vi

$$\hat{u}_t'(\xi,t) = \int u_t'(x,t) e^{-ix\xi} dx \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial t} \int u(x,t) e^{-ix\xi} dx = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi,t)$$

Differentialekvationen blir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi,t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi,t) k$$

Initialvillkor: $\hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi)$

Fixera ξ: $\hat{u}(\xi,t) = Ce^{-k\xi^2 t}$, med $C = \hat{f}(\xi)$.

Alltså: $\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi) e^{-k\xi^2 t}$

Inversionsformeln:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) e^{-k\xi^2 t} e^{ix\xi} d\xi$$

Men, sedan tidigare, $\mathcal{F}[f * g] = \hat{f}\hat{g}$, och $\mathcal{F}[e^{-\frac{ax^2}{2}}] = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}} \Rightarrow e^{-k\xi^2 t} = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right].$

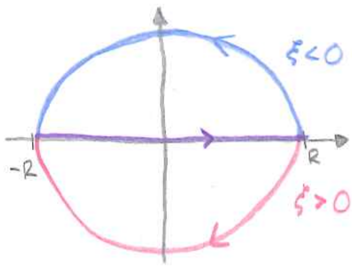
Alltså $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} f * e^{-\frac{x^2}{4kt}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy$

7.2.9 **Sökt:** $\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^4+1}\right]$.

Lösning: $\frac{1}{x^4+1} \in L^1$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^4+1}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{x^4+1}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iz\xi}}{z^4+1}\,dz$$

Integralens värde ges av Residykalkyl:



Nämnarens nollställen: $\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$, $\frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$.

Slutligen: $\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^4+1}\right] = \ldots = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)$, $\xi>0$

För $\xi<0$? Välj $|\xi|$ istället.

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^4+1}\right] = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{|\xi|}{\sqrt{2}} + \sin\frac{|\xi|}{\sqrt{2}}\right)$$

7.2.13 a) **Sökt:** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at \sin bt}{t^2}\,dt$

Plancherel: $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx$, $\quad f,g \in L^2$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin a\xi}{\xi}\right] = \frac{1}{2}\chi_{(-a,a)}, \qquad \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin b\xi}{\xi}\right] = \frac{1}{2}\chi_{(-b,b)}$$

Alltså: $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at \sin bt}{t^2}\,dt = \frac{2\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(-a,a)}\chi_{(-b,b)}\,dt = \frac{\pi}{2}\int_{-\min(a,b)}^{\min(a,b)} dt = \pi\min(a,b)$$

b) **Sökt:** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}\,dt$

Lösning: $\mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2+a^2}\right] = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}$, $\mathcal{F}\left[\frac{t}{t^2+a^2}\right] = \frac{i\pi}{a}\frac{d}{d\xi} e^{-a|\xi|} = \frac{i\pi}{a} e^{-a|\xi|}(-\operatorname{sgn}\xi)a =$

$= -i\pi \operatorname{sgn}\xi \; e^{-a|\xi|}$

Alltså: $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2+a^2}\cdot\overline{\frac{t}{t^2+b^2}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(i\pi e^{-a|\xi|}\operatorname{sgn}\xi\right)\overline{\left(i\pi e^{-b|\xi|}\operatorname{sgn}\xi\right)}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(i\pi e^{-a|\xi|}\operatorname{sgn}\xi\right)\left((-i)\pi e^{-a|\xi|}\operatorname{sgn}\xi\right)d\xi = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+b)|\xi|}\,d\xi = \pi\int_0^{\infty} e^{-(a+b)\xi}\,d\xi =$$

$$= \frac{\pi}{a+b}$$

EÖ 13 **Sökt:** $u'(t) + 2u + e^{-2t}\int_{-\infty}^{t} e^{2\tau} u(\tau)\,d\tau = \delta(t)$

Lösning: $$e^{-2t}\int_{-\infty}^{t} e^{2\tau}u(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)}u(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)}\chi_{\{\tau:\tau<t\}}u(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)}\theta(t-\tau)u(\tau)\,d\tau = \left\{\Psi(s) = e^{-2s}\theta(s)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$$

Alltså: $u'(t) + 2u(t) + (\Psi * u)(t) = \delta(t)$

Fouriertransformera ekvationen:

$$i\xi\hat{u}(\xi) + 2\hat{u}(\xi) + \hat{\Psi}(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{\delta}(\xi)$$

$$\hat{\delta}(\xi) = 1,\quad \hat{\Psi}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-2x}e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{2+i\xi}$$

Ekvationen blir

$$\left(i\xi + 2 + \frac{1}{2+i\xi}\right)u(\xi) = 1.$$

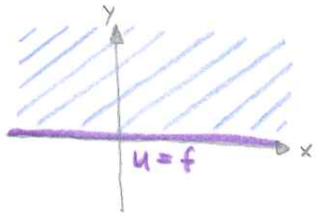
$$\hat{u}(\xi) = \frac{2+i\xi}{1+(2+i\xi)^2} = \frac{2+i\xi}{(2+i\xi+i)(2+i\xi-i)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2+i\xi+i} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2+i\xi-i}$$

Betrakta $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(2\pm i)x}e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{2\pm i+i\xi}$, vilket ger $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2\pm i+i\xi}\right] = e^{-(2\pm i)x}\theta(x)$.

$$u(t) = \tfrac{1}{2}e^{-(2+i)t}\theta(t) + \tfrac{1}{2}e^{-(2-i)t}\theta(t) = \theta(t)e^{-2t}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) = \theta(t)e^{-2t}\cos t$$

Svar: $u(t) = \theta(t)e^{-2t}\cos t$

Exempel: Lös $\nabla^2 u = 0$, $u = u(x,y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, med randvärden $u(x,0) = f(x)$ (f känd).



Tag Fouriertransformen $\hat{u}(\xi, t)$ av u i x-variabeln. Ekvationen blir

$$-\xi^2 \hat{u}(\xi, y) + \hat{u}''_{yy}(\xi, y) = 0, \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi).$$

Fixera ξ: $\hat{u}(\xi, y) = Ae^{\xi y} + Be^{-\xi y}$, $A = A(\xi)$, $B = B(\xi)$.

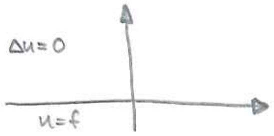
För $\xi > 0$ växer $e^{\xi y}$ snabbt då y växer. Förkastas! Sätt $A(\xi) = 0$ för $\xi > 0$, och behåll bara $B(\xi)e^{-\xi y}$. Omvänt för $\xi < 0$, behåll $A(\xi)e^{\xi y}$.

Sammanfattat $\hat{u}(\xi, y) = C(\xi)e^{-|\xi| y}$.

Randvärdet ger $C(\xi) = \hat{f}(\xi)$.

$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi)e^{-|\xi| y}$

$u(x,t) = f * \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{\pi} \int \frac{f(x')}{(x-x')^2 + y^2} dx'$



$\Delta = \nabla^2$

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\frac{y}{t^2+y^2}\,dt,$$ ej en entydig lösning. (Se $u(x,y)=y$)

Cosinus- och Sinustransformerna

Om $f \in L^1(\mathbf{R})$ är jämn är $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos x\xi - i\sin x\xi)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x\xi\,dx = 2\int_0^{\infty} f(x)\cos x\xi\,dx$

Alltså $\hat{f}$ jämn. Detta motiverar följande definition:

$$\mathcal{F}_c[f(x)] \overset{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} f(x)\cos x\xi\,dx$$ – Cosinustransformen

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \mathcal{F}_c[f(x)]\cos x\xi\,d\xi$$ – Inversionsformel

På samma sätt:

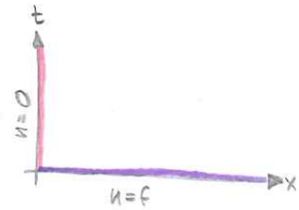
$$\mathcal{F}_s[f(x)] \overset{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} f(x)\sin x\xi\,dx$$ – Sinustransformen

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \mathcal{F}_s[f(x)]\sin x\xi\,d\xi$$ – Inversionsformel

Plancherel: $\int_0^{\infty} |\mathcal{F}_c(\xi)|^2\,d\xi = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} |f(x)|^2\,dx$, och analogt för sinustransformen

Exempel: $u_t' = k u_{xx}''$, $x>0$, $t>0$

$u(0,t) = 0$
$u(x,0) = f(x)$, $x>0$



Sätt $U(\xi,t) = \mathcal{F}_s[u(x,t)] = \int_0^{\infty} u(x,t)\sin x\xi\,dx$

För $u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} U(\xi,t)\sin x\xi\,d\xi$, så att $u(0,t)=0$ automatiskt.

Ekvationen blir $U_t'(\xi,t) = -k\xi^2 U(\xi,t)$.

Initialvillkor: $U(\xi,0) = \mathcal{F}_s[f(x)](\xi)$

För ξ fixt: $U(\xi,t) = Ce^{-k\xi^2 t}$, $C = C(\xi)$

Alltså $C(\xi) = U(\xi, 0) = \mathcal{F}_s[f(x)](\xi)$.

$$U(\xi,t) = \mathcal{F}_s[f(\xi)]\, e^{-k\xi^2 t}$$

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathcal{F}_s[f(x)](\xi)\, e^{-k\xi^2 t} \sin x\xi \, d\xi$$

Hade randvillkoret varit $u_x'(0,t) = 0$, hade Cosinustransformen varit lämplig.

Diskret och Snabb Fouriertransform

Istället för funktioner f har vi ändliga följder $a = (a_0, \dots, a_{N-1}) = \{a_n\}_{n=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$ av komplexa tal. I vektorrummet $\mathbb{C}^N$ har vi skalärprodukten:

$$\langle a, b\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \overline{b_n}$$

Sök en ortogonalbas i $\mathbb{C}^N$, bestående av följder av typ $\{e^{iqn}\}_{n=1}^{N-1}$.

När är e^{iqn} och $e^{iq'n}$ ortogonala?

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{iqn}\, \overline{e^{iq'n}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(q-q')n} = \frac{1 - e^{i(q-q')N}}{1 - e^{i(q-q')}}.$$

Detta är noll om $e^{i(q-q')N} = 1$, det vill säga $(q-q')N \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Välj $q = \frac{2\pi}{N} m$, $m = 0, \dots, N-1$.

Välj q' analogt, $q' = \frac{2\pi}{N} m'$, $m' = 0, \dots, N-1$

Detta förutsätter att $q - q' \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, vilket gäller för våra val, om $q \neq q'$.

Vektorerna $e_m = \left\{e^{i2\pi\frac{mn}{N}}\right\}_{n=0}^{N-1}$, med $m = 0, \dots, N-1$ är parvis ortogonala, och alltså linjärt oberoende. Alltså utgör e_m en ortogonalbas för $\mathbb{C}^N$. Dock är basen ej ortonormal:

$$\|e_m\|^2 = \langle e_m, e_m\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi\frac{mn}{N}} e^{-i2\pi\frac{mn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

Varje $a \in \mathbb{C}^N$ kan utvecklas i basen.

$$a = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e_m, \quad c_m = \frac{1}{N}\langle a, e_m\rangle, \text{ ty } \langle a, e_k\rangle = c_k\langle e_k, e_k\rangle = c_k N.$$

Följden $\langle a, e_m\rangle$ kallas den diskreta Fouriertransformen av a, och betecknas $\hat{a}$.

Man skriver $\hat{a}_m = \langle a, e_m \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-i2\pi\frac{mn}{N}}$

$a = \sum_{n=0}^{N-1} c_m e_m$ ger:

$$a_n = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{N} \hat{a}_m e^{i2\pi\frac{mn}{N}}$$

$$\|a\|^2 = \left\| \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \langle a, e_m \rangle e_m \right\|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} |\langle a, e_m \rangle|^2 \|e_m\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\hat{a}_m|^2 \qquad \text{(Parsevals formel.)}$$

Antag att f är en hygglig funktion på $\mathbf{R}$, med sin huvuddel i intervallet $[0, \Omega]$. Då är f nästan bestämd av värdena $a_n = f(\frac{n}{N}\Omega)$, $n = 0, \dots, N-1$.

$$\hat{f}\left(\frac{2\pi}{\Omega} m\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\frac{2\pi m}{\Omega} x}\, dx \approx \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Omega}{N} f\left(\frac{n}{N}\Omega\right) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} = \frac{\Omega}{N} \hat{a}_m$$

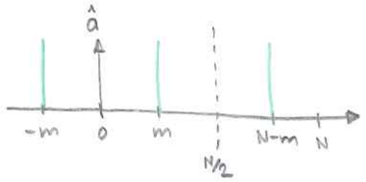
$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m e^{i2\pi\frac{mn}{N}} = \frac{1}{N} \frac{N}{\Omega} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{f}\left(\frac{2\pi}{\Omega} m\right) e^{i2\pi\frac{m}{n}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{2\pi}{\Omega} \hat{f}\left(\frac{2\pi}{\Omega} m\right) e^{i\frac{2\pi}{\Omega} m \frac{\Omega}{N} n} \approx \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi\frac{\Omega}{N} n}\, d\xi =$$

$$= f\left(\frac{\Omega}{N} n\right)$$

Exempel: $f(x) = \cos \lambda x$ ger

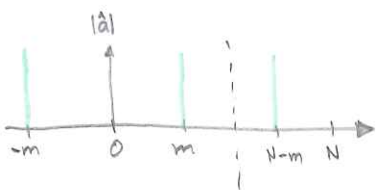
$$a_n = \cos \frac{\lambda\Omega}{N} n = \cos \frac{2\pi}{N} mn, \text{ om } \lambda\Omega = 2\pi m.$$

$$a_n = \frac{1}{2} e^{i2\pi\frac{mn}{N}} + \frac{1}{2} e^{-i2\pi\frac{mn}{N}} = \frac{1}{2} e^{i2\pi\frac{mn}{N}} + \frac{1}{2} e^{i2\pi\frac{(N-m)n}{N}} = a = \frac{1}{2} e_m + \frac{1}{2} e_{N-m}$$



$\hat{a}$ jämn kring $N/2$

Motsvarande, $\sin \lambda x$ ger:



Snabb Fouriertransform (FFT)

Beräkning av $\hat{a}$ kräver $\sim N^2$ elementära operationer. Om $N = 2^k$ finns en genväg.

Antag $N = 2N_1$, och skriv

$$\hat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-i2\pi \frac{mn}{N}} = \sum_{n=0}^{N_1-1} a_{2n} e^{-i2\pi \frac{m2n}{N}} + \sum_{n=0}^{N_1-1} a_{2n+1} e^{-i2\pi \frac{m(2n+1)}{N}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N_1-1} a_{2n} e^{-i2\pi \frac{mn}{N_1}} + e^{-i2\pi \frac{m}{N}} \sum_{n=0}^{N_1-1} a_{2n+1} e^{-i2\pi \frac{mn}{N_1}}$$

Snabb Fouriertransform

$a = \{a_n\}_{n=1}^{N}$, $N = 2N_1$, $N_1 \in \mathbf{N}$

$$\hat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-i2\pi\frac{mn}{N}} = \sum_{n=0}^{N_1-1} a_{2n} e^{-i2\pi\frac{mn}{N_1}} + e^{-i2\pi\frac{m}{N}} \sum_{n=0}^{N_1-1} a_{2n+1} e^{-i2\pi\frac{mn}{N_1}}$$

Inför $a^{(i)} = \{a_{2n}\}_{n=0}^{N_1-1}$, $a^{(u)} = \{a_{2n+1}\}_{n=0}^{N_1-1}$

$$\hat{a}_m = (\widehat{a^{(i)}})_m + e^{-i2\pi\frac{m}{N}} (\widehat{a^{(u)}})_m$$

Antal multiplikationer: $2N_1^2 + N = \frac{N^2}{2} + N$

Om $N_1 = 2N_2$, upprepa:

$$2\left(\frac{N_1^2}{2} + N_1\right) + N = \frac{N^2}{4} + 2N$$

Om $N = 2^k$ får man efter k steg:

$$\frac{N^2}{2^k} + kN = 2^k + k2^k = N + N\log_2 N = N(\log_2 N + 1) \approx N\log_2 N$$

Alltså har vi gått från N^2 till $N\log_2 N$ multiplikationer, vilket är en stor förbättring. Detta är den snabba Fouriertransformen, FFT.

Signalbehandling, Dynamiska System

Antag $f = f(t)$ en signal. $\hat{f}$ anger dess frekvenser.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

Energin: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \, d\omega$

Ofta är bandbredden begränsad, det vill säga $\hat{f}(\omega) = 0$ utanför något intervall.

Definition: Ett linjärt dynamiskt system är en linjär avbildning $S: f(t) \longmapsto g(t)$, där S är definierad i någon lämplig mängd.

S kallas tidsinvariant om $S: f(t) \longmapsto g(t) \Rightarrow S: f(t-t_0) \longmapsto g(t-t_0)$.

Inför translationsoperatorn $\tau_a f(t) = f(t-a)$.

Tidsinvarians betyder $S(\tau_a f) = \tau_a S(f)$ $\forall f$, eller ekvivalent att $\tau_a S = S\tau_a$, det vill säga S och τ_a kommuterar.

Exempel: Faltning med en fix funktion h ger ett tidsinvariant dynamiskt system, ty

$S(f) = f * h$ medför

$S(\tau_a f)(t) = (\tau_a f) * h(t) = \int \tau_a f(t-s) h(s)\, ds = \int f(t-s-a) h(s)\, ds = (f * h)(t-a) = \tau_a S(f)$,

så att $S\tau_a = \tau_a S$.

Observera att $(f*h)(t) = \int f(s) h(t-s) ds = \int f(s) \tau_s h(t)\, ds$.

$(f*h)(t) = \int f(s) \tau_s h(t) ds$

Omvänt ges varje tidsinvariant dynamiskt system av faltning med någon h.

$h = S\delta$

$f = f * \delta = \int f(s) \tau_s \delta\, ds$

Antag nu att S är tidsinvariant:

$Sf = S \int f(s) \tau_s \delta\, ds = \int f(s) S \tau_s \delta\, ds = \int f(s) \tau_s S \delta\, ds = f * S\delta = f * h$

h kallas impulssvaret för S.

Fouriertransform: $\widehat{Sf} = \hat{f} \hat{h}$

$\hat{h}$ kallas systemfunktionen:

$$\hat{h} = \frac{\widehat{Sf}}{\hat{f}} = \frac{\widehat{\text{utsignal}}}{\widehat{\text{insignal}}}$$

$$Sf(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega) \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Systemet kallas kausalt $Sf(t)$ för varje t är bestämt av f:s värden i det halvöppna intervallet $(-\infty, t]$.

$Sf(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) h(s)\, ds$, så S är kausalt om och endast om $h(s) = 0$ för $s < 0$, det vill säga om h bara lever på $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$

S kallas stabilt om $h \in L^1$. Detta ger kontroll på energin:

$$\|Sf\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{Sf}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{h}\hat{f}\|_2^2 \le \frac{1}{2\pi} \|h_1\|_1^2 \|\hat{f}\|_2^2 = \|h\|_1^2 \|f\|_2^2$$

Alltså utenergin $\le C \cdot$ inenergin.

Insignalen $f(t) = e^{i\omega_0 t}$ ger utsignal $(f*h)(t) = \int h(s) e^{i\omega_0 (t-s)} ds = e^{i\omega_0 t} \hat{h}(\omega_0)$

Om h är reellvärd är $h * \cos\omega_0 t = h * \operatorname{Re}[e^{i\omega_0 t}] = \operatorname{Re}[h * e^{i\omega_0 t}] = \operatorname{Re}[\hat{h}(\omega_0) e^{i\omega_0 t}] =$
$= \hat{h}(\omega_0) \cos \omega_0 t$ om dessutom $\hat{h}$ är reellvärd.

Ibland är insignalen periodisk, och kan skrivas $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ (Om perioden är 2π).
Då blir utsignalen $S(f(t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \hat{h}(n) e^{int}$.

Exempel: Om insignalen $x(t)=\Theta(t)e^{-2t}$ ger utsignal $y(t)=\Theta(t)e^{-3t}$, vad är h, $\hat{h}$?

Vi får $\hat{x}(\omega)=\frac{1}{2+i\omega}$, $\hat{y}(\omega)=\frac{1}{3+i\omega}$.

Alltså $\hat{h}(\omega)=\frac{2+i\omega}{3+i\omega} = 1-\frac{1}{3+i\omega}$, och därför

$h(t)=\delta(t)-\Theta(t)e^{-3t}$

Systemet är kausalt och stabilt.

Exempel: Om systemfunktionen är $\hat{h}(\omega)=\chi_{(-\alpha,\alpha)}(\omega)$, så är impulssvaret icke-kausalt:
Detta S kallas LP_α, för lågpassfilter, och impulssvaret h är

$h(t)=\mathcal{F}^{-1}[\chi_{(-\alpha,\alpha)}(\omega)](t) = \frac{\sin \alpha t}{\pi t}$, vilket ej är kausalt.

$LP_\alpha(\delta(t-a)) = \frac{\sin \alpha(t-a)}{\pi(t-a)}$

Samplingssatsen

Antag att en signal $f\in L^2(\mathbf{R})$ har bandbredd högst α, det vill säga $\hat{f}(\omega)=0$ om $|\omega|>\alpha$.
Då är f bestämd av den samplade signalen $\{f(nT)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, om $T<\frac{\pi}{\alpha}$.

Mer precis är

$$f(t)=T\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\frac{\sin\alpha(t-nT)}{\pi(t-nT)},\quad t\in\mathbf{R}. \qquad (*)$$

Bevis: Observera att $T\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\frac{\sin\alpha(t-nT)}{\pi(t-nT)} = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)LP_\alpha\,\delta(t-nT) = T\,LP_\alpha\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)\right)$,
så påståendet $(*)$ är ekvivalent med

$$f(t)=T\,LP_\alpha\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)\right) \qquad (\dagger)$$

Vi bevisar $(\dagger)$.
Man har $f(t)\delta(t-a)=f(a)\delta(t-a)$, så

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-nT) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$ är T-periodisk, och har Fourierserie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt}$

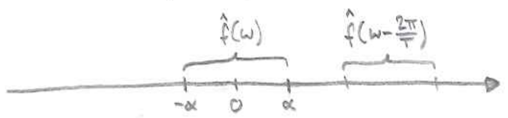
$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-i\frac{2\pi}{T}kt}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}kt}\,dt = \frac{1}{T}$$

Alltså $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{T}kt}$.

$$TLP_\alpha\Big(f(nT)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\Big) = LP_\alpha\Big(f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{i\frac{2\pi}{T}kt}\Big) = \mathcal{F}^{-1}\Big[\chi_{(-\alpha,\alpha)}(\omega)\,\mathcal{F}\Big[f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\frac{2\pi}{T}kt}\Big](\omega)\Big] =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\chi_{(-\alpha,\alpha)}\,\mathcal{F}\big[f(t)e^{i\frac{2\pi}{T}kt}\big]\Big] = \mathcal{F}^{-1}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\chi_{(-\alpha,\alpha)}\,\hat{f}\big(\omega-\tfrac{2\pi k}{T}\big)\Big]$$

Men vi vet att $\frac{2\pi}{T} > 2\alpha$, vilket illustreras som:



(Bara termen med $k=0$

Alltså $TLP_\alpha\Big(f(nT)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\Big) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)] = f(t)$.

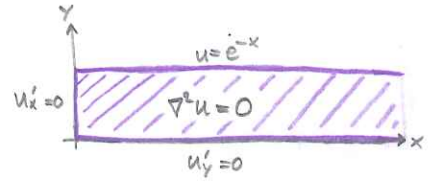
7.4.1 Sökt: Cosinus och sinustransformen av e^{-kx}, $k>0$, $x>0$

Lösning: $\int_0^\infty e^{-kx} e^{-ix\xi}\, dx = \int_0^\infty e^{-kx} (\cos x\xi - i \sin x\xi)\, dx = \mathcal{F}_c e^{-kx}(\xi) - i\, \mathcal{F}_s e^{-kx}(\xi)$

Men $\int_0^\infty e^{-kx} e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{k+i\xi} = \frac{k}{k^2+\xi^2} - i\, \frac{\xi}{k^2+\xi^2}$.

Svar: $\mathcal{F}_c = \frac{k}{k^2+\xi}$, $\mathcal{F}_s = \frac{\xi}{k^2+\xi^2}$

7.4.6



$x>0$
$0<y<1$

$$\begin{cases} u'_x(0,y)=0, & 0<y<1 \\ u'_y(x,0)=0, & x>0 \\ u(x,1)=e^{-x}, & x>0 \end{cases}$$

Sökt: Lös Laplaces ekvation med villkoren ovan.

Lösning: Tag cosinustransformen i x-led.

Sätt $W(\xi,y) = \mathcal{F}_c[u(x,y)](\xi,y) = \int_0^\infty u(x,y) \cos x\xi\, dx$

Då blir $u(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty W(x,y) \cos x\xi\, dx$, så att

$u'_x(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty W(\xi,y)(-\xi) \sin \xi x\, d\xi = 0$, för $x=0$

Ekvationen blir

$-\xi^2 w(\xi,y) + w''_{yy}(\xi,y) = 0$,

med horisontella randvillkor

$$\begin{cases} W_y(\xi,0) = 0 \\ W(\xi,1) = \mathcal{F}_c[e^{-x}] = \frac{1}{1+\xi^2}. \end{cases}$$

Fixera ξ: $w(\xi,y) = A(\xi)e^{\xi y} + B(\xi)e^{-\xi y}$, eller bättre

$w(\xi,y) = C(\xi)\cosh \xi y + D(\xi) \sinh \xi y$

$W'_y(\xi,y) = C\xi \sinh \xi y + D\xi \cosh \xi y = \{\text{Randvillkor}\} = 0$ då $y=0$.

Då är $D=0$, och $w(\xi,y) = C(\xi)\cosh \xi y$

Dessutom $w(\xi,1)=\frac{1}{1+\xi^2}$, och alltså $C(\xi)=\frac{1}{(1+\xi^2)\cosh\xi}$, och alltså

$$W(\xi,y)=\frac{\cosh\xi y}{(1+\xi^2)\cosh\xi}.$$

Slutligen fås

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cosh\xi y\cos\xi x}{(1+\xi^2)\cosh\xi}\,d\xi.$$

EÖ 20 $\quad x(n)=\sin\frac{n\pi}{N}, \quad n=0,\dots,N-1$

Sökt: $\hat{x}(m)$

Lösning:

$$\hat{x}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}\sin\frac{n\pi}{N}e^{-i2\pi\frac{mn}{N}}=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{i\pi\frac{n}{N}}e^{-i2\pi\frac{mn}{N}}-e^{-i\pi\frac{n}{N}}e^{-i2\pi\frac{mn}{N}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{\frac{i\pi}{N}(1-2m)}\right)^n-\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{-\frac{i\pi}{N}(1+2m)}\right)^n\right)$$

Men $\sum_{k=0}^{N-1}q^k=\frac{1-q^N}{1-q}$, så

$$\hat{x}(m)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1-e^{-\frac{i\pi}{N}(2m-1)N}}{1-e^{-\frac{i\pi}{N}(2m-1)}}-\frac{1-e^{-\frac{i\pi}{N}(2m+1)N}}{1-e^{-\frac{i\pi}{N}(2m+1)}}\right), \quad \text{om } \frac{m\pm\frac{1}{2}}{N}\notin\mathbb{Z}$$

$$e^{-\frac{i\pi}{N}(2m\pm1)N}=e^{-i2\pi m}e^{\mp i\pi}=-1$$

$$\hat{x}(m)=\frac{1}{i}\left(\frac{1}{1-e^{-\frac{i\pi}{N}(2m-1)}}-\frac{1}{1-e^{-\frac{i\pi}{N}(2m+1)}}\right)=\frac{1}{i}\,\frac{-e^{-\frac{i\pi}{N}(2m+1)}+e^{-\frac{i\pi}{N}(2m-1)}}{1-e^{-\frac{i\pi}{N}(2m+1)}-e^{-\frac{i\pi}{N}(2m-1)}+e^{-\frac{4\pi m}{N}}}=$$

$$=\cdot\frac{1}{i}\,\frac{e^{-i2\pi\frac{m}{N}}}{e^{-i2\pi\frac{m}{N}}}\cdot\frac{e^{i\frac{\pi}{N}}-e^{-i\frac{\pi}{N}}}{e^{i2\pi\frac{m}{N}}-e^{i\frac{\pi}{N}}-e^{-i\frac{\pi}{N}}+e^{-i2\pi\frac{m}{N}}}=\frac{\sin\frac{\pi}{N}}{\cos\frac{2\pi m}{N}-\cos\frac{\pi}{N}}$$

EÖ14 Sökt: Bestäm u, $\underbrace{\int_0^\infty e^{-\tau} u(t-\tau)\, d\tau}_{①} - \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{\tau} u(t-\tau)\, d\tau}_{②} = \sqrt{3}\, u(t) - e^{-|t|}$

Lösning:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau) e^{-\tau} u(t-\tau)\, d\tau = \left((\theta(\tau) e^{-\tau}) * u(\tau) \right)(t) = ①$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1-\theta(\tau)) e^{\tau} u(t-\tau)\, d\tau = \left((1-\theta(\tau)) e^{\tau} * u(\tau) \right)(t) = ②$$

Fouriertransformera:

$$\underbrace{\widehat{\theta(\tau) e^{-\tau}}}_{= \frac{1}{1+i\omega}} \hat{u}(\omega) - \underbrace{\widehat{(1-\theta(\tau)) e^{\tau}}}_{\frac{1}{1-i\omega}} \hat{u}(\omega) = \sqrt{3}\, \hat{u}(\omega) - \frac{2}{1+\omega^2}$$

Alltså $\hat{u}(\omega) = \dfrac{2}{\omega^2\sqrt{3} + 2i\omega + \sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}(\omega + i\sqrt{3})(\omega - i/\sqrt{3})} = \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{1}{\omega + i\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\omega - i/\sqrt{3}} \right) =$

$$= \underbrace{\frac{1/2}{i\omega + \frac{1}{\sqrt{3}}}} - \underbrace{\frac{1/2}{i\omega - \sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \mathcal{F}\left[e^{-\frac{t}{\sqrt{3}}} \theta(t) \right] + \frac{1}{2} \mathcal{F}\left[e^{t\sqrt{3}} (1-\theta(t)) \right]$$

3/2 2012

Laplacetransformen

Definition: $\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt}\, dt$, f definierad på $\mathbb{R}_+$.

Laplacetransformen och derivator:

$$\mathcal{L}[f'(t)](z) = z\mathcal{L}[f(t)](z) - f(0)$$

Anmärkning 1: I allmänhet skriver man $\mathcal{L}f(z)$ istället för $\mathcal{L}[f(t)](z)$.

Anmärkning 2: $\mathcal{L}[\delta(t)](z) = 1 \ \forall z$, $z\mathcal{L}[f(t)](z) = \mathcal{L}[\underbrace{f'(t) + f(0)\delta(t)}_{\text{Distributionsderivatan av } f.}]$

Laplacetransformen och integral:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)\, ds\right](z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}[f(t)](z)$$

Faltningar:

$$\mathcal{L}[f * g](z) = \mathcal{L}[f(t)](z)\, \mathcal{L}[g(t)](z)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s)\, ds = \int_0^t f(t-s) g(s)\, ds, \quad \text{om } f, g \text{ är noll på } \mathbb{R}_-.$$

Om $a > 0$:

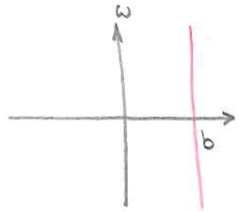
$$\mathcal{L}[f(t-a)](z) = \mathcal{L}[f(t-a)\theta(t-a)] = e^{-az}\mathcal{L}[f(t)](z)$$

$$\mathcal{L}[f(t)](b+i\omega) = \int_0^\infty e^{-bt} e^{-i\omega t} f(t)\, dt = \hat{g}(\omega),$$

$$\text{om } g(t) = \begin{cases} e^{-bt} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Inversionsformeln ger:

$$f(t) = e^{bt} g(t) = \frac{e^{bt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[f(t)](b+i\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

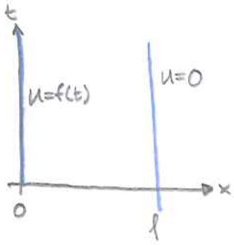


$z = b + i\omega$
$dz = i\, d\omega$

Alltså: $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \mathcal{L}[f(t)](z) e^{zt}\, dz$

Exempel: Vågekvationen

$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}, \quad 0 \le x \le \ell, \ t \ge 0, \ c > 0$



$$\begin{cases} u(0,t) = f(t) \\ u(\ell,t) = 0 \end{cases}, \quad t > 0$$

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u'_t(x,0) = 0 \end{cases}, \quad 0 \le x \le \ell$$

Sätt $U(x,z) = \mathcal{L}[u(x,t)](x,z) = \int_0^\infty u(x,t)e^{-zt}\,dt$

$$\mathcal{L}[u''_{tt}(x,t)](x,z) = z\mathcal{L}[u'_t] - u'_t(x,0) = z^2 \mathcal{L}[u(x,t)](x,z) - z\,u(x,0) - u'_t(x,0) =$$
$$= z^2 \mathcal{L}[u(x,t)](x,z)$$

Vågekvationen kan nu skrivas

$$z^2 \mathcal{L}[u(x,t)](x,z) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}[u(x,t)](x,z),$$

det vill säga

$$z^2 U(x,z) = c^2 U''_{xx}(x,z).$$

Randvärdena ger

$$U(0,z) = \mathcal{L}[f(t)](z) \quad \text{och} \quad U(\ell,z) = 0.$$

Fixera z:

$$U(x,z) = Ae^{\frac{z}{c}x} + Be^{-\frac{z}{c}x}$$

En bättre bas är

$$U(x,z) = A'e^{\frac{z}{c}(x-\ell)} + B'e^{-\frac{z}{c}(x-\ell)}.$$

Ytterligare en bättre bas finns:

$$U(x,z) = A''\cosh\left(\tfrac{z}{c}(x-\ell)\right) + B''\sinh\left(\tfrac{z}{c}(x-\ell)\right)$$

$U(\ell,z) = 0$ ger $A'' = 0$, och alltså

$$U(x,z) = B''\sinh\left(\tfrac{z}{c}(x-\ell)\right)$$

$U(0,z) = \mathcal{L}[f(t)](z)$ ger

$$-B''(z)\sinh\left(\tfrac{z}{c}\ell\right) = \mathcal{L}[f(t)](z)$$

Alltså $B''(z) = -\dfrac{\mathcal{L}[f(t)](z)}{\sinh(\frac{z}{c}l)}$.

$$U(x,z) = \mathcal{L}[f(t)](z)\,\frac{\sinh(\frac{z}{c}(l-x))}{\sinh\frac{zl}{c}}$$

$u = \mathcal{L}^{-1}[U] = ?$

Om $s>0$: $\dfrac{1}{\sinh s} = \dfrac{2}{e^s - e^{-s}} = \dfrac{2}{e^s}\dfrac{1}{1-e^{-2s}} = \dfrac{2}{e^s}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2ks}$.

(Argumentet går även genom för $\mathrm{Re}\, s>0$.)

Nu erhålles

$$U(x,z) = \mathcal{L}[f(t)](z)\frac{2}{e^{\frac{zl}{c}}}\left(\frac{e^{\frac{z}{c}(l-x)} - e^{-\frac{z}{c}(l-x)}}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k\frac{zl}{c}} =$$

$$= \mathcal{L}[f(t)](z)\left(e^{-\frac{zx}{c}} - e^{\frac{z}{c}(x-2l)}\right)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k\frac{zl}{c}} =$$

$$= \mathcal{L}[f(t)](z)\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2kl+x)\frac{z}{c}} - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(2kl-x)\frac{z}{c}}\right)$$

Kom nu ihåg att $\mathcal{L}[f(t-a)](z) = e^{-az}\mathcal{L}[f(t)](z)$. Detta ger

$$U(x,z) = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f\left(t-\frac{x+2kl}{c}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} f\left(t-\frac{2kl-x}{c}\right)\right].$$

Slutligen får vi $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(t-\frac{x+2kl}{c}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} f\left(t-\frac{2kl-x}{c}\right)$.

Tag $f = \sin\omega t\cdot\Theta(t)$. Då får vi

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sin\omega\left(t-\frac{2kl+x}{c}\right)\Theta\left(t-\frac{2kl+x}{c}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\sin\omega\left(t-\frac{2kl-x}{c}\right)\Theta\left(t-\frac{2kl-x}{c}\right).$$

Detta blir litet utom då till exempel $\omega\frac{2l}{c} = 2\pi$ eller $\omega = m2\pi$, $m\in\mathbb{Z}$. I det fallet blir termerna lika, och $u \propto t$; detta är resonansfenomenet.

VIKTADE VARIANTER AV L^2

Sätt $L^2_w(D) = \{f$ definierade på D sådana att $\int_D |f(x)|^2 w(x)\,dx$ existerar ändligt$\}$.

Här är w en positiv funktion (som i alla fall vi är intresserade av dessutom är kontinuerlig) i D.

D är ett intervall, eller ett område i $\mathbf{R}^2$.

Skalärprodukten i L^2_w blir nu

$$\langle f, g\rangle_w = \int_D f(x)\overline{g(x)}\,W(x)\,dx.$$

$$\|f\|_w = \sqrt{\langle f, f\rangle_w} = \sqrt{\int_D |f(x)|^2 w(x)\,dx}$$

Exempel: Införandet av vikter motiveras till exempel av $\iint \ldots dxdy = \iint \ldots r\,dr d\theta$.

Om $\|f\|_w = 0$, måste f vara 0?

Nej, men nästan. Vi säger att f är 0 i L^2_w-mening om $\|f\|_w = 0$, och identifierar f och g om $\|f-g\|_w = 0$. Bakgrunden till detta är att L^2 egentligen definieras som ekvivalensklasser av funktioner.

Ett resultat (utan bevis) av detta är att alla $f \in L^2$ kan approximeras i norm med "snälla" funktioner $g \in C^k$, så att $\|f-g\|$ kan väljas godtyckligt litet.

Definition: En funktionsföljd f_j går mot f, då $j \longrightarrow \infty$, i L^2-mening om $\|f_j - f\| \longrightarrow 0$ då $j \longrightarrow \infty$.

Definition: En följd f_j i L^2 kallas en Cauchyföljd om $\|f_j - f_k\| \longrightarrow 0$, då $k, j \longrightarrow \infty$.

Sats: Varje Cauchyföljd konvergerar mot någon L^2-funktion.

Satsen bevisas ej.

Sats (Pythagoras sats): Om f och g ortogonala så $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

Beviset är trivialt. Utveckla bara $\langle f+g, f+g\rangle = \|f+g\|^2$, och använd $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle = 0$.

Definition: En följd $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ är ett ortogonalsystem om $\langle \phi_n, \phi_{n'}\rangle = 0$ då $n \neq n'$, och ingen ϕ_n är noll i L^2-mening, det vill säga $\|\phi_n\| \neq 0$.

Exempel: $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ i $[-\pi, \pi]$ är ett ortogonalsystem.

$\cos nx$, $n = 0, 1, \ldots,$ och $\sin nx$, $n = 1, 2, \ldots,$ är ett ortogonalsystem i $[-\pi, \pi]$.

$\cos nx$, $n = 0, 1, \ldots,$ i $[0, \pi]$ är ett ortogonalsystem.

$\sin nx$, $n = 1, 2, \ldots,$ i $[0, \pi]$ är ett ortogonalsystem.

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} d_n \phi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|d_n \phi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |d_n|^2 \|\phi_n\|^2.$$

Antag att en funktion $f \in L^2$ kan skrivas $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$. Då bör man ha

$\langle f, \phi_k\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle \phi_n, \phi_k\rangle = c_k \langle \phi_k, \phi_k\rangle$, och alltså:

$$c_n(f) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \langle f, \phi_n\rangle$$

Givet N vill vi approximera $f \in L^2$ med ändliga summor $\sum_{n=1}^{N} d_n \phi_n$.

Sats 3.8 (Satsen om bästa approximation): Givet $N \in \mathbf{N}$, och $f \in L^2$ är $\sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n$ den punkt i underrummet $H_N = \{\sum_{n=1}^{N} d_n \phi_n : d_n \text{ skalärer}\}$ som ligger närmast f, det vill säga:

$\min \| f - \sum_{n=1}^{N} d_n \phi_n\| = \|f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f) \phi_n\|$, där min tas över alla skalärer.

Bevis: Det inses lätt att $\min \|f - \sum_{n=1}^{N} d_n \phi_n\| \leq \|f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n\|$.

Visa nu att $\|f - \sum_{n=1}^{N} d_n\phi_n\| \geq \|f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n\|$ för alla d_n. (*)

Vektorn $f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n$ är ortogonal mot varje ϕ_k, $k \leq N$, ty

$$\langle f, \phi_k\rangle - \sum_{n=1} c_n(f)\langle \phi_n, \phi_k\rangle = \langle f, \phi_k\rangle - c_k(f)\|\phi_k\|^2 = 0.$$

Skriv $f - \sum_{n=1}^{N} d_n\phi_n = f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n + \sum_{n=1}^{N}(c_n(f) - d_n)\phi_n$.

Pythagoras sats ger nu:

$$\|f - \sum_{n=1}^{N} d_n\phi_n\|^2 = \|f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n\|^2 + \sum_{n=1}^{N}|c_n(f) - d_n|^2\|\phi_n\|^2, \qquad (+)$$

där den sista termen är positiv. Satsen följer, ty vi har visat (*)

Välj nu $d_n = 0$ i (+): $\|f\|^2 = \|f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n\|^2 + \sum_{n=1}^{N}|c_n(f)|^2\|\phi_n\|^2$,

alltså $\sum_{n=1}^{N}|c_n(f)|^2\|\phi_n\|^2 \leq \|f\|^2$. Låt $N \to \infty$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^2\|\phi_n\|^2 \leq \|f\|^2 \quad \text{– Bessels olikhet}$$

Konvergerar serien $\sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n$? Konvergerar den mot f?

Om d_n skalärer, och $\sum_{n=1}^{\infty}|d_n|^2\|\phi_n\|^2 < \infty$ så konvergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} d_n\phi_n$ i L^2,

ty dess partialsummor bildar en Cauchyföljd:

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} d_n\phi_n - \sum_{n=1}^{N'} d_n\phi_n\right\|^2 = \|\sum_{n=N'+1}^{N} d_n\phi_n\|^2 = \sum_{n=N'+1}^{N}|d_n|^2\|\phi_n\|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{då } N', N \to \infty$$

Alltså $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\phi_n$ konvergerar i L^2.

$$\|f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n\| \longrightarrow 0 \,?$$

$$\|f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |c_n(f)|^2 \|\phi_n\|^2$$

Så $\|f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n\| \longrightarrow 0$ om och endast om $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^2 \|\phi_n\|^2 = \|f\|^2$, det vill säga om det råder likhet. i Bessels olikhet.

Definition: Ortogonalsystemet $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ kallas fullständigt, eller en bas, om $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\phi_n = f$, för alla $f \in L^2$, det vill säga $\sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n \longrightarrow f$ i L^2 för alla f.

Sats 3.4: Låt $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara ett ortogonalsystem i L^2. Då är följande ekvivalent:

(a) $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ är fullständigt

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^2 \|\phi_n\|^2 = \|f\|^2$ för alla $f \in L^2$

(c) $f \in L^2$ och f ortogonal mot ϕ_n för alla n medför $f = 0$.

Bevis: Ekvivalens mellan (a) och (b) visades ovan.

Visa (a) $\Rightarrow$ (c):

Tag $f \in L^2$, f ortogonal mot ϕ_n för alla n. Då är

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\langle f, \phi_n\rangle = f$$

enligt (a). Men $\langle f, \phi_n\rangle = 0$, så $f = 0$ följer.

Visa (c) $\Rightarrow$ (a):

Tag $f \in L^2$, och bilda $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\phi_n$. Serien konvergerar i L^2 mot någon funktion, enligt ovan. Bilda nu $f - \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\phi_n$, och skalärmultiplicera med alla ϕ_k:

$$\langle f - \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\phi_n, \phi_k\rangle = \langle f, \phi_k\rangle - c_k(f)\|\phi_k\|^2 = 0 \qquad \text{för alla } k.$$

Så (c) ger $f - \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\phi_n = 0$, viket är (a).

Satsen följer.

Parsevals identitet för skalärprodukt:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\,\overline{c_n(g)}\,\|\phi_n\|^2,$$

om $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ är fullständigt.

Sats 3.5: Ortogonalsystemen

$\{e^{inx}\}_{n=1}^{\infty}$ i $[-\pi, \pi]$

$\cos nx$, $n=0,1,\ldots$ och $\sin nx$, $n=1,2,\ldots$ i $[-\pi,\pi]$,

$\cos nx$, $n=0,1,\ldots$ i $[0,\pi]$, och

$\sin nx$, $n=1,2,\ldots$ i $[0,\pi]$,

är fullständiga.

Exempel: $\cos nx$, $n=0,1,\ldots$ i $[-\pi,\pi]$ är ett icke-fullständigt ortogonalsystem. Man kan se detta eftersom (c) inte håller.

EÖ16 Insignal $\frac{1}{1+t^2}$ ger utsignal $\frac{t}{(4+t^2)^2}$

$Sf = f * h$

$\hat{Sf} = \hat{f}\,\hat{h}$

$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right] = \pi e^{-|\omega|}$

$\mathcal{F}\left[\frac{t}{(4+t^2)^2}\right] = \mathcal{F}\left[-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{1}{4+t^2}\right] = -\frac{i}{2}\omega\,\mathcal{F}\left[\frac{1}{4+t^2}\right] = -\frac{i}{2}\omega\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|} = -\frac{i\pi}{4}\omega e^{-2|\omega|}$

Får systemfunktion $\hat{h}(\omega) = \frac{\hat{Sf}}{\hat{f}} = \frac{-\frac{i\pi}{4}\omega e^{-2|\omega|}}{\pi e^{-|\omega|}} = -\frac{i}{4}\omega e^{-|\omega|}$

$\mathcal{F}\left[\frac{t}{(1+t^2)^2}\right] = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}\frac{1}{1+t^2}\right] = -\frac{i\pi}{2}\omega e^{-|\omega|}$

Så $\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\frac{t}{(1+t^2)^2}\right] = -\frac{i}{4}\omega e^{-|\omega|} = \hat{h}(\omega)$,

$h(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{t}{(1+t^2)^2}$

Svar på $\cos \omega t$? Insignalen $\cos \omega t$ ger utsignal $[\cos \omega\tau * h(\tau)](t) =$

$= [\mathrm{Re}(e^{i\omega\tau}) * h(\tau)](t) = \mathrm{Re}\left[e^{i\omega\tau} * h(\tau)\right](t)$, ty h reellvärd.

$\left[e^{i\omega\tau} * h(\tau)\right](t) = \int e^{i\omega(t-\tau)}h(\tau)\,d\tau = e^{i\omega t}\hat{h}(\omega) = -\frac{i}{4}\omega e^{-|\omega|}e^{i\omega t}$

Alltså $\mathrm{Re}\left[e^{i\omega\tau} * h(\tau)\right](t) = \mathrm{Re}\left[-\frac{i}{4}\omega e^{-|\omega|}e^{i\omega t}\right] = \frac{1}{4}\omega e^{-|\omega|}\sin \omega t$.

Systemet är ej kausalt, ty h är ej 0 på $\mathbf{R}_-$.

Stabilt? $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|t|}{(1+t^2)^2}\,dt < \infty$

Ja!

Övning 2, sidan 40 i Holmåker:

f given av $\hat{f}(\omega) = \Theta(\omega+\alpha) - \Theta(\omega-\alpha) = \chi_{(-\alpha,\alpha)}$

$f_s(t) = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,\delta(t-nT)$

$g = LP_\alpha(f_s) = \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{(-\alpha,\alpha)}\,\hat{f}(\omega)\right]$

$\Omega = \frac{2\pi}{T} > \alpha$ (Vinkelfrekvensen)

Sökt: Bestäm $\|f-g\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)-g(t)|^2\,dt$

Lösning: Samplingssatsen säger att

$f(t) = T\,LP_\alpha\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,\delta(t-nT)\right) = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,LP_\alpha\,\delta(t-nT)$

Om $T < \frac{\pi}{\alpha}$ blir $g = f$. Så är dock ej fallet, ty vi vet bara $T < \frac{2\pi}{\alpha}$.

Bestäm $\hat{f}-\hat{g}$.

$\frac{f_s(t)}{T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-nT) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) =$

$= f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}e^{-i\frac{2\pi n}{T}t}$

$g(t) = LP_\alpha(f_s)$, så $\hat{g}(\omega) = \chi_{(-\alpha,\alpha)}\,\hat{f_s}(\omega)$

$\hat{f_s}(\omega) = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\frac{2\pi n}{T}t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega-\frac{2\pi}{T}k)$

$\hat{g}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi_{(-\alpha,\alpha)}(\omega)\,\chi_{(-\alpha,\alpha)}(\omega-\frac{2\pi}{T}k) = \hat{f}(\omega)$, om $\Omega-\alpha \geq \alpha$, det vill säga $\Omega \geq 2\alpha$.

Men $\Omega \geq 2\alpha \Leftrightarrow T \leq \frac{\pi}{\alpha}$, vilket är villkoret i samplingssatsen. Alltså $\hat{f} = \hat{g}$, och

$\|f-g\| = 0$.

Antag nu $\alpha < \Omega < 2\alpha$.

Då: $\hat{g}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{om } -\Omega+\alpha < \omega < \Omega-\alpha \Leftrightarrow |\omega| < \Omega-\alpha \\ 2, & \text{om } \Omega-\alpha < |\omega| < \alpha \\ 0, & \text{om } |\omega| > \alpha \end{cases}$

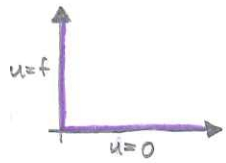
$\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega) = \begin{cases} -1, & \text{om } \Omega-\alpha < |\omega| < \alpha \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

Så $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega)|^2\,d\omega = 2(\alpha-(\Omega-\alpha)) = 2(2\alpha-\Omega)$

Plancherel: $\|f-g\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}-\hat{g}\|^2 = \frac{2\alpha-\Omega}{\pi}$

8.4.1 $\quad u'_t = k u''_{xx} - au, \quad x > 0,\ t > 0$

$u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = f(t)$



Lösning: Sätt $F(x,z) = \mathcal{L}[u(x,t)](x,z)$, det vill säga, Laplacetransformera i t-variabeln.

Ekvationen blir:

$$zF(x,z) - \underbrace{u(x,0)}_{=0} = kF''_{xx}(x,z) - aF(x,z)$$

Randvillkoret ger $F(0,z) = \mathcal{L}[f(t)](z)$

Ekvationen blir

$$F''_{xx}(x,z) = \frac{z+a}{k} F(x,z).$$

Denna har den allmänna lösningen

$$F(x,z) = Ae^{\sqrt{\frac{z+a}{k}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{z+a}{k}}x}, \qquad A = A(x),\ B = B(x).$$

Den första termen växer otäckt snabbt. Döda den! (Vi vill inte ha lösningar som växer för snabbt i oändligheten.)

Alltså $F(x,z) = B(z)e^{-\sqrt{\frac{z+a}{k}}x}$.

Randvillkoret ger $\mathcal{L}[f(t)](z) = B(z)$, och alltså

$$F(x,z) = \mathcal{L}[f(t)](z)\, e^{-\sqrt{\frac{z+a}{k}}x},$$

$$u(x,t) = f(t) * \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\sqrt{\frac{z+a}{k}}x}\right]$$

$e^{-\sqrt{\frac{z}{k}}x}$ är enligt Mathematics Handbook sidan 267 rad 27 Laplacetransformen av $\frac{x}{\sqrt{k}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$. $\quad$ (Ty $\mathcal{L}[t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{b^2}{4t}}] = \frac{2\sqrt{\pi}}{b} e^{-b\sqrt{z}}$)

Så $u(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi k}} e^{-at} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} * f(t)$

8/2 2012

Sats 3.5: Systemen

$$\left.\begin{array}{l}\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty} \\ \cos nx,\ n=0,1,\dots,\quad \sin nx;\ n=1,2,\dots\end{array}\right\}\ \text{i}\ [-\pi,\pi]$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos nx,\ n=0,1,\dots \\ \sin nx,\ n=1,2,\dots\end{array}\right\}\ \text{i}\ [0,\pi]$$

är fullständiga.

Med omskalning är självklart dessa fullständiga även i $[0, L]$

Bevis: Tag $f \in L^2(I)$. $I = [-\pi, \pi]$ eller $I = [0, \pi]$

Tag $\varepsilon > 0$. Visa $\|f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n\| < \varepsilon$ för stora N.

Vi kan finna $g \in C^1(I)$ så att $\|f-g\| < \varepsilon$, och så att $g=0$ nära ändpunkterna (ändra g nära änpunkterna).

Utvidga g till en udda respektive jämn funktion i $[-\pi, \pi]$, i fallen $I = [0, \pi]$.

Utvidga g 2π-periodiskt till $\mathbb{R}$, och kalla denna funktion $\tilde{g}$. Då blir $g \in C^1(\mathbb{R})$

Sats 2.5 ger att $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\tilde{g})\phi_n$ konvergerar likformigt på $\mathbb{R}$, så vi har

$$\int_I |\tilde{g}(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n(g)\phi_n|^2 dx \leq \sup_{x\in I} |\tilde{g}(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n(\tilde{g})\phi_n|^2 \int_I dx \longrightarrow 0 \text{ då } N \to \infty.$$

Alltså $\|\tilde{g} - \sum_{n=1}^{N} c_n(\tilde{g})\phi_n(x)\| \longrightarrow 0$, $N \longrightarrow \infty$.

$$\|f - \sum_{n=1}^{N} c_n(\tilde{g})\phi_n(x)\| \leq \|f - \tilde{g}\| + \|\tilde{g} - \sum_{n=1}^{N} c_n(\tilde{g})\phi_n(x)\| < 2\varepsilon, \quad \text{norm i } L^2(I).$$

Satsen följer.

Anmärkning: Vi får Parsevals ekvation i dessa system:

$$e^{inx}: \quad \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 \|\phi_n\|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$$

Sturm-Liouville-Problem

Variabelseparation: $\begin{cases} u_t' = k u_{xx}'' \\ u_{tt}'' = c^2 u_{xx}'' \end{cases}$

Vi vill generalisera högerledet.

Fick $X''(x) = \lambda X(x)$ med $X(0) = X(l)$, eller $X'(0) = X'(l)$.

Lösning: $X = \sin \frac{\pi n}{l} x$ eller $X = \cos \frac{\pi n}{l} x$, och $\lambda = -(\frac{\pi n}{l})^2$.

X är en egenvektor eller egenfunktion till operatorn $\frac{d^2}{dx^2}$, och λ är egenvärde.

Egenfunktionerna är ortogonala.

(Jämför detta med linjär algebra: Om A en symmetrisk matris, det vill säga om $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$, så existerar en bas av egenvektorer: $Av_j = \lambda_j v_j$, $v_j \perp v_{j'}$.)

Är $\frac{d^2}{dx^2}$ symmetrisk? Tag segmentet (a,b) istället för $[0,l]$

$$\int_a^b f''\bar{g}\,dx \overset{?}{=} \int_a^b f\bar{g}''\,dx.$$

Sant om $[f'\bar{g}]_a^b = [f\bar{g}']_a^b = 0$, det vill säga om f och g uppfyller randvillkoren.

Tag nu $L[f(x)] = r(x)f''(x) + q(x)f'(x) + p(x)f(x)$, där $r(x), q(x), p(x)$ är reellvärda funktioner i $[a,b]$. Vi vill partialintegrera.

Antag först att $f, g \in C^2[a,b]$, med båda noll nära a och b.

$$\int_a^b L[f(x)]g(x)\,dx = \int_a^b \left(r(x)f''(x)\bar{g}(x) + q(x)f'(x)\bar{g}(x) + p(x)f(x)\bar{g}(x)\right)dx =$$

$$= \int_a^b \left(f(x)(r(x)\bar{g}(x))'' - f(x)(q(x)\bar{g}(x))' + p(x)f(x)\bar{g}(x)\right)dx =$$

$$= \int_a^b f\left(r\bar{g}'' + (2r' - q)\bar{g}' + (r'' - q' + p)\bar{g}\right)dx =$$

$$= \int_a^b f(x)L[\bar{g}(x)]\,dx \quad \text{om} \quad 2r' - q = q \quad \text{och} \quad r'' - q' + p = p,$$

det vill säga $r' = q$ (och $r'' = q'$).

Då är $L[f(x)] = rf'' + r'f' + pf = (rf')' + pf$.

Anmärkning: Att en linjär operator kallas symmetrisk är detsamma som att den kallas självadjungerad.

Definition: En operator på formen $L[f(x)] = (rf')' + pf$ kallas formellt självadjungerad.

Tag nu en självadjungerad L, och $f, g \in C^2(I)$.

$$\int_a^b L[f(x)]\bar{g}(x)\,dx = \int_a^b \left((rf')'\bar{g} + pf\bar{g}\right)dx = \left[rf'\bar{g}\right]_a^b - \int_a^b \left(rf'\bar{g}' - pf\bar{g}\right)dx =$$

$$= \left[rf'\bar{g}\right]_a^b - \left[rf\bar{g}'\right]_a^b + \int_a^b \left(f(r\bar{g}')' + pf\bar{g}\right)dx = \int_a^b f(x)\left[\bar{g}(x)\right]dx,$$

om $\left[r(f'\bar{g} - f\bar{g}')\right]_a^b = 0$. (Detta kallas Lagranges identitet.)

$$f'(x)\bar{g}(x) - f(x)\bar{g}'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & f(x) \\ \bar{g}'(x) & \bar{g}(x) \end{vmatrix}$$

Om $\left[r\begin{vmatrix} f' & f \\ \bar{g}' & g \end{vmatrix}\right]_a^b = 0$ får vi $\langle L[f], g\rangle = \langle f, L[g]\rangle$.

Ska ha två randvillkor $B_1(f) = 0$ och $B_2(f) = 0$, båda på formen

$\alpha f(a) + \tilde{\alpha} f'(a) + \beta f(b) + \tilde{\beta} f'(b) = 0$. (Där någon av $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta} \neq 0$.)

Dessa randvillkor kallas självadjungerade om $\left[r\begin{vmatrix} f' & f \\ \bar{g}' & \bar{g} \end{vmatrix}\right]_a^b = 0$ för alla $f, g \in C^2([a,b])$, som båda uppfyller randvillkoren.

Exempel: Randvillkoren kallas separerade (ett i a, ett i b) om de är av form $\alpha f(a) + \tilde{\alpha} f'(a) = 0$, och $\beta f(b) + \tilde{\beta} f'(b) = 0$.

Lemma: Separerade randvillkor är självadjungerade.

Bevis: Antag att f, g är reellvärda och satisfierar randvillkoren vektorn. Vektorn $[f(a), f'(a)]$ i $\mathbf{R}^2$ är ortogonal mot $[\alpha, \tilde{\alpha}]$, och analogt för $[g, g']$, och är också självadjungerande om $r(a) = r(b)$.

Definition: Ett reguljärt Sturm-Liouville-problem i ett begränsat intervall $[a,b]$ består av:

- En formellt självadjungerad operator $L[f] = (rf')' + pf$, där r, r', p är reellvärda och kontinuerliga, och $r > 0$ i $[a,b]$.
- Självadjungerade randvillkor $B_1(f) = 0$, $B_2(f) = 0$.
- En viktfunktion w som är kontinuerlig och positiv i $[a,b]$.

Definition: λ kallas ett egenvärde till problemet om ekvationen

$$L[f] + \lambda w f = 0$$

har en lösning $f \in C^2([a,b])$, $f \not\equiv 0$, med $B_1(f) = 0$, $B_2(f) = 0$.
f kallas då egenfunktion.

Anmärkning: Om f och g satisfierar randvillkoren så $\langle L[f], g\rangle = \langle f, L[g]\rangle$.

Sats 3.9: För ett reguljärt Sturm-Liouville-problem gäller:

1) Alla egenvärden är reella.

2) Om f och g är egenfunktioner med olika egenvärden, så är de ortogonala i $L^2_w([a,b])$, det vill säga $\int_a^b f(x)\overline{g}(x)\, w(x)\, dx = 0$.

3) Egenfunktionerna med samma egenvärde bildar ett vektorrum av dimension ett eller två.

Sats 3.9: För ett reguljärt Sturm-Liouville-problem gäller:

1) Alla egenvärden är reella.
2) Om f, g egenfunktioner med olika egenvärden så $\langle f, g\rangle_w = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)w(x)\,dx = 0$.
3) Egenfunktionerna till ett visst egenvärde bildar ett vektorrum av dimension ett eller två. Dimensionen är ett om randvärdena är separerade.

Bevis: Tag egenfunktioner f och g med egenvärden λ, μ.

$$\lambda \int_a^b w(x) f(x)\bar{g}(x)\,dx = \langle \lambda w f, g\rangle = -\langle L[f], g\rangle = -\langle f, L[g]\rangle = \langle f, \mu w g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{\mu w(x) g}(x)\,dx =$$
$$= \bar{\mu}\int_a^b w(x) f(x)\bar{g}(x)\,dx$$

Så $(\lambda - \bar{\mu})\int_a^b w(x) f(x)\bar{g}(x)\,dx = 0$.

Välj $g = f$, $\mu = \lambda$:

$$(\lambda - \bar{\lambda})\int_a^b w(x)|f(x)|^2\,dx = 0$$

Alltså måste vi ha $\lambda = \bar{\lambda}$, det vill säga λ reellt. Påstående 1) är därmed visat.

Tag nu f, g med $\lambda \neq \mu$:

$$(\lambda - \mu)\int_a^b w(x) f(x)\bar{g}(x)\,dx = 0$$

Men $\lambda \neq \mu$, så påstående 2) följer.

Påstående 3) lämnas utan bevis.

Exempel: $L[f] = f''$; $[0, \ell]$, $w = 1$.

Randvillkor: $f(0) = 0$, $f(\ell) = 0$.

Detta är ett reguljärt Sturm-Liouville-problem.

$$f'' + \lambda f = 0$$

Egenfunktioner blir $\sin(\frac{\pi n}{\ell}x)$, egenvärden $(\frac{\pi n}{\ell})^2$, $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$.

Randvillkoren $f'(0) = f'(\ell) = 0$ ger istället egenfunktioner $\cos(\frac{\pi n}{\ell}x)$ och egenvärden $(\frac{\pi n}{\ell})^2$, $n \in \mathbf{N}\cup\{0\}$.

Sats 3.9 ger att $\sin(\frac{\pi n}{\ell}x)$, $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$ är ett ortogonalsystem i $[0, \ell]$

Exempel: $L[f] = f''$

Randvillkor: $f(\ell) = f(-\ell)$, $f'(\ell) = f'(-\ell)$

Egenfunktioner: 1, $\cos\frac{\pi}{\ell}x$, $\sin\frac{\pi}{\ell}x$, $\cos\frac{2\pi}{\ell}x$, $\sin\frac{2\pi}{\ell}x$, ...

Egenvärden: 0, $(\frac{\pi}{\ell})^2$, $(\frac{\pi}{\ell})^2$, $(\frac{2\pi}{\ell})^2$, $(\frac{2\pi}{\ell})^2$, ...

Sats (Huvudsats för reguljära Sturm-Liouville-problem):

För ett reguljärt Sturm-Liouville-problem finns egenfunktioner som bildar ett fullständigt ortogonalsystem $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $L^2_w([a,b])$. För motsvarande egenvärden $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ gäller att $\lambda_n \longrightarrow +\infty$ då $n \longrightarrow \infty$.

Om en funktion $f \in C^2([a,b]) \subset L^2_w([a,b])$ utvecklas i basen $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar dess serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\,\phi_n$ likformigt i $[a,b]$, där

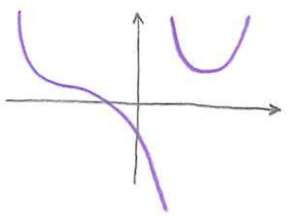
$$c_n(f) = \frac{1}{\|\phi_n\|^2}\langle f, \phi_n\rangle_w .$$

Anmärkning: $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ kan räknas upp i växande ordning, och det finns högst ändligt många negativa λ.

Satsen presenteras utan bevis, men en liten intuitiv motivering följer:

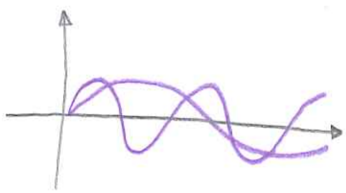
Antag $r(x) = 1$, randvillkor $f(a) = f(b) = 0$. Egenfunktioner ges av $f'' + \underbrace{(p + \lambda w)}_{Q(x)} f = 0$.

Om $Q < 0$ har f'' och f samma tecken:



Ej två rollställen! Inga egenfunktioner.

Om $Q > 0$ har f'' och f motsatt tecken:



Exempel: $L[f] = f''$ i $[0, \ell]$ med $w = 1$.

Randvillkor: $f(0) = f'(\ell) = 0$

1. $\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$

$f'' = \mu^2 f$

$f = a\cosh \mu x + b \sinh \mu x$

Randvillkor ger $a = 0$ och $b\mu\cosh \mu\ell = 0$. Ej möjligt, ty $\cosh x \neq 0$.

Alltså inga negativa egenvärden.

2. $\lambda = 0$, $f = ax + b$. Ej möjligt

3. $\lambda > 0$, $\lambda = \nu^2$, $\nu > 0$

$f'' = -\nu^2 f$

$f = a\cos \nu x + b\sin \nu x$

Randvärden ger: $a = 0$, $b\nu\cos \nu\ell = 0 \Rightarrow \nu = \frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ell}$

Egenfunktioner: $\phi_n(x) = \sin \frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ell}$, $n = 1, 2, \ldots$

Egenvärden: $\lambda_n = \left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ell}\right)^2$

Exempel: $L[f] = f''$ i $[0, 1]$, med $w = 1$.

Randvillkor: $f'(0) = f(0)$, $f'(1) = 2f(1)$

Separerade randvillkor, alltså självadjungerade.

Bestäm egenfunktionerna och egenvärdena:

$f'' + \lambda f = 0$

1. $\lambda > 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$

$f = a\cosh \mu x + b\sinh \mu x$

$f'(x) = a\mu\sinh \mu x + b\mu\cosh \mu x$

$f'(0) = f(0)$ ger $b\mu = a$, så

$f = b(\mu\cosh \mu x + \sinh \mu x)$, eller $f = \mu\cosh \mu x + \sinh \mu x$

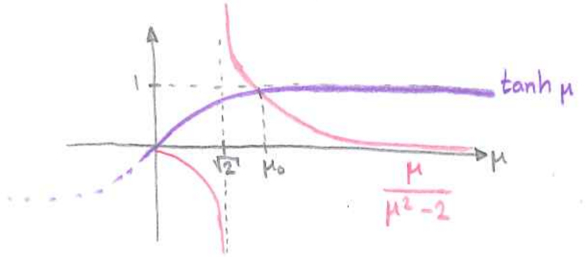
$f'(x) = \mu^2 \sinh \mu x + \mu\cosh \mu x$

$f'(1) = 2f(1)$ ger $\mu^2 \sinh \mu + \mu\cosh \mu = 2\mu\cosh \mu + 2\sinh \mu$

Dividera med $\cosh \mu$:

$$\tanh \mu = \frac{\mu}{\mu^2 - 2}$$

Har denna några lösningar? Skissa leden i ekvationen.



En skärningspunkt μ_0 finns alltså. Fler finns ej, ty $\frac{\mu}{\mu^2-2}$ är avtagande i $\mu > \sqrt{2}$ (derivera för att se detta).

2. $\lambda = 0$, $f'' = 0$, $f = ax + b$

$f'(0) = f(0)$ ger $a = b$, så $f = a(x+1)$, eller $f = x + 1$.

$f'(1) = 2f(1)$ ger $1 = 2(1+1)$, vilket ej är möjligt.

0 är ej ett egenvärde.

3. $\lambda > 0$, $\lambda = v^2$, $v > 0$

$f'' = -v^2 f$, $\quad f = a\cos vx + b\sin vx$

$f' = -av\sin vx + bv\cos vx$

$f'(0) = f(0)$ ger $bv = a$.

$f = b(v\cos vx + \sin vx)$ eller $f = v\cos vx + \sin vx$

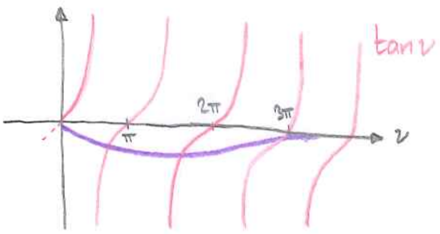
$f' = -v^2 \sin vx + v\cos vx$

$f'(1) = 2f(1)$ ger

$$-v^2 \sin v + v\cos v = 2v\cos v + 2v\sin v$$

$$-v^2 \tan v + v = 2v + 2\tan v$$

$$\tan v = -\frac{v}{v^2+2}$$



Får en följd av skärningspunkter $v_1, v_2, \ldots$

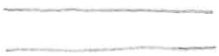
13/2 2012

Vågekvationen

$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}, \quad 0 < x < \ell$

Svängande fiolsträng: 

Randvillkor: $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$

Luftpelare i orgel, flöjt: 

Randvillkor: $u'_x(0,t) = u'_x(\ell,t) = 0$

I båda fallen får vi

$u(x,t) = X(x)\,T(t)$.

$X'' = \lambda X, \quad T'' = c^2 \lambda T$

$\lambda = -\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2, \quad X = \sin \frac{\pi n}{\ell} x$ respektive $X = \cos \frac{\pi n}{\ell} x$

$T = a \cos \frac{c\pi n}{\ell} t + b \sin \frac{c\pi n}{\ell} t$

För fiolsträngen får vi

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{\ell} x \left(a_n \cos \frac{c\pi n}{\ell} t + b_n \sin \frac{c\pi n}{\ell} t\right),$$

och för luftpelaren

$u(x,t) =$

Frekvenser: $\frac{cn}{2\ell}$

$n=1$ ger grundton, $n = 2, 3, \ldots$ ger övertoner.

Hur blir det för klarinett? 

Randvillkor: $u(0,t) = u'_x(\ell,t) = 0$

Får $X''(x) = \lambda X, \quad X(0) = 0, \quad X'(\ell) = 0$.

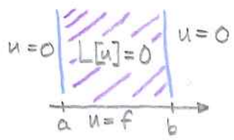
$X(x) = \sin \frac{\pi(n-\frac{1}{2})}{\ell} x, \quad \lambda = -\left(\frac{\pi}{\ell}(n-\tfrac{1}{2})\right)^2$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{\ell}(n-\tfrac{1}{2})x \left(a_n \cos \frac{c\pi}{\ell}(n-\tfrac{1}{2})t + b_n \sin \frac{c\pi}{\ell}(n-\tfrac{1}{2})t\right)$$

Frekvenser: $\frac{c}{2\ell}(n-\frac{1}{2})$

Grundton: $\frac{c}{4\ell}$, övertoner: $\frac{c}{4\ell}(2n-1), \quad n = 2, 3, \ldots$

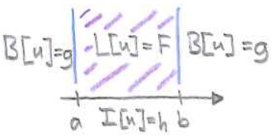
Inhomogena PDE-Problem



Till exempel $L[u] = u_t - k u_{xx}$

Ovan är ett PDE-problem som vi är vana vid. Nu inhomogent:

Problem P:



PDE: $L[u] = F$, där L är en linjär partiell differentialoperator.

Randvillkor: $B[u] = g$, till exempel $u(a,t) = g_1(t)$, $u(b,t) = g_2(t)$

Initialvillkor: $I[u] = h$, till exempel $u(x,0) = h(x)$

Nedan presenteras tre tekniker för att lösa inhomogena problem:

Teknik 1 – Superposition

Dela upp problemet:

P_L	P_B	P_I
$L[u] = F$	$L[u] = 0$	$L[u] = 0$
$B[u] = 0$	$B[u] = g$	$B[u] = 0$
$I[u] = 0$	$I[u] = 0$	$I[u] = h$

Om u_L, u_B och u_I löser dessa problem är $u = u_L + u_B + u_I$ en lösning till P.

P_I kan lösas med variabelseparation, och P_B kan lösas med Laplacetransform i t.

Teknik 3 - Steady-state

Om F och g är oberoende av t, det vill säga $F = F(x)$ och g_1, g_2 är konstanter, sök först en funktion $u_0(x)$ av bara x som uppfyller $L[u_0] = F$, och $B[u_0] = g$ (vänta med I).

Sök sedan en lösning till P på formen $u(x,t) = v(x,t) + u_0(x,t)$.

Bestäm v:

Ekvationen blir $L[v] + L[u_0] = F \Leftrightarrow L[v] = 0$.

Randvillkor: $B[v] + B[u_0] = g \Leftrightarrow B[v] = 0$.

Initialvillkor: $I[v] + I[u_0] = h \Leftrightarrow I[v] = h - I[u_0]$

v hittas nu med variabelseparation.

Exempel:

$$\begin{cases} u_t' = k u_{xx}'' \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = A \\ u(x,0) = h(x) \end{cases}$$

Sök steady-state-lösning $u_0(x)$:

$$\begin{cases} 0 = k(u_0)_{xx}'' \\ u_0(0) = 0 \\ u_0(l) = A \end{cases}$$

$u_0''(x) = 0$, så $u(x) = ax + b$

Randvillkor ger $b = 0$, $a = \frac{A}{l}$, $u_0(x) = \frac{Ax}{l}$.

Sätt $u(x,t) = v(x,t) + \frac{Ax}{l}$.

Får $v_t' = k v_{xx}''$

$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0$

$v(x,0) = h(x) - \frac{Ax}{l}$

Variabelseparation...

Teknik 2 - Variabla koefficienter

Fungerar för $P_L + P_I$, med $B[u]=0$.

Tag värmeledningsekvationen eller vågekvationen, med högerled

$F(x,t)$, $B[u]=0$, $I[u]=h$.

Antag $B[u]=0$ är $u(0,t)=u(l,t)=0$.

Om vi hade P_I skulle vi variabelseparera med $X(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x$ och få

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l}x \begin{cases} b_n e^{-k(\frac{n\pi}{l})^2 t}, & \text{värmeledningsekvationen.} \\ a_n \cos\frac{cn\pi}{l}t + b_n \sin\frac{cn\pi}{l}t, & \text{vågekvationen.} \end{cases}$$

Ansätt därför $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$, och bestäm $a_n(t)$, $n=1,2,\dots$

Stoppa nu in ansatsen i PDE:n, och använd $I[u]=h$.

Exempel: Värmeledningsekvationen $u'_t - k u''_{xx} = F$, $u(x,0)=h(x)$, med $k=1$.

Ekvationen blir: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(t)\sin\frac{\pi n}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x = F(x,t)$

Begynnelsevillkor: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\sin\frac{\pi n}{l}x = h(x)$ $\qquad (*)$

Utveckla h: $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\frac{\pi n}{l}x$

Får $a_n(0) = \alpha_n$ för alla n.

Fixera t i $(*)$, utveckla $x \mapsto F(x,t)$ i en sinusserie.

$F(x,t) = \beta_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x$

Identifiera koefficienter i $(*)$:

$$a_n'(t) + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a_n(t) = \beta_n(t) \quad \text{för alla } n.$$

$$a_n'(t) + \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a_n(t) = \beta_n(t)$$ löses med integrerande faktor-metoden (se fortsättningsanalys).

Multiplicera med $e^{\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t}$:

$$e^{\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t} a_n'(t) + \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 e^{\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t} a_n(t) = e^{\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t} \beta_n(t)$$

$$\left(e^{\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t} a_n(t)\right)' = e^{\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t} \beta_n(t)$$

$$e^{\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t} a_n(t) = \int_0^t \beta_n(\tau) e^{\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 \tau} d\tau + \alpha_n$$

I fallet vågekvationen får man, med $c = 1$:

$$a_n''(t) + \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a_n(t) = \beta_n(t)$$

Denna ekvation kan ofta lösas med Laplacetransform. Antag $I[u] = h$ är homogent, $u(x,0) = u_t'(x,0) = 0$, så att $a_n(0) = a_n'(0) = 0$.

$$A_n(z) = \mathcal{L}[a_n(z)]$$

$$\left(z^2 + \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2\right) A_n(z) = \mathcal{L}[\beta_n(z)]$$

$$A_n(z) = \frac{1}{z^2 + \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2} \mathcal{L}[\beta_n(z)]$$

Men $\frac{1}{z^2 + \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2} = \mathcal{L}\left[\frac{\ell}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{\ell} t \; \theta(t)\right]$, enligt tabell.

Slutligen:

$$a_n(t) = \frac{\ell}{\pi n} \theta(t) \sin \frac{\pi n}{\ell} t * \beta_n(t)$$

Teknik 4 - Homogenisering av randvillkor

Målet är nu att homogenisera randvillkoren $B[u]=g$ så att g ersätts med 0.

Antag $L[u]=F$, $B[u]=g$, $I[u]=h$.

Hitta en funktion $w(x,t)$ som satisfierar $B[w]=g$ (glöm PDE:n och $I[u]=h$).

Skriv sedan $u=v+w$, och bestäm v:

$L[u]=L[v]+L[w]=F \Rightarrow L[v]=F-L[w]$

$B[v]+B[w]=g \Rightarrow B[v]=0$

$I[v]+I[w]=h \Rightarrow I[v]=h-I[w]$

15/2 2012

Dirichlets Problem

$\Delta u = 0$

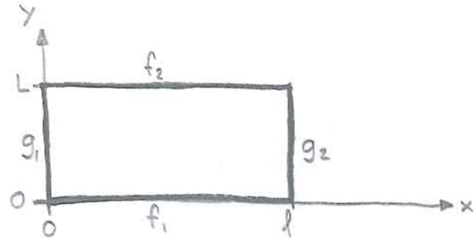
$u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

$u(x,0) = f_1(x)$

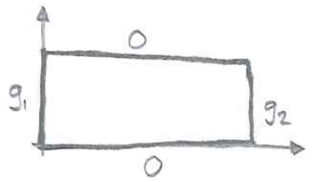
$u(x,L) = f_2(x)$

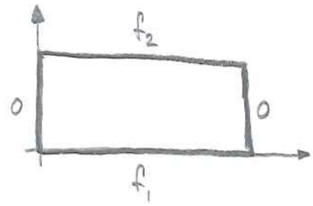
$u(0,y) = g_1(y)$

$u(l,y) = g_2(y)$



Dela upp problemet:





Lös det första, Skriv $u = X(x)Y(y)$. Ekvationen blir:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

Vi måste nu notera att y spelar rollen som rumsvariabel.

De homogena randvärdena ger $Y(0) = Y(L) = 0$.

Vi får som förut:

$$\lambda = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$$

$$Y(y) = \sin\frac{\pi n}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$X''(x) = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 X(x)$$

$$X(x) = a\sinh\frac{\pi n}{L}x + b\sinh\frac{\pi n}{L}(l-x)$$

Ansätt $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{L}y\left(a_n\sinh\frac{\pi n}{L}x + b_n\sinh\frac{\pi n}{L}(l-x)\right)$

$u(0,y) = g_1(y)$ ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh \frac{\pi n}{L} l \sin \frac{\pi n}{L} y = g_1(y).$$

$u(l,y) = g_2(y)$ ger

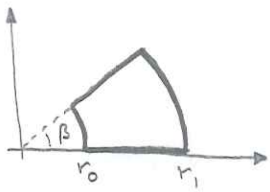
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh \frac{\pi n}{L} l \sin \frac{\pi n}{L} y = g_2(y).$$

Utveckla g_1, g_2 i sinusserie, och bestäm a_n, b_n.

PLANPOLÄRA KOORDINATER

$\Delta u = 0$ i polära koordinater (r,θ).

$$u''_{rr} + \frac{1}{r} u'_r + \frac{1}{r^2} u''_{\theta\theta} = 0$$



Område: $r_0 < r < r_1$, $0 < \theta < \beta$

Skriv $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, och erhåll

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0.$$

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}$$

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda$$

Antag randvillkor $u(r,0) = 0$, $u(r,\beta) = 0$,
$u(r_0,\theta) = f(\theta)$, $u(r_1,\theta) = g(\theta)$.

Vi får $\Theta''(\theta) = -\lambda\Theta(\theta)$, $\Theta(0) = 0$, $\Theta(\beta) = 0$.

$\lambda = \left(\frac{\pi n}{\beta}\right)^2$, $\sin\frac{\pi n}{\beta}\theta = \Theta(\theta)$, $n = 1, 2, \ldots$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \left(\frac{\pi n}{\beta}\right)^2 R(r) = 0$$

Den senare ekvationen är en så kallad Eulerekvation:

$$ax^2 y''(x) + bx y'(x) + cy(x) = 0, \qquad a, b, c \text{ konstanter}, \ a \neq 0.$$

Variabelbytet $x = e^t$ ger en ekvation med konstanta koefficienter, för y som funktion av t, med lösning av typ $e^{\gamma t}$, där γ löser den karakteristiska ekvationen.
Men $e^{\gamma t} = x^\gamma$. Om dubbelrot finns lösningen $te^{\gamma t} = x^\gamma \ln x$.

Metod för Eulerekvationer: Ansätt $y(x) = x^\gamma$.

Vi får

$$a\gamma(\gamma-1)x^\gamma + b\gamma x^\gamma + cx^\gamma = 0.$$

$$a\gamma(\gamma-1) + b\gamma + c = 0$$

Detta är en andragradsekvation i γ som sammanfaller med den karakteristiska ekvationen ovan.

Om lösningarna γ_1 och γ_2 är olika blir den allmänna lösningen till Eulerekvationen

$$y = \alpha x^{\gamma_1} + \beta x^{\gamma_2},$$

Om $\gamma_1 = \gamma_2$ blir den

$$y = \alpha x^{\gamma_1} + \beta x^{\gamma_1} \ln x.$$

Exempel: $x^2 y'' + xy' = 0$

$y = x^\gamma$ ger $\gamma^2 = 0$.

0 dubbelrot, så $y = \alpha + \beta \ln x$

Alternativt, skriv $xy'' + y' = (xy')' = 0$

Då $y' = \frac{C_1}{x}$, och

$y = \frac{C_1}{x} + C_2.$

Vi återgår till $r^2 R''(r) + r R'(r) - \left(\frac{\pi n}{\beta}\right)^2 R(r) = 0.$

Ansätt $R(r) = r^\gamma$:

$$\gamma(\gamma-1) r^\gamma + \gamma r^\gamma - \left(\frac{\pi n}{\beta}\right)^2 r^\gamma = 0$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{\pi n}{\beta}\right)^2, \quad \gamma = \pm \frac{\pi n}{\beta}$$

Lösningen till Eulerekvationen är alltså

$$R(r) = a r^{\pi n/\beta} + b r^{-\pi n/\beta}.$$

Separerade lösningar är alltså

$$u(r,\theta) = \left(a r^{\pi n/\beta} + b r^{-\pi n/\beta}\right) \sin \frac{\pi n}{\beta}\theta.$$

Ansätt $u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r^{\pi n/\beta} + b_n r^{-\pi n/\beta}\right) \sin \frac{\pi n}{\beta}\theta.$

Randvärdena f, g ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r_0^{\pi n/\beta} + b_n r_0^{-\pi n/\beta}\right) \sin \frac{\pi n}{\beta}\theta = f(\theta),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r_1^{\pi n/\beta} + b_n r_1^{-\pi n/\beta}\right) \sin \frac{\pi n}{\beta}\theta = g(\theta).$$

Utveckla f och g i sinusserier:

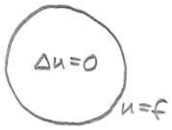
$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{\pi n}{\beta}\theta, \quad g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{\pi n}{\beta}\theta$$

Vi får

$$\begin{cases} a_n r_0^{\pi n/\beta} + b_n r_0^{-\pi n/\beta} = \alpha_n \\ a_n r_1^{\pi n/\beta} + b_n r_1^{-\pi n/\beta} = \beta_n. \end{cases}$$

Detta system löses sedan för varje n.

Exempel: $r_0 = 0$, $\beta = 2\pi$ (Hela cirkelskivan.)



$\Delta u = 0$ även i $(0,0)$.

Nu är $\Theta(\theta)$ periodisk, $\Theta''(\theta) = -\lambda\,\Theta(\theta)$.

Då blir $\lambda = n^2$, $\Theta(\theta) = e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$.

För R fås $r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0$.

Eulerekvation, ansätt $R(r) = r^{\gamma}$.

$\gamma(\gamma - 1) + \gamma - n^2 = 0$

$\gamma = \pm n$

$n \neq 0$ ger $R(r) = ar^n + br^{-n}$

$n = 0$ ger $R(r) = a + b\ln r$

R måste vara begränsad. Vi förkastar $\ln r$ och r^{-n}, $n > 0$. För $n < 0$ förkastas r^n.

Alltså återstår $R(r) = r^{|n|}$, $n \neq 0$, och $R(r) = 1$, $n = 0$.

Då blir de separerade lösningarna

1, för $n = 0$, och

$r^{|n|} e^{in\theta}$, för $n \neq 0$.

Ansätt alltså $u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$.

$r = r_1$ ger $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r_1^{|n|} e^{in\theta} = f(\theta)$.

Så $c_n r_1^{|n|}$ är Fourierkoefficienter $c_n(f)$ för f.

$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) e^{-in\varphi}\,d\varphi$, så, med antagandet $r_1 = 1$ erhålles

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\,e^{-in\varphi}\,d\varphi\, e^{in\theta}\,d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\theta-\varphi)}\,r^{|n|}\,d\varphi.$$

Inför $P(r, \theta - \varphi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\theta-\varphi)}\,r^{|n|}$.

$$P(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} r^{|n|} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(re^{i\varphi})^n + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{-1}(e^{in\varphi} r^{-n}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-re^{i\varphi}} + \frac{re^{-i\varphi}}{1-re^{-i\varphi}}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{|1-re^{i\varphi}|^2}$$

Så $u(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-\varphi) f(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{|1-re^{i(\theta-\varphi)}|^2} f(\varphi)\, d\varphi =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-re^{i\theta}|^2} f(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\varphi}|^2} f(e^{i\varphi})\, d\varphi = u(z)$$

Storgruppsövning

3.4.7 a) Sök bästa approximation, i $L^2[0,\pi]$, av $f(x) = x$ med ett uttryck $a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x$.

Lösning: Om ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 är en ortogonalbas i delrummet H ges bästa approximation av:

$$\sum_{n=1}^{3} c_n(f)\,\phi_n \quad , \quad c_n(f) = \frac{1}{\|\phi_n\|^2}\langle f, \phi_n\rangle$$

Vi vet att $1, \cos x, \cos 2x$ är parvis ortogonala i $L^2[0,\pi]$.

Får $a_0 = \frac{1}{\|1\|^2}\langle f, 1\rangle$, $a_1 = \frac{1}{\|\cos x\|^2}\langle f, \cos x\rangle$, $a_2 = \frac{1}{\|\cos 2x\|^2}\langle f, \cos 2x\rangle$.

Men Fourierutvecklingen av $f_2(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ är känd.

Så bästa approximation blir $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x$.

3.5.5 $f'' + \lambda f = 0$, $f'(0) = 0$, $f'(l) = \beta f(l)$ i $[0, l]$.

Lösning: Problemet är ett reguljärt Sturm-Liouville-problem.

$\lambda < 0$: $\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$ ger

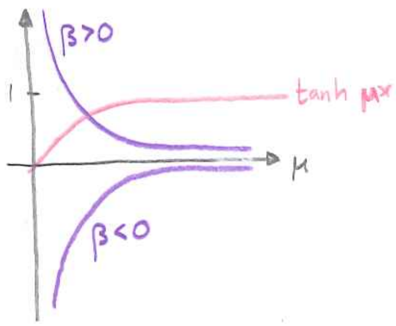
$f = a\cosh \mu x + b \sinh \mu x$.

$b = 0$, ty $f'(0) = 0$.

$f(x) = \cosh \mu x$, $f'(x) = \mu \sinh \mu x$

$f'(l) = \beta f(l)$ ger $\mu \sinh \mu x = \beta \cosh \mu x$

$\tanh \mu x = \frac{\beta}{\mu}$



Om $\beta \le 0$: Ingen lösning

Om $\beta > 0$: En lösning $\mu_0 > 0$.

Då är $\cosh \mu_0 x$ en egenfunktion med egenvärde $-\mu_0^2$.

$\lambda = 0$: $f''(x) = 0$, $f(x) = ax + b$

$f'(0) = 0 \Rightarrow a = 0$

$f'(\ell) = \beta f(\ell) \Rightarrow 0 = \beta b$

Detta går enbart om $\beta = 0$.

För $\beta = 0$ är $f(x) = 1$ en egenfunktion, med egenvärde $\lambda = 0$.

$\lambda > 0$: $\lambda = \nu^2$, $\nu > 0$

$f(x) = a \cos \nu x + b \sin \nu x$

$f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

$f(x) = \cos \nu x$

$f'(x) = -\nu \sin \nu x$

$f'(\ell) = \beta f(\ell) \Rightarrow -\nu \sin \nu\ell = \beta \cos \nu\ell$

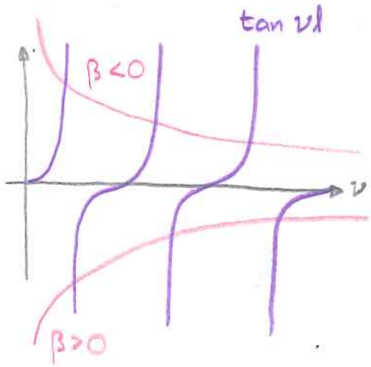
$\tan \nu\ell = -\dfrac{\beta}{\nu}$

Får en växande följd av lösningar $\nu_1, \nu_2, \ldots$

Egenfunktioner blir

$\phi_n(x) = \cos \nu_n x$,

med egenvärden $\lambda_n = \nu_n^2$



Egenfunktioner är alltså

$\phi_n(x) = \cos \nu_n x$, $n = 1, 2, \ldots$ för alla β;

dessutom $\phi_0(x) = 1$ då $\beta = 0$, och

$\phi_n(x) = \cosh \mu_0 x$, då $\beta > 0$.

Normalisera alla ϕ_n, det vill säga, bestäm $\dfrac{1}{\|\phi_n\|}\phi_n$.

Tag $n > 0$: $\|\phi_n\|^2 = \displaystyle\int_0^\ell \cos^2 \nu_n x \, dx = \int_0^\ell \frac{1 + \cos 2\nu_n x}{2} dx = \frac{\ell}{2} + \frac{\sin 2\nu_n \ell}{4\nu_n} =$

$$= \frac{\ell}{2} + \frac{\sin \nu_n\ell \cos \nu_n \ell}{2\nu_n(\sin^2 \nu_n\ell + \cos^2 \nu_n \ell)} = \frac{\ell}{2} + \frac{\tan \nu_n \ell}{2\nu_n(1 + \tan^2 \nu_n \ell)} = \frac{\ell}{2} + \frac{-\beta/\nu_n}{2\nu_n(1 + \beta^2/\nu_n^2)} =$$

$$= \frac{l}{2} - \frac{\beta}{2(\nu_n^2+\beta^2)} = \frac{l}{2} - \frac{\beta}{2(\lambda_n+\beta^2)}$$

$$n=0,\ \beta=0: \quad \|\phi_0\|^2 = \int_0^l 1\,dx = l$$

$$n=0,\ \beta>0: \quad \|\phi_0\|^2 = \int_0^l \cosh^2 \mu_0 x\,dx = \int_0^l \frac{1+\cosh 2\mu_0 x}{2}\,dx = \frac{l}{2} + \frac{\sinh 2\mu_0 l}{4\mu_0} =$$

$$= \frac{l}{2} + \frac{\sinh\mu_0 l \cosh \mu_0 l}{2\mu_0(\cosh^2 \mu_0 l - \sinh^2 \mu_0 l)} = \frac{l}{2} + \frac{\tanh \mu_0 l}{2\mu_0(1-\tanh^2 \mu_0 l)} =$$

$$= \frac{l}{2} + \frac{\beta/\mu_0}{2\mu_0(1-\beta^2/\mu_0^2)} = \frac{l}{2} + \frac{\beta}{2(\mu_0^2-\beta^2)} = \frac{l}{2} - \frac{\beta}{2(\lambda_0+\beta^2)}$$

De normaliserade egenfunktionerna blir

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{l}{2} - \frac{\beta}{2(\lambda_n+\beta^2)}}}\cos \nu_n x, \quad \text{för alla } \beta, \text{ och för } n=1,2,\ldots$$

och dessutom...

EÖ21 $\varphi_n(x) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\pi x} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_m \rangle$$

$$\widehat{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\pi x}} = \chi_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$$

$$\widehat{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\pi x} e^{inx}} = \chi_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\xi - n) = \chi_{(n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2})}(\xi)$$

Alltså $\langle \hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2})}(\xi)\chi_{(m-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2})}(\xi)\,d\xi = 0$ om $n \neq m$.

$$\min \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=-N}^{N} c_n \varphi_n(x) \right|^2 dx$$

$$c_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \left\langle \frac{1}{1+x^2}, \phi_n \right\rangle$$

Sök istället:

$$\min \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\frac{1}{1+x^2}} - \sum_{n=-N}^{N} c_n \hat{\varphi}_n(x)\right|^2 dx$$

Är ortogonalsystemet fullständigt?

Det vill säga

$$\left\|f - \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\,\varphi_n\right\| \longrightarrow 0, \text{ då } N \longrightarrow \infty ?$$

Detta är enligt Plancherel ekvivalent med

$$\left\|\hat{f} - \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\,\hat{\varphi}_n\right\| \longrightarrow 0, \text{ då } N \longrightarrow \infty .$$

Men det senare systemet kan ej vara fullständigt, ty $\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\,\hat{\varphi}_n$ är styckvis konstant.

17/2 2011

Besselfunktioner

Betrakta den tvådimensionella vågekvationen $u''_{tt} = c^2 \Delta u$ i polära koordinater, $u = u(r,\theta,t)$.

$$u''_{tt} = c^2\left(u''_{rr} + \frac{1}{r}u'_r + \frac{1}{r^2}u''_{\theta\theta}\right)$$

Separation, sök lösningar av typ $u = R(r)\,\Theta(\theta)\,T(t)$.

Ekvationen blir

$$R(r)\Theta(\theta)T''(t) = c^2\left(R''(r)\Theta(\theta)T(t) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta)T(t) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta)T(t)\right).$$

Eller

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Vi får

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda.$$

Antag $\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$.

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} + \mu^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \nu^2, \quad \nu \geq 0$$

Vi får

$$r^2R'' + rR' + (\mu^2r^2 - \nu^2)R = 0. \qquad (*_\mu)$$

Notera att

$$rR'' + R' - \frac{\nu^2}{r}R + \mu^2 rR = 0,$$

$$(rR')' + p(r)R + \mu^2 w(r)R = 0$$

med lämpliga randvärden är ett reguljärt Sturm-Liouville-problem i $[a,b]$, om $a>0$. Är $a=0$ är dock problemet singulärt.

Sätt nu $\mu r = x$ i $(*_\mu)$, och $R(r) = f(x) = f(\mu r)$. Då blir $R'(r) = \mu f'(\mu r)$, $R'' = \mu^2 f''(\mu r)$, och ekvationen kan skrivas om som

$$\mu^2r^2 f''(\mu r) + \mu r f'(\mu r) + (\mu^2r^2 - \nu^2)f(\mu r),$$

eller

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + (x^2 - \nu^2) f(x) = 0. \qquad (*)$$

Denna ekvation kallas Bessels ekvation av ordning ν.

Att f satisfierar $(*)$ är ekvivalent med att $R(r) = f(\mu r)$ satisfierar $(*_\mu)$.

Om $\nu = n \in \mathbf{N}$, är

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

en lösning till $(*)$.

Vi vill nu definiera J_ν för alla $\nu \in \mathbf{R}$. Detta kan uppnås genom att använda gammafunktionen.

$$m! = \int_0^\infty e^{-x} x^m \, dx, \quad (m-1)! = \int_0^\infty e^{-x} x^{m-1} \, dx$$

Inför alltså

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} \, dx, \quad \text{för } z \text{ med } \operatorname{Re}[z] > 0.$$

Γ kan fortsättas meromorft (holomorft utöver i ett ändligt antal punkter), så att den blir holomorf i hela planet, utöver i negativa heltalspunkter, där den har poler.

$$\Gamma(m) = (m-1)!, \quad m \in \mathbf{N}.$$
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Sätt $J_\nu(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$.

Om $\nu \in \mathbf{Z}_- = \{-1, -2, \dots\}$ tolkar vi $\Gamma(\nu+k+1)$ som 0 för $k = 0, \dots, -\nu-1$, det vill säga, med $\nu = -n \in \mathbf{Z}_+ = \{1, 2, \dots\}$ för $k = 0, \dots, n-1$ får vi

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \{k = k' - n\} = \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'+n}}{(k'+n)!\,\Gamma(k'+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+n} =$$

$$= (-1)^n J_n(x).$$

Alltså har vi definierat J_ν för alla $\nu \in \mathbf{C}$.

J_ν och $J_{-\nu}$ löser samma ekvation (*). För $\nu \notin \mathbb{Z}$ är dessa linjärt oberoende, och bildar en bas i lösningsrummet.

Man brukar för alla $\nu \in \mathbb{R}$ använda en bas J_ν, Y_ν, där Y_ν är en annan lösning. Y_ν är singulär i 0.

För stora x:

$$J_\nu \approx k \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(x-c),$$

$$Y_\nu \approx k \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(x-c),$$

där k och c är ν-beroende konstanter.

Sats 5.2 (A): För varje $\nu \in \mathbb{R}$ har J_ν oändligt många nollställen $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, i $\{x>0\}$. Mer precis finns en konstant β så att $\lambda_k = k\pi + \beta + o(k)$, där $o(k) \longrightarrow 0$, då $k \longrightarrow \infty$.

Randvillkor för $(*_\mu)$ i $[0,b]$ är ofta.

i 0: R ska vara begränsad (eller kontinuerlig)

i b: $R(b)=0$ eller $R'(b)=0$, eller $\alpha R(b) + \tilde{\alpha} R'(b) = 0$, $\alpha, \tilde{\alpha} \neq 0$.

$R(r) = f(\mu r)$, där f blir på formen $\alpha J_\nu + \beta Y_\nu$ (α, β nya konstanter),

där Y_ν förkastas på grund av randvillkoret i 0.

$R(r) = J_\nu(\mu r)$ ska satisfiera randvillkoret i b. Vi får $J_\nu(\mu b) = 0$, det vill säga $\mu = \frac{\lambda_k}{b}$, där λ_k är nollställen till $J_\nu = 0$, $J_\nu' = 0$ eller $\alpha J_\nu + \tilde{\alpha}\mu J_\nu' = 0$.

Det vill säga $\frac{\alpha b}{\tilde{\alpha}} J_\nu(\mu b) + \mu b J_\nu'(\mu b) = 0$.

Sätt $c = \frac{\alpha b}{\tilde{\alpha}}$. Då är μb ett nollställe till funktionen $cJ_\nu(x) + J_\nu'$.

Mellanfallet $J_\nu' = 0$ täcks in ovan med $c=0$.

Oftast är $c \geq 0$.

Sats 5.2 (B): Samma sak gäller för nollställena till $cJ_\nu(x) + J_\nu'(x) = 0$, för $c \geq 0$, fast β beror av c $(\beta = \beta(c, \nu))$.

$$r^2R'' + rR' + (\mu^2r^2 - \nu^2)R = 0 \quad ; \quad [0, b] \qquad (*_\mu)$$

$\mu > 0, \quad \nu \geq 0$

Randvillkor:

R begränsad vid 0

$R(b) = 0$ eller $\alpha R(b) + \tilde{\alpha} R'(b) = 0, \ \tilde{\alpha} \neq 0$

Ekvationen $(*_\mu)$ har den allmänna lösningen

$$R(r) = A J_\nu(\mu r) + B Y_\nu(\mu r).$$

Randvillkoret vid 0 ger $B = 0$, det vill säga

$$R(r) = J_\nu(\mu r).$$

Randvillkoret vid b ger $J_\nu(\mu b) = 0$, eller att $cJ_\nu(\mu b) + \mu b J_\nu'(\mu b) = 0$, där $c = \dfrac{\alpha b}{\tilde{\alpha}}$.

Vi kommer att ha $c \geq 0$.

$\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ nollställen till $J_\nu(x)$.

$\{\tilde{\lambda}_k\}_{k=1}^\infty$ nollställen till $cJ_\nu(x) + xJ_\nu'(x)$.

Vi får $\mu = \dfrac{\lambda_k}{b}$ respektive $\mu = \dfrac{\tilde{\lambda}_k}{b}$.

Egenfunktionerna till det singulära Sturm-Liouville-problemet $(*_\mu)$ med randvillkor är alltså

$$R(r) = J_\nu\left(\frac{\lambda_k}{b}r\right) \quad \text{respektive} \quad R(r) = J_\nu\left(\frac{\tilde{\lambda}_k}{b}r\right), \qquad k = 1, 2, \dots$$

Sats 5.3 (Huvudsats om ortogonalitet för Besselfunktioner):

Antag $\nu \geq 0$, $b > 0$, $c \geq 0$. Sätt $w(x) = x$, och ta $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\tilde{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ som ovan. Då gäller:

(a) Funktionerna $J_\nu\left(\frac{\lambda_k}{b}x\right) = \phi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ bildar ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2_w([0,b])$, och $\|\phi_k\|_w^2 = \frac{b^2}{2} J_{\nu+1}(\lambda_k)^2$.

(b) Om $\nu c \neq 0$ gäller detsamma för $J_\nu\left(\frac{\tilde{\lambda}_k}{b}x\right) = \Psi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$
I fallet $\nu = 0$, $c = 0$ måste man tillfoga $\Psi_0 = 1$.

$$\|\Psi_k\|_w^2 = \frac{b^2(\tilde{\lambda}_k^2 - \nu^2 + c^2)}{2\tilde{\lambda}_k^2} J_\nu(\tilde{\lambda}_k)^2.$$

Vi kan alltså utveckla varje $h \in L^2_w([0,b])$ som $h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$ eller $h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Psi_k$, där $c_k = \frac{1}{\|\phi_k\|_w^2}\langle h, \phi_k\rangle_w$ (och motsvarande för Ψ_k).

Om $\nu = c = 0$ måste vi summera från $k = 0$.

Genererande funktion

Sats: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = e^{\frac{1}{2}x(z - \frac{1}{z})}$ för alla $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Serien ovan är en Laurentserie.

Bevis: $e^{\frac{1}{2}\frac{x}{z}}$ ...

$$e^{\frac{1}{2}xz} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^j, \quad e^{-\frac{1}{2}\frac{x}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z^k}\left(\frac{x}{2}\right)^k$$

$$e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} z^{j-k}\frac{(-1)^k}{j!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{j+k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-k}^{\infty} z^n \frac{(-1)^k}{(n+k)!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(n+k)!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n.$$

Sats (Bessels formler):

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta - in\theta}\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta - n\theta)\, d\theta \qquad \text{för alla } x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{Z}.$$

$$J_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin\theta)\cos n\theta\, d\theta, \qquad n \text{ jämnt.}$$

$$J_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(x\sin\theta)\sin n\theta\, d\theta, \qquad n \text{ udda.}$$

Bevis: Tag $z = e^{i\theta}$ i den genererande funktionen.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta} = e^{\frac{1}{2}x(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} = e^{ix\sin\theta}$$

Detta är en 2π-periodisk funktion av θ för varje fixt x, och vi har en Fourierserie $\theta \mapsto e^{ix\sin\theta}$.

Koefficienter: $$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta} e^{-in\theta}\, d\theta$$

Tag realdel: $$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta - n\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta - n\theta)\, d\theta$$

$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

Tag n jämnt:

$$J_n(x) = J_{-n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta + in\theta}\, d\theta$$

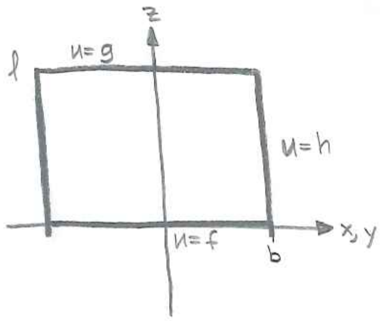
$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta} \cdot \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta}\cos\theta\, d\theta$$

Tag realdel: $$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta)\cos n\theta\, d\theta = \left\{\begin{matrix}\text{Period } \pi, \text{ ty } n \text{ jämnt,} \\ \text{och } \cos\theta = \cos(-\theta)\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(x\sin\theta)\cos n\theta\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin\theta)\cos n\theta\, d\theta$$

För n udda är förfarandet analogt.

Tillämpning: Dirichlets problem i cylinder



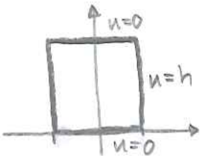
Cylindriska koordinater (r,θ,z), $u=u(r,\theta,z)$.

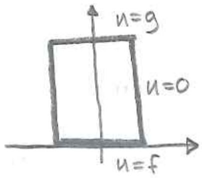
Antag att allt är oberoende av θ, $f=f(r)$, $g=g(r)$, $h=h(z)$.

Då blir även u oberoende av θ, $u=u(r,z)$.

Ekvationen blir $\quad u''_{rr}+\frac{1}{r}u'_r+\underbrace{\frac{1}{r^2}u''_{\theta\theta}}_{=0}+u''_{zz}=0$

Superposition:

1. 

2. 

1. Randvillkor: $u(r,0)=0$, $u(r,\ell)=0$, $u(b,z)=h(z)$

$u=R(r)\,Z(z)$

$$\frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R}=-\frac{Z''}{Z'}=\lambda, \quad \text{konstant}$$

$Z''=-\lambda Z$, $\quad Z(0)=0$, $Z(\ell)=0$

$\lambda=\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$

$Z=\sin\frac{n\pi}{\ell}z$, $\quad n=1,2,\dots$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R' - \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 R = 0$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 r^2 R(r) = 0$$

Vi har ekvationen $r^2R''(r) + rR'(r) - (\mu^2r^2 + \nu^2)R(r) = 0,$ $(+_\mu)$

med $\nu = 0$.

Denna kallas Bessels modifierade ekvation.

Lösningar till $(+_\mu)$ ges av $R(r) = f(\mu r)$, där f satisfierar

$$x^2 f''(x) + xf'(x) - (x^2 + \nu^2) f(x) = 0. \qquad (+)$$

$(+)$ har lösningar I_ν, K_ν, de så kallade modifierade Besselfunktionerna.

K_ν är singulär i 0, men I_ν är kontinuerlig i 0.

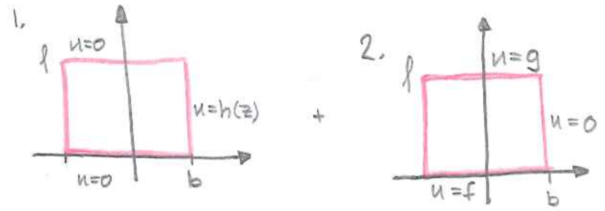
I_ν strängt växande och icke-negativ (eventuellt noll i 0).

Vi får här $R(r) = AI_0(\frac{\pi n}{\ell}r) + BK_0(\frac{\pi n}{\ell}r)$.

$B = 0$, ty R ska vara begränsad vid 0, och alltså

$$R(r) = I_0\left(\frac{\pi n}{\ell}r\right)$$

Fortsättning, Dirichlets problem i cylinder



1. $Z(0) = Z(\ell) = 0$

$\lambda = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad Z(z) = \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} z\right)$

$r^2 R''(r) + rR'(r) - \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 r^2 R(r) = 0$

Bessels modifierade ekvation med $\nu = 0$, $\mu = \frac{n\pi}{\ell}$

Lösning: $R(r) = A I_0\left(\frac{\pi n}{\ell} r\right) + B K_0\left(\frac{\pi n}{\ell} r\right)$

R begränsad vid $0 \Rightarrow B = 0$

$R(r) = I_0\left(\frac{\pi n}{\ell} r\right)$

Alltså $u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I_0\left(\frac{\pi n}{\ell} r\right) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} z\right)$.

$u(b, z) = h(z)$ ger $\sum_{n=1}^{\infty} c_n I_0\left(\frac{\pi n}{\ell} b\right) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} z\right) = h(z), \quad 0 < z < \ell$.

Detta ger c_n.

2. Vi har $r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda r^2 R(r) = 0$.

Dela upp i tre fall:

$\underline{\lambda < 0}$: $\lambda = -\mu^2, \quad r^2 R'' + rR' + \mu^2 R = 0$

Lösning: $R(r) = A J_0(\mu r) + B Y_0(\mu r)$

Randvillkor: R begränsad vid 0, $R(b) = 0$ ger $B = 0$ och $J_0(\mu b) = 0$.

Om $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ är nollställen för J_0 på $\mathbf{R}_+$, så får vi

$\mu = \frac{\lambda_k}{b}, \quad R(r) = J_0\left(\frac{\lambda_k}{b} r\right)$

$\underline{\lambda > 0}$: $\lambda = \mu^2$, $\quad r^2 R'' + rR' - \mu^2 r^2 R = 0$

Modifierad Besselekvation med lösningar

$$R(r) = A I_0(\mu r) + B K_0(\mu r).$$

R begränsad vid 0 ger $B = 0$.

$R(b) = 0$ ger $I_0(\mu b) = 0$, vilket är omöjligt.

$\underline{\lambda = 0}$: $r^2 R'' + rR' = 0$

Eulerekvation med lösningar

$$R(r) = A + B \ln r.$$

Randvillkor ger $A = 0$, $B = 0$.

Alltså ger bara $\lambda < 0$ lösningar. Med $\lambda = -\mu^2 = -\left(\frac{\lambda_k}{b}\right)^2$ fås

$$Z'' = \left(\frac{\lambda_k}{b}\right)^2 Z.$$

Lösningar till denna är

$$Z(z) = A \sinh \frac{\lambda_k z}{b} + B \sinh\left(\frac{\lambda_k (l - z)}{b}\right).$$

Ansätt $\quad u(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\lambda_k r}{b}\right)\left[A_k \sinh\left(\frac{\lambda_k z}{b}\right) + B_k \sinh\left(\frac{\lambda_k (l - z)}{b}\right)\right].$

$u(r,0) = f(r)$ ger $\quad \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\lambda_k r}{b}\right) B_k \sinh\left(\frac{\lambda_k l}{b}\right) = f(r).$

Enligt sats 5.3 är $J_0\left(\frac{\lambda_k r}{b}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$ ett fullständigt ortogonalsystem i $[0, b]$ med $w(r) = r$.

f kan alltså utvecklas som $f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0\left(\frac{\lambda_k r}{b}\right)$, där

$$c_k = \frac{1}{\|J_0(\frac{\lambda_k r}{b})\|_w^2} \int_0^b f(r) J_0\left(\frac{\lambda_k r}{b}\right) r \, dr.$$

Här är $\|J_0(\frac{\lambda_k r}{b})\|_w^2 = \frac{b^2 J_1(\lambda_k)^2}{2}$.

Får $B_k = \dfrac{c_k}{\sinh\left(\frac{\lambda_k l}{b}\right)}$.

$u(r,l) = g(r)$ ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\lambda_k r}{b}\right) A_k \sinh\left(\frac{\lambda_k l}{b}\right) = g(r).$$

A_k bestäms analogt.

VÅGEKVATIONEN I CIRKELSKIVA, FORTSÄTTNING

$u''_{tt} = c^2 \Delta u$, $u = u(r,\theta,t)$, $r<b$, $t>0$

$u''_{tt} = c^2 (u''_{rr} + \frac{1}{r} u'_r + \frac{1}{r^2} u''_{\theta\theta})$

$u = R(r)\,\Theta(\theta)\,T(t)$ gav

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda,$$

Randvillkor: $u(b,\theta,t) = 0$

Initialvillkor: $u(r,\theta,0) = f(r,\theta)$

$u'_t(r,\theta,0) = 0$

Vi antog $\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, och fick

$$\frac{r^2R'' + rR' + \mu^2 r^2 R}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = -\nu^2,$$

med $\Theta(\theta) = \alpha\cos\nu\theta + \beta\sin\nu\theta$, där $\nu = n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

$r^2R'' + rR' + (\mu r^2 - n^2)R = 0$

Om istället $\lambda = 0$ får vi

$r^2R'' + rR' - n^2 R = 0$.

Detta är en Eulerekvation, med lösningar

$R(r) = \alpha r^n + \beta r^{-n}$, $n \neq 0$.

Randvillkor: R begränsad vid 0, $R(b)=0$, ger att $\alpha=\beta=0$, vilket vi ej är intresserade av.

Fallet $n=0$ ger $R(r)=\alpha+\beta\ln r$, och åter $\alpha=\beta=0$, vilket är ointressant.

Om $\lambda>0$ får vi, med $\lambda=\mu^2$

$$r^2R''+rR'-(\mu^2r^2+n^2)R=0,$$

vilket är Bessels ekvation, med lösningar

$$R(r)=\alpha I_n(\mu r)+\beta K_n(\mu r).$$

Randvillkor: R begränsad vid 0 ger $\beta=0$. $R(b)=0$ ger $I_n(\mu b)=0$, vilket ej är möjligt.

Alltså är det enda intressanta fallet $\lambda<0$. I detta får vi

$$R(r)=\alpha J_n(\mu r)+\beta Y_n(\mu r).$$

Randvillkoren ger $\beta=0$ och $J_n(\mu b)=0$, så att $\mu=\frac{\lambda_{kn}}{b}$, där $\{\lambda_{kn}\}_{k=1}^{\infty}$ är nollställena till J_n på $\mathbf{R}_+$. Alltså

$$\lambda=-\left(\frac{\lambda_{kn}}{b}\right)^2.$$

$$R(r)=J_n\left(\frac{\lambda_{kn}r}{b}\right)$$

För T: $T''=-c^2\left(\frac{\lambda_{kn}}{b}\right)^2T$

$$T=\gamma\cos\left(\frac{c\lambda_{kn}}{b}t\right)+\delta\sin\left(\frac{c\lambda_{kn}}{b}t\right)$$

$T'(0)=0$ ger $\delta=0$,

och alltså

$$T(t)=\cos\left(\frac{c\lambda_{kn}}{b}t\right).$$

Alltså är de separerade lösningarna

$$u = J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} r\right)\left(\alpha_{kn} \cos n\theta + \beta_{kn} \sin n\theta\right), \quad n = 0, 1, \dots; \quad k = 1, 2, \dots$$

Ansätt lösningar

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{kn} J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} r\right) \cos n\theta \cos\left(\frac{c\lambda_{kn}}{b} t\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \beta_{kn} J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} r\right) \sin n\theta \cos\left(\frac{c\lambda_{kn}}{b} t\right)$$

Initialvillkor $u(r,\theta,0) = f(r,\theta)$ ger

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{kn} J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} r\right) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \beta_{kn} J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} r\right) \sin n\theta = f(r,\theta).$$

Sats: Funktionerna

$$(r,\theta) \longmapsto J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} r\right) \cos n\theta, \quad n = 0, 1, \dots \quad \text{och}$$

$$(r,\theta) \longmapsto J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} r\right) \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

med $k = 1, 2, \dots$ bildar tillsammans ett fullständigt ortogonalsystem i $[0,b] \times [-\pi, \pi]$ med vikten $w(r) = r$, det vill säga i $L^2([0,b]\times[-\pi,\pi]; r\,dr\,d\theta)$, det vill säga i $L^2(D)$, där D är skivan $x^2 + y^2 < b^2$, med integration $\int \dots dx\,dy$.

Vi har då

$$\alpha_{kn} = \frac{1}{\left\| J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} r\right) \cos n\theta \right\|_w^2} \iint_D f(r,\theta) J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} r\right) \cos n\theta \; r\,dr\,d\theta,$$

$$\beta_{kn} = \frac{1}{\left\| J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} r\right) \sin n\theta \right\|_w^2} \iint_D f(r,\theta) J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} r\right) \sin n\theta \; r\,dr\,d\theta.$$

$$\left\| J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} r\right) \cos n\theta \right\|_w^2 = \left\| J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} r\right) \right\|_w^2 \left\| \cos n\theta \right\|_w^2$$

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{k_n} J_n\left(\frac{\lambda_{k_n}}{b} r\right)\cos n\theta \cos\frac{c\lambda_{k_n} t}{b} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{k_n} J_n\left(\frac{\lambda_{k_n}}{b} r\right)\sin n\theta \cos\frac{c\lambda_{k_n} t}{b}$$

Frekvenserna proportionella mot λ_{k_n}.

Sats 5.4: Funktionerna $J_n\left(\frac{\lambda_{k_n}}{b} r\right)\cos n\theta$, $n = 0, 1, \dots$ och $J_n\left(\frac{\lambda_{k_n}}{b} r\right)\sin n\theta$, $n = 1, 2, \dots$, bildar ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2_w([0,b]\times[-\pi,\pi])$ med $w(r) = r$.

Bevis: För ortogonalitet, ta $(n,k) \neq (n',k')$.

$$\iint J_n\left(\frac{\lambda_{k_n}}{b} r\right)\cos n\theta \, J_{n'}\left(\frac{\lambda_{k'_{n'}}}{b} r\right)\cos n'\theta \, r\,dr\,d\theta =$$

$$= \underbrace{\int J_n\left(\frac{\lambda_{k_n}}{b} r\right) J_{n'}\left(\frac{\lambda_{k'_{n'}}}{b} r\right) r\,dr}_{=0 \text{ om } n=n' \text{ och } k\neq k'} \underbrace{\int \cos n\theta \cos n'\theta \, d\theta}_{=0 \text{ om } n\neq n'}$$

Fullständigt: Visa att $h \in L^2_w([0,b]\times[-\pi,\pi])$ och h ortogonal mot alla funktioner ovan medför att $h = 0$.

Får $0 = \int J_n\left(\frac{\lambda_{k_n}}{b} r\right) \underbrace{\int h(r,\theta)\cos n\theta \, d\theta}_{\overset{\text{def}}{=} h_n(r)} \, r\,dr$ för alla n, k.

Funktionen $h_n(r)$ är ortogonal mot alla $J_n\left(\frac{\lambda_{k_n}}{b} r\right)$ i $L^2_w([0,b])$ för alla k, så h_n är 0-funktionen (i L^2_w-mening), för alla n. Detsamma gäller för $\sin n\theta$.

Fixera r. Då är $h_n(r)$ Fourierkoefficienter för funktionen $\theta \longmapsto h(r,\theta)$, som alltså är 0, och $h(r,\theta) = 0$ för alla θ.

Alltså $h(r,\theta) = 0$ för alla r, θ.

Ortogonalpolynom

Inför $\mathbf{P}_n = \{\text{Polynom av högst grad } n\}$.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$\mathbf{P}_n$ bildar ett vektorrum. En bas är $\{x^k\}_{k=0}^n$, och vi ser

alltså att $\dim \mathbf{P}_n = n+1$.

Vi ska betrakta följder $\{P_n\}_{n=0}^\infty$, där P_n är ett polynom av precis grad n, så att

$$P_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k, \quad \text{där } \alpha_n \neq 0.$$

Lemma 6.1: Då är $\{P_k\}_{k=0}^n$ en bas i $\mathbf{P}_n$ för alla n.

Bevis: Antalet är dimensionen, så det räcker att visa att polynomen är linjärt oberoende.

Antag $\sum_{k=0}^n c_k P_k = 0$.

$$c_n(\alpha_n x^n + \dots) + c_{n-1}(\alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots) + c_{n-2}(\alpha_{n-2}x^{n-2} + \dots) + \dots + c_0\alpha_0 = 0$$

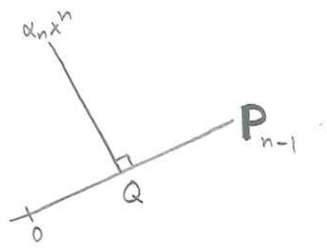
Vi får $c_n \alpha_n x^n$ + lägre termer $= 0$, så $c_n = 0$, och sedan $c_{n-1}\alpha_{n-1}x^{n-1}$ + lägre $=0$, så $c_{n-1} = 0$, och så vidare, vilket skulle visas.

Vi vill ha P_n ortogonala i $L^2_w([a,b])$, där $a,b \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, $w \geq 0$ i $[a,b]$.

Då är P_n bestämda av $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, ty $P_n \perp P_m$ för alla $m<n$, så $P_n \perp \mathbf{P}_{n-1}$.

Skriv $P_n = \alpha_n x^n - Q$, $Q \in \mathbf{P}_{n-1}$.

$(\alpha_n x^n - Q) \perp \mathbf{P}_{n-1}$.



Bästa approximation (den ortogonala projektionen) av $\alpha_n x^n$ på P_{n-1}.

Q och därmed P_n är entydigt bestämda.

Om $P_0, \dots P_{n-1}$ redan är konstruerade och ortogonala är

$$Q = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\|P_k\|_w^2} \langle \alpha_n x^n, P_k \rangle_w.$$

Alternativt: Bestäm koefficienter i Q så att $\alpha_n x^n - Q \perp 1, x, \dots, x^{n-1}$.

Exempel: Vikt $w=1$ i $[-1,1]$.

$P_0 = \alpha_0 \cdot 1 = 1$ $\qquad \alpha_0 = 1$.

$P_1 = \alpha_1 x + a = x + a$ $\qquad \alpha_1 = 1$

$$0 = \langle x+a, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} (x+a) \cdot 1 \, dx = 2a,$$

så $a = 0$.

Detta är Legendrepolynomen.

Tag $\alpha_2 = \frac{3}{2}$, $P_2 = \frac{3}{2}x^2 + bx + c \perp 1, x$.

Får $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2}x^2 + bx + c\right) x \, dx = b \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = 0 \Rightarrow b = 0$

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2}x^2 + bx + c\right) \cdot 1 \, dx = 1 + 2c = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}.$$

Så $P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

Hermitepolynom

Vikt $w(x) = e^{-x^2}$ på hela $\mathbf{R}$.

Taylors formel: $e^{-(x+h)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right) h^n$

$e^{-(x-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n z^n$, där

$a_n = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot H_n(x)$, där $H_n(x)$ är ett polynom av grad n.

Polynomet $H_n(x)$ kallas Hermitepolynomet av grad n, alltså:

Definition: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ (Rodrigues formel)

Vi får $e^{-(x-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-x^2} H_n(x) z^n$, vilket medför:

Sats 6.13: $e^{2xz - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) z^n$ (Genererande funktion)

$H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_n(x) = (-1)^n (-2x)^n +$ lägre ...

$H_n(x) = 2^n x^n +$ lägre..., $\alpha_n = 2^n$, H_n av grad n.

Sats 6.14: H_n är ortogonala i $L^2_w(\mathbf{R})$, $w(x) = e^{-x^2}$, och dessutom

$\| H_n(x) \|_w^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$

Bevis: Tag $m \leq n$.

$$\langle H_m, H_n \rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right) e^{-x^2} dx =$$

$$= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx = \{\text{Partialintegrera}\} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} H_m(x) e^{-x^2} dx$$

Om $m < n$ är $\frac{d^n}{dx^n} H_m = 0$, så ortogonaliteten följer.

Om $m=n$ är $\frac{d^n}{dx^n} H_n = \frac{d^n}{dx^n} 2^n x^n = 2^n n!$, och

$$\langle H_m, H_m \rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} 2^n n! e^{-x^2} = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Sats 6.12: Ortogonalsystemet $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ är fullständigt i $L^2_w(\mathbf{R})$.

Bevis: Antag $f \in L^2_w(\mathbf{R})$ är ortogonal mot alla H_n. Vi vill visa att $f=0$.

f ortogonal mot alla $H_n \Rightarrow f$ ortogonal mot alla polynom i L^2_w.

Ska visa att $e^{-x^2} f(x) \equiv 0$.

$$\mathcal{F}[e^{-x^2} f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) e^{-x\xi} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\xi)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) x^n \, dx = 0$$

Så $\mathcal{F}[e^{-x^2} f(x)] = 0$, och alltså $e^{-x^2} f(x) = 0$, varför $f=0$, varpå satsen följer.

Differentialekvation:

$$H_n'(x) = (-1)^n \frac{d}{dx}\left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right) = (-1)^n e^{x^2}\left(2x \frac{d^n}{dx^n} + \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\right) e^{-x^2} = 2x H_n(x) - H_{n+1}(x)$$

(Detta ger en rekursionsformel för H_{n+1}, $H_{n+1} = 2x H_n - H_n'$.)

Deriva:

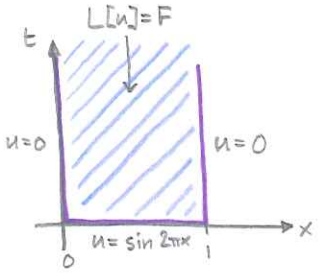
$$H_n''(x) = 2H_n(x) + 2x H_n'(x) - H_{n+1}'(x)$$

EÖ28

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t \sin x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0 = u(1,t)$$

$$u(x,0) = \sin 2\pi x$$



Lösning:

Fungerar steady-state? Nej, ty $t\sin x = F \neq F(x)$.

Försök med variabla koefficienter.

Ansätt $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b(t) \sin \pi n x$.

Vi ser att $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$.

Ekvationen blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \sin \pi n x + \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n)^2 b_n(t) \sin \pi n x = t \sin x.$$

Initialvillkor ger $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \sin \pi n x = \sin 2\pi x$, så $b_n(0) = 0$, om $n \neq 2$. $b_2(0) = 1$

Utveckla $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \pi n x$. Koefficienterna blir

$$\beta_n = 2\int_0^1 \sin x \sin \pi n x \, dx = \int_0^1 (\cos(\pi n - 1)x - \cos(\pi n + 1)x)\, dx = \ldots = (-1)^{n+1} \sin 1 \frac{2\pi n}{\pi^2 n^2 - 1}.$$

Alternativt, använd BETA:

$$\sin \alpha t = \frac{2 \sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 - \alpha^2} \sin nt, \quad |t| < \pi, \quad \alpha \notin \mathbb{Z}.$$

Tag $t = \pi x$, och välj $\alpha = \frac{1}{\pi}$.

Identifiera koefficienter i ekvationen:

$$b_n'(t) + \pi^2 n^2 b_n(t) = \beta_n(t).$$

För att lösa den senare ekvationen, multiplicera med den integrerande faktorn $e^{\pi^2 n^2 t}$:

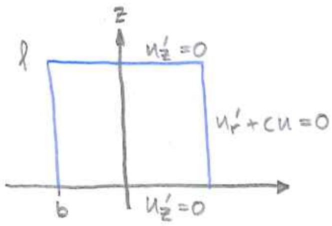
$$\left(e^{\pi^2 n^2 t} b_n(t)\right)' = \beta_n t\, e^{\pi^2 n^2 t}$$

Alltså $b_n(t) = e^{-\pi^2 n^2 t}\left(b_n(0) + \int_0^t \beta_n \tau e^{\pi^2 n^2 \tau}\, d\tau\right) = e^{-\pi^2 n^2 t} + \beta_n\left(\frac{t}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{\pi^4 n^4}\left(1 - e^{-\pi^2 n^2 t}\right)\right).$

Slutligen får vi

$$u(x,t) = e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n b_n(t) \sin \pi n x.$$

5.5.1



$u_t' = k \nabla^2 u$

$u = u(r, \theta, z, 0)$

$u_z'(r, \theta, 0, t) = 0 \qquad u_z'(r, \theta, \ell, t) = 0$

$u_r'(b, \theta, z, t) + c u(b, \theta, z, t) = 0 \;, \qquad u(r, \theta, z, 0) = A$

Inget θ-beroende, $u = u(r, z, t)$.

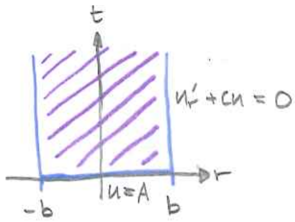
Betrakta motsvarande tvådimensionella problem:

$$v_t' = k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$v(x, y, t) = v(r, \theta, t), \qquad v_r' + cv = 0$

Då är $v(x, y, z, t) = v(x, y, t)$ en lösning till det givna problemet. Denna lösning är dessutom entydig, så vi har inget z-beroende, $u = u(r, t)$.

Ekvationen blir



$$u_t' = k\left(u_{rr}'' + \frac{1}{r} u_r' + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}'' + u_{zz}''\right) = k\left(u_{rr}'' + \frac{1}{r} u_r'\right).$$

$u(r, t) = R(r)\, T(t)$

$$\frac{1}{k}\frac{T'}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} = \lambda.$$

$rR'' + R' - r\lambda R = 0$

Eller:

$$r^2 R'' + rR' - \lambda r^2 R = 0$$

$\underline{\lambda > 0}$, $\lambda = \mu^2$, $r^2R'' + rR' - \mu^2 r^2 R = 0$

Bessels modifierade ekvation med $\nu = 0$.

Lösning: $\alpha I_0(\mu r) + \beta K_0(\mu r)$

Randvillkor: R begränsad vid 0, $R'(b) + cR(b) = 0$.

$\beta = 0$, ty K_0 singulär vid 0.

Vi får $R(r) = I_0(\mu r)$ ska satisfiera $R'(b) + cR(b) = 0$, det vill säga

$$\mu I_0'(\mu b) + c I_0(\mu b) = 0.$$

Inga lösningar finns, ty $I_0' > 0$, $I_0 > 0$.

$\underline{\lambda = 0}$, $rR'' + R' = 0$

$R = \alpha + \beta \ln r$

$\beta = 0$, $\alpha = 0$ (ty $c > 0$).

Ingen lösning.

$\underline{\lambda < 0}$, $r^2R'' + rR' + \mu^2 r^2 R = 0$

Bessels ekvation med $\nu = 0$.

Lösning: $\alpha J_0(\mu r) + \beta Y_0(\mu r)$

Begränsad vid 0 ger $\beta = 0$.

$R(r) = J_0(\mu r)$ ska satisfiera $R'(b) + cR(b) = 0$:

$$\mu J_0'(\mu b) + c J_0(\mu b) = 0$$

$$\mu b J_0'(\mu b) + cb J_0(\mu b) = 0$$

Låt $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara nollställen till $cb J_0(x) + x J_0'(x)$.

Vi får $\mu = \frac{\lambda_k}{b}$, för något k.

$$R(r) = J_0\left(\frac{\lambda_k}{b} r\right)$$

För T:

$$T' = -k\frac{\lambda_k^2}{b^2}T$$

Alltså

$$T = e^{-k\lambda_k^2 t/b^2}.$$

Separerade lösningar blir

$$J_0\left(\frac{\lambda_k}{b}r\right)e^{-k\lambda_k^2 t/b^2}.$$

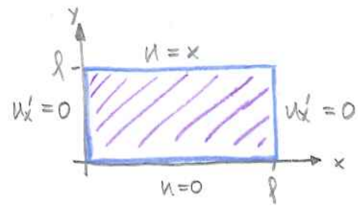
Ansätt $u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0\left(\frac{\lambda_k}{b}r\right)e^{-k\frac{\lambda_k^2}{b^2}t}$.

$u(r,0) = A$ ger $\sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0\left(\frac{\lambda_k}{b}r\right) = A$.

$$c_k = \frac{1}{\|J_0(\frac{\lambda_k}{b}r)\|_w^2}\int_0^b A J_0\left(\frac{\lambda_k}{b}r\right) r\,dr = A\frac{2\lambda_k^2}{b^2(\lambda_k^2+c^2b^2)}\frac{b^2}{\lambda_k^2}\int_0^{\lambda_k} J_0(s)\,s\,ds =$$

$$= \frac{2\lambda_k J_1(\lambda_k)}{\lambda_k^2+c^2b^2}$$

4.4.2 $\nabla^2 u = 0$



Variabelseparation: $u = X(x)Y(y)$

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda$$

För X har vi $X'' = -\lambda X$.

$$X'(0) = 0,\quad X'(\ell) = 0$$

Vi får

$$X(x) = \cos\frac{\pi n}{\ell}x,\quad \lambda = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2,\quad n = 0, 1, 2, \dots$$

För Y:

$$Y'' = \lambda Y, \quad Y = a\cosh \frac{\pi n}{\ell} y + b\sinh \frac{\pi n}{\ell} y$$

$Y(0) = 0$ ger $a = 0$.

Ansätt $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n}{\ell} x \sinh \frac{\pi n}{\ell} y$.

$u(x, \ell) = x$ ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x \sinh n\pi = x.$$

Hermitepolynom, Fortsättning

Ortogonalbas i $L^2_w(\mathbf{R})$ med vikt $w = e^{-x^2}$.

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$, vi vill finna en differentialekvation.

$$H_n''(x) = 2H_n(x) + 2x H_n'(x) - H_{n+1}'(x) \qquad (*)$$

Genererande funktion:

$$e^{2xz - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n = \{n' = n-1\} = \sum_{n'=-1}^{\infty} \frac{H_{n'+1}(x)}{(n'+1)!} z^{n'+1}$$

Derivera med avseende på x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}'(x)}{(n+1)!} z^{n+1} = 2z e^{2xz - z^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^{n+1}$$

Identifiera koefficienter:

$$\frac{H_{n+1}'(x)}{(n+1)!} = 2\frac{H_n(x)}{n!}$$

$$H_{n+1}'(x) = (n+1) H_n(x)$$

Stoppa in i $(*)$:

$$H_n''(x) = 2H_n(x) + 2x H_n'(x) - 2(n+1) H_n(x)$$

$$H_n''(x) - 2x H_n'(x) + 2n H_n(x) = 0$$

Kan vi tolka detta som ett Sturm-Liouville-problem?

$$(r(x) H_n'(x))' + p(x) H_n(x) + \lambda w(x) H_n(x) = 0 \quad ?$$

Ja, med $r(x) = e^{-x^2}$, $p(x) = 0$, $w(x) = e^{-x^2}$. Då har vi ett singulärt Sturm-Liouville-problem (med randvillkoret $f \in L^2_w(\mathbf{R})$).

$H_n(x)$ är egenfunktioner, egenvärden är $\lambda = 2n$. Vi vet redan att $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ är ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2_w(\mathbb{R})$.

Sätt nu $h_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ (h_n är de så kallade Hermitefunktionerna), så kan vi flytta oss från L^2_w till L^2.

$$\langle h_n, h_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)\, h_m(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = 0, \quad n \neq m$$

$\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ är ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2(\mathbb{R})$.

Legendrepolynom

$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ortogonala i $L^2([-1,1])$, vikt $w(x) = 1$.

$P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

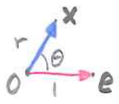
Rodrigues formel: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$

Differentialekvation: $((1-x^2) P_n'(x))' + n(n+1) P_n(x) = 0$

Singulärt Sturm-Liouville-problem med $r(x) = 1-x^2$, $p(x) = 0$, $w(x) = 1$.

Genererande funktion: $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) r^n = \frac{1}{(1+r^2-2r\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}$

Fysikalisk tolkning av den genererande funktionen:



Potential i $\mathbf{x}$: $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{e}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + r^2 - 2r\cos\theta}}$

LAPLACES EKVATION I SFÄRISKA KOORDINATER

(r, θ, ϕ), $r = |(x, y, z)| \geq 0$

$0 \leq \theta \leq \pi$, $|\phi| \leq \pi$ eller ϕ 2π-periodisk

$\nabla^2 u = 0$ i klot $|x| < R_0$. $\nabla^2 u = u''_{rr} + \frac{2}{r} u'_r + \frac{1}{r^2 \sin\theta} (\sin\theta \cdot u'_\theta)'_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} u''_{\phi\phi}$

Ofta: $u(R_0, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$

Separera: $u(r, \theta, \phi) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)$

$$\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{(\sin\theta \cdot \Theta')'}{\Theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

$$\sin^2\theta \, \frac{r^2 R'' + 2rR'}{R} + \sin\theta \, \frac{(\sin\theta \cdot \Theta')'}{\Theta} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \text{konstant}$$

Som vanligt blir konstanten $= m^2$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, och

$$\Phi(\phi) = a e^{im\phi} + b e^{-im\phi}.$$

$$\frac{r^2 R'' + 2rR'}{R} = \frac{m^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin\theta} \frac{(\Theta' \sin\theta)'}{\Theta} = \lambda$$

Vi får $r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0$ och $\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\ \Theta')' - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta + \lambda\Theta = 0$.

Gör variabelbytet $s = \cos\theta$, $\Theta(\theta) = S(s)$.

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d}{ds} = -\sin\theta \frac{d}{ds}$$

Vi får $(\sin^2\theta\ S'(s))' - \frac{m^2}{\sin^2\theta} S(s) + \lambda S(s) = 0$

$$\left((1-s^2)S'(s)\right)' - \frac{m^2}{1-s^2}S(s) + \lambda S(s) = 0$$

Detta går att se som ett Sturm-Liouville-problem enligt

$$(\rho(s)S'(s))' + p(s)S(s) + \lambda S(s) = 0,$$

med $\rho(s) = 1-s^2$, $p(s) = -\frac{m^2}{1-s^2}$, $w(s) = 1$.

Börja med fallet $m=0$ (det vill säga, inget ϕ-beroende).

Då har vi Legendres ekvation

$$((1-s^2)P_n')' + n(n+1)P_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Vi får $\lambda = n(n+1)$ och $S(s) = P_n(s)$, alltså

$$\Theta(\theta) = P_n(\cos\theta).$$

För $m = 1, 2, \ldots$ är egenvärdena fortfarande $n(n+1)$, men bara för $n \geq m$.

Egenfunktionerna är $S(s) = P_n^m(s)$, där

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x). \qquad \text{(Legendrefunktioner)}$$

Alltså $P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(1-x^2)^n$, enligt Rodrigues formel.

För $m = -1, -2, \ldots$ får vi $\lambda = n(n+1)$ och $S = P_n^{|m|}(s)$.

I båda fallen fås

$$\Theta(\theta) = P_n^{|m|}(\cos\theta).$$

Detta gäller även för $m=0$, ty $P_n^0 = P_n$.

För varje m är $\{P_n^{|m|}(x)\}_{n \geq |m|}$ ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2([-1, 1])$.

Då är $\Theta(\theta) = P_n^{|m|}(\cos\theta)$ ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2_w([0, \pi])$ i θ-variabeln.

Produkterna $Y_{mn} = e^{im\phi} P_n^{|m|}(\cos\theta)$, $|m| \leq n$, $n = 0, 1, \ldots$ $Y_{mn}(\theta, \phi)$ bildar ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2_w([0, \pi] \times [-\pi, \pi])$ där $w(\theta, \phi) = \sin\theta$, det vill säga på enhetssfären $r = 1$ med integration $\sin\theta \, d\theta \, d\phi$, alltså ytintegraler på enhetssfären.