Fourieranalys

F/Kf

FÖ 2000

sidor: 48

pris: ~~15~~:- 25:-

LP3

FOURIERANALYS FÖR F2 VÅREN 2000

FÖRELÄSARE : BERNT WENNBERG

FÖRELÄSNING 1: 17/1

FOURIERSERIER

"ALLA PERIODISKA FUNKTIONER KAN UTTRYCKAS SOM EN SUMMA AV SINUS-OCH COSINUS-FUNKTIONER."

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right]$$

$f(x)$ HAR PERIODEN T OM $f(x+T) = f(x),\ \forall x$

1. LINJÄR ALGEBRA

ETT VEKTORRUM $\mathbb{R}^n$ HAR EN BAS $e_1 \ldots e_n$. SOM KAN VÄLJAS ORTOGONAL (T.O.M. ORTONORMERAD).

EN AVBILDNING $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ HAR EN MATRIS $A : x \to Ax$

OM A ÄR SYMMETRISK SÅ FINNS EN BAS AV EGENVEKTORER TILL A. $T = (e_1 \ldots e_n)$: $T^t A T$ ÄR DIAGONAL

2. PARTIELLA DIFFEKVATIONER

3. SIGNALBEHANDLING

4. SANNOLIKHETSTEORI

5. ALGEBRA

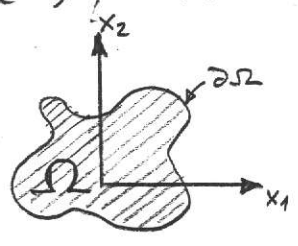
PARTIELLA DIFFEKVATIONER

* VÄRMELEDNINGSEKVATIONEN $\{u(x,t),\ x \in \Omega \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0\}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u \\ \text{RANDVILLKOR (RV)}: u(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \geq 0 \\ \text{BEGYNNELSEVILLKOR (BV)}: u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$



* VÅGEKVATIONEN

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u = 0, \; x \in \Omega, \; t \geq 0 \\ \text{RANDVILLKOR SOM I FÖREGÅENDE EXEMPEL.} \\ \text{BEGYNNELSEVILLKOR: } u(x,0) = u_0(x), \; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \end{cases}$$

* POISSONS EKVATION $u = u(x)$

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f, \; x \in \Omega \\ \text{EX. PÅ RV: } u(x) = g(x), \; x \in \partial\Omega \\ \qquad n \cdot \nabla u(x) = g_2(x) \end{cases}$$

* SCHRÖDINGER EKVATIONEN

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u + V(x) u = 0$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u + V(x) u = Eu$$

LINJÄRITET

$$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad A(\alpha x + \beta x) = \alpha Ax + \beta Ax$$

PARTIELL DIFFERENTIALOPERATOR:

L : "EN FUNKTION" → "FUNKTION"

Ex: $L(u) = \frac{\partial u}{\partial x}$

ALLMÄN LINJÄR PARTIELL DIFFERENTIALOPERATOR:

$u = u(x_1 \dots x_n) \quad x = (x_1 \dots x_n)$

$$L(u) = a_0(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \dots$$

$$L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L(u_1) + \beta L(u_2)$$

SUPERPOSITIONSPRINCIPEN

OM $L(u_1) = f_1$ OCH $L(u_2) = f_2 \Rightarrow L(u_1 + u_2) = f_1 + f_2$

VARIABELSEPARATION

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & u=u(x,t),\ 0<x<\ell,\ t>0 \quad \text{(DIFFEKVATION, DE)} \\ u(0,t)=u(\ell,t)=0 & \text{(RANDVÄRDEN, RV)} \\ (u(x,0)=u_0(x)) & \text{(BEGYNNELSEVILLKOR, BV)} \end{cases}$$

GISSNING 1:

ANTAG DET EXISTERAR EN LÖSNING SOM INTE BEROR PÅ t:

$u = U(x) \Rightarrow$ DE: $0 = kU''(x) \Rightarrow U(x) = Ax+B$

RV: $U(0)=U(\ell)=0 \Leftrightarrow B = A\ell+B = 0 \Rightarrow B, A=0 \Rightarrow U(x)\equiv 0$

GISSNING 2:

ANTAG DET EXISTERAR EN LÖSNING $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$

$\Rightarrow X(x)\cdot T'(t) = kX''(x)\cdot T(t) \Rightarrow \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = A$

A ÄR KONSTANT EFTERSOM VL, $\left(\frac{T'}{kT}\right)$, BARA BEROR PÅ t OCH HL, $\left(\frac{X''}{X}\right)$, BARA BEROR PÅ x.

ALLTSÅ: $\begin{cases} X''(x) - AX(x) = 0 \Rightarrow \circledast \\ T'(t) - kAT(t)=0 \Rightarrow T(t) = De^{kAt} \end{cases}$

$\circledast$: $\begin{cases} A>0 \Rightarrow X(x) = C_1e^{\sqrt{A}x} + C_2e^{-\sqrt{A}x} \\ A=0 \Rightarrow X(x) = C_1x + C_2 \\ A<0 \Rightarrow X(x) = C_1\cos(\sqrt{-A}x) + C_2\sin(\sqrt{-A}x) \end{cases}$

$A>0$: $X(0)=X(\ell)=0 \Rightarrow C_1+C_2 = 0 = C_1e^{\sqrt{A}\ell} + C_2e^{-\sqrt{A}\ell} \Rightarrow C_1, C_2=0$

$A=0$: SOM I GISSNING 1 $\Rightarrow$ TRIVIAL LÖSNING

$A<0$: SÄTT $\mu=\sqrt{-A}$: $X(x) = C_1\cos(\mu x) + C_2\sin(\mu x)$

RV: $X(0) = C_1 = 0 \quad X(\ell) = C_2\sin(\mu\ell) \Rightarrow C_2 = 0$ EL. $\sin(\mu\ell)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu\ell = n\pi \Rightarrow \mu = \frac{n\pi}{\ell} \quad A = -\mu^2 = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$

$\Rightarrow X_n(x) = C_2\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \Rightarrow u(x,t) = C_2\cdot De^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x,t) = Ce^{-k\mu_n^2 t}\cdot\sin(\mu_n x)$ DÄR $\mu_n = \frac{n\pi}{\ell}$

FOURIER SERIER

ANTAG ATT $f(\theta)$ ÄR PERIODISK MED PERIODEN 2π

$$f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\right)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta\ ,[n\geq 0]\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta\ ,[n\geq 1]$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\qquad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}+b_n\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\theta}$$

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\,d\theta\qquad c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta$$

FÖRELÄSNING 2: 19/1

BESSELS OLIKHET:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2\,d\theta$$

BEVIS:

$$0\leq\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(\theta)-\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{in\theta}\right|^2d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(\theta)-\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{in\theta}\right)\left(\overline{f(\theta)}-\sum_{n=-N}^{N}\overline{c_n}e^{-in\theta}\right)d\theta=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg(|f(\theta)|^2-\underbrace{\left(f(\theta)\sum_{-N}^{N}\overline{c_n}\,e^{-in\theta}+\overline{f(\theta)}\sum_{-N}^{N}c_ne^{in\theta}\right)}_{\circledast}+\sum_{n,m=-N}^{N}c_n\cdot\overline{c_m}\,e^{i(n-m)\theta}\Bigg)d\theta=I$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sum_{-N}^{N}\overline{c_n}\,e^{-in\theta}\,d\theta=\sum_{-N}^{N}\overline{c_n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta=2\pi\sum_{-N}^{N}\overline{c_n}\cdot c_n=2\pi\sum_{-N}^{N}|c_n|^2$$

PÅ SAMMA SÄTT (P.S.S.) MED $\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(\theta)}\sum_{-N}^{N}c_ne^{in\theta}\,d\theta\Rightarrow\circledast=4\pi\sum_{-N}^{N}|c_n|^2$

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)\theta}\,d\theta=\begin{cases}2\pi\ ,n=m\\ \left[\frac{e^{i(n-m)\theta}}{i(n-m)}\right]_{-\pi}^{\pi}=0\ ,n\neq m\end{cases}\Rightarrow\sum_{n,m=-N}^{N}c_n\cdot\overline{c_m}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)\theta}\,d\theta=2\pi\sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2$$

$$\Rightarrow I=\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2d\theta-2\pi\sum_{-N}^{N}|c_n|^2\geq 0\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2d\theta\geq\sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2\quad\text{VSV.}$$

FÖLJDSATS: RIEMANN-LEBESGUES LEMMA

$|c_n|\to 0$ DÅ $|n|\to\infty$

$$S_N^f = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

VILL VISA ATT $f(\theta) - S_N^f(\theta) \Rightarrow 0$ DÅ $N \Rightarrow \infty$

$$S_N(\theta) = \sum_{-N}^{N} e^{in\theta} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sum_{-N}^{N} e^{in(\theta-\varphi)} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sum_{-N}^{N} e^{-in(\varphi-\theta)} d\varphi = [\phi = \varphi - \theta] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\theta}^{\pi-\theta} f(\theta+\phi) \sum_{-N}^{N} e^{-in\phi} d\phi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\theta}^{\pi-\theta} f(\theta+\phi) \sum_{-N}^{N} e^{in\phi} d\phi = I \quad \text{TY} \sum_{-N}^{N} e^{-in\phi} = \sum_{-N}^{N} e^{in\phi} \quad \text{(INSES LÄTT)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N} e^{in\phi} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\phi)}{2\pi \sin(\phi/2)} = D_N(\phi)$$

$$\Rightarrow S_N(\phi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+\phi) D_N(\phi) d\phi$$

LEMMA:

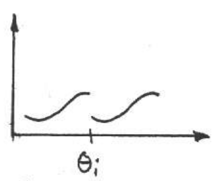
$$\int_0^{\pi} D_N(\phi) d\phi = \int_{-\pi}^{0} D_N(\phi) d\phi = \frac{1}{2}$$

DEFINITION:

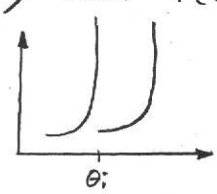
$f(\theta)$ (MED PERIOD $= 2\pi$) ÄR STYCKVIS KONTINUERLIG OM...

I: $f(\theta)$ ÄR KONTINUERLIG UTOM I ÄNDLIGT MÅNGA PUNKTER θ_i.

II: $\lim_{h \to 0} f(\theta_i + h) \equiv f(\theta_{i+})$ OCH $f(\theta_{i-})$ EXISTERAR ÄNDLIGT



STYCKVIS KONT.



EJ STYCKVIS KONT

SATS:

OM $f(\theta)$ ÄR 2π-PERIODISK OCH $f(\theta)$ OCH $f'(\theta)$ ÄR STYCKVIS KONTINUERLIGA SÅ GÄLLER ATT:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} c_n e^{in\theta} = \frac{1}{2}[f(\theta_+) + f(\theta_-)] = \lim_{N\to\infty} S_N^f(\theta)$$

BEVIS:

$$\tfrac{1}{2} f(\theta_-) = f(\theta_-)\int_{-\pi}^{0} D_N(\phi)\,d\phi \qquad \tfrac{1}{2} f(\theta_+) = f(\theta_+)\int_{0}^{\pi} D_N(\phi)\,d\phi$$

$$S_N^f(\theta) - \frac{f(\theta_-)+f(\theta_+)}{2} = \int_0^{\pi}\big(f(\theta+\phi)-f(\theta_+)\big)D_N(\phi)\,d\phi + \int_{-\pi}^{0}\big(f(\theta+\phi)-f(\theta_-)\big)D_N(\phi)\,d\phi = \circledast$$

$$D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}}{e^{i\phi}-1}$$

SÄTT $g(\phi) = \begin{cases} \dfrac{f(\theta+\phi)-f(\theta_-)}{e^{i\phi}-1}, & -\pi<\phi<0 \\[2ex] \dfrac{f(\theta+\phi)-f(\theta_+)}{e^{i\phi}-1}, & 0<\phi<\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow \circledast = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\left[e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}\right]d\phi = I$$

$$\lim_{\phi\to 0} g(\phi) = \lim_{\phi\to 0}\frac{f(\theta+\phi)-f(\theta_+)}{e^{i\phi}-1} = \{\text{L'HÔPITAL'S REGEL}\} = \lim_{\phi\to 0}\frac{f'(\theta+\phi)}{ie^{i\phi}} =$$

$$= \frac{f'(\theta_+)}{i}$$

P.S.S MED $\lim_{\phi\to 0_-} g(\phi) \Rightarrow g(\phi)$ ÄR STYCKVIS KONTINUERLIG

RIEMANN-LEBESGUES LEMMA GER DÅ ATT:

$|c_n|\to 0,\ |n|\to\infty$ OM $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)e^{-in\phi}\,d\phi$

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\,e^{i(N+1)\phi}d\phi - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)e^{-iN\phi}\,d\phi = c_{N+1} - c_{-N} \to 0 \text{ DÅ } N\to\infty$$

$\therefore\ S_N^f(\theta) - \frac{f(\theta_-)+f(\theta_+)}{2} \to 0$ DÅ $N\to\infty$ VSV.

{JFR. FOLLAND SID 35}

DERIVERING AV FOURIERSERIE

ANTAG $f(\theta)$ UPPFYLLER VILLKOR SÅ ATT $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$

DÅ ÄR $f'(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in c_n e^{in\theta}$

$$c_n' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\left[f(\theta)\,e^{-in\theta}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0\ (\text{VISAS LÄTT})} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(-in)e^{-in\theta}\,d\theta =$$

$$= in\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta = in\,c_n$$

OM $f(\theta)$ ÄR "PIECEWISE SMOOTH": $f'(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n' e^{in\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} in c_n e^{in\theta}$

INTEGRATION AV FOURIERSERIE

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \quad c_0 = 0$$

$$F(\theta) = \int_0^{\theta} f(\phi)\,d\phi \qquad \begin{cases} F(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(\phi)\,d\phi = c_0 = 0 \\ F(0) = \int_0^0 f(\phi)\,d\phi = 0 \end{cases}$$

$F(\theta)$ ÄR 2π-PERIODISK $\quad \left[\sum_{-\infty}^{-1} + \sum_{1}^{\infty} = \sum_{\substack{-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} = \sum_{n\neq 0} : \text{SUMMERING ÖVER } \forall n \neq 0 \right]$

$$F(\theta) = \int_0^{\theta} \sum_{n\neq 0} c_n e^{in\phi}\,d\phi = \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{in} e^{in\theta} + C_0$$

SATS:

OM $f(\theta)$ SOM INNAN (STYCKVIS KONTINUERLIG), $f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$

SÅ GÄLLER ATT $S_N(\theta) \to f(\theta)$ LIKFORMIGT FÖR $\theta \in [0, 2\pi]$

LIKFORMIG KONVERGENS: $\quad \max_{\theta \in [0,2\pi]} |S_N(\theta) - f(\theta)| \to 0$ DÅ $N \to \infty$

FÖRELÄSNING 3: 24/1

FOURIERSERIER

$f(\theta + 2\pi) = f(\theta) \quad f(\theta)$ = STYCKVIS GLATT (PIECEWISE SMOOTH)

$f(\theta)$ STYCKVIS KONTINUERLIG

$f'(\theta)$ ——— " ———

$f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta_+) + f(\theta_-)]$ I DISKONTINUITETSPUNKTERNA

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta}\,d\theta$$

OM $f(x)$ ÄR PERIODISK MED PERIODEN T (DVS $f(x+T) = f(x), \forall x$)

SÅ ÄR $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x} \qquad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\,dx$

DERIVATOR OCH INTEGRALER

OM $f(\theta)$ HAR FOURIERSERIEN $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$

SÅ HAR $f'(\theta)$ —— " —— $\sum_{-\infty}^{\infty} inc_n e^{in\theta}$

OM $f'(\theta)$ ÄR STYCKVIS GLATT SÅ ÄR $\frac{1}{2}[f'(\theta_+) + f'(\theta_-)] = \sum_{-\infty}^{\infty} inc_n e^{in\theta}$

$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$, $c_0 = 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta = 0$

$F(\theta) = \int_0^\theta f(\varphi)\, d\varphi = \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{in} e^{in\theta} + A$, $A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta) d\theta$

SATS:

ANTAG $f(\theta)$ STYCKVIS GLATT , $f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$, $S_N^f(\theta) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{in\theta}$

DÅ GÄLLER ATT $S_N^f(\theta)$ KONVERGERAR MOT $f(\theta)$ LIKFORMIGT,

DVS. $\sup_{-\pi<\theta<\pi} |f(\theta) - S_N^f(\theta)| \to 0$ DÅ $N \to \infty$

BEVIS:

WEIERSTRASS MAJORANTSATS. ANTAG ATT DET $\exists\, g_n(x)$, $n = 1..\infty$

SÅDANA ATT $|g_n(x)| \leq M_n$ OCH $\sum_1^\infty M_n$ ÄR KONVERGENT.

DÅ ÄR $\sum_1^\infty g_n(x)$ ABSOLUTKONVERGENT (LIKFORMIGT)

$|c_n e^{in\theta}| \leq |c_n|$, VILL VISA ATT $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|$ ÄR KONVERGENT

$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ $f'(\theta) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n' e^{in\theta}$, $c_n = \frac{c_n'}{in}$

BESSELS OLIKHET: $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n'|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(\theta)|^2 d\theta$

$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| = |c_0| + \sum_{n\neq 0} |c_n| = |c_0| + \sum_{n\neq 0} \left|\frac{c_n'}{in}\right| = |c_0| + \sum_{n\neq 0} \left|\frac{c_n'}{n}\right| \leq$

$\leq |c_0| + \sqrt{\sum_{n\neq 0} (\frac{1}{n})^2} \cdot \sqrt{\sum_{n\neq 0} (c_n')^2}$

SATS:

OM f ÄR PERIODISK, STYCKVIS GLATT, $f(\theta) \in \mathcal{C}^{k-1}$

$f^{(k)}(\theta)$ STYCKVIS GLATT $\{f \in \mathcal{C}^{k-1}$ OM $f^{(k-1)}$ KONTINUERLIG$\}$

DÅ GÄLLER ATT $\sum_{-\infty}^{\infty} |n^k c_n|^2 < \infty$

$*$ OM $|c_n| \leq C|n|^{-(k+\alpha)}$ DÄR $\alpha > 1$ SÅ ÄR $f(\theta) \in \mathcal{C}^k$

BEVIS:

$\sum_{n\neq 0} |n^k c_n| < \sum_{n \neq 0} n^{k-(k+\alpha)} \leq \sum_{n\neq 0} n^{-\alpha}$: KONVERGENT DÅ $\alpha > 1$

$f^{(k)} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} (in)^k c_n e^{in\theta}$ $\quad |(in)^k c_n e^{in\theta}| \leq n^k |c_n| \Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} n^k i^k e^{in\theta}$ LIKF. KONV.

SATS:

ANTAG ATT $f_n(\theta)$ KONTINUERLIGA.

OM $|f_n(\theta) - f(\theta)| \to 0$ LIKFORMIGT SÅ ÄR $f(\theta)$ KONTINUERLIG.

EX $\quad (u_t = u'_t = \frac{\partial u}{\partial t})$

$$\begin{cases} u_t = K u_{xx} & 0<x<\ell \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{\ell^2}} \sin\frac{n\pi x}{\ell}$ $\quad b_n = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell f(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$ $\quad |b_n| \leq \frac{1}{\ell}\int_0^\ell |f(x)|\,dx$

$n^k e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{\ell^2}} \leq C_{k,t} \Rightarrow \sum_1^\infty b_n e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{\ell^2}} \sin\frac{n\pi x}{\ell}$: ÄR "∞"-DERIVERBAR FÖR $t>0$

FOURIERTRANSFORM

DEFINITION: OM $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ INTEGRERBAR (DVS $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$)

SÅ ÄR FOURIERTRANSFORMEN AV $f = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ix\omega}\, dx$.

$\mathcal{F}(f(x)) \equiv \hat{f}(\omega)$

MER DEFINITIONER:

$L^1 = \{ f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \} \quad \|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$

$L^2 = \{ f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \} \quad \|f\|_{L^2} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}$

CAUCHYS OLIKHET:

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \cdot \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

FALTNING (CONVOLUTION)

ANTAG ATT f OCH g TILLHÖR L^1_∞ (TEX)

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy = g * f(x)$$

($*$ = FALTNINGSOPERATOR)

SATS: f, g, h : FUNKTIONER $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

- $f * g = g * f$
- $(f * g) * h = f * (g * h)$
- $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha f * g + \beta f * h$
- $\frac{d}{dx}(f * g(x)) = f' * g(x) = f * g'(x)$

SATSER OM FOURIERTRANSFORMEN

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx \ , \quad f \in L^1$$

- $$|\hat{f}(\omega)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-ix\omega}| dx = \| f \|_{L^1}$$

- $\hat{f}(\omega)$ ÄR KONTINUERLIG

$$|\hat{f}(\omega) - \hat{f}(\xi)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(e^{-ix\omega} - e^{-ix\xi} \right) dx \right| \le \int_{|x|>M} |f(x)| \cdot 2 dx + \int_{-M}^{M} |f(x)| |e^{-ix\omega} - e^{-ix\xi}| dx$$

SATS: $f(x) \in L^1$ $\quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx$

a) $\mathcal{F}(f(x-a)) = e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$

$\quad \mathcal{F}(e^{iax} f(x)) = \hat{f}(\omega - a)$

b) LÅT $f_\delta(x) = \frac{1}{\delta} f\left(\frac{x}{\delta}\right)$ $\quad \mathcal{F}(f_\delta(x)) = \hat{f}(\delta\omega)$

c) OM $f(x)$ STYCKVIS KONTINUERLIG $\quad \mathcal{F}(f'(x)) = i\omega \hat{f}(\omega)$

d) $g(x) \in L^1$: $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$

SATS:

OM $f(x) \in L^1$ OCH $\hat{f}(\omega) \in L^1$ OCH DESSUTOM $f(x)$ STYCKVIS KONTINUERLIG SÅ ÄR:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega$$

Föreläsning 4: 26/1

Fortsättning Fouriertransformen

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ix\omega}\, dx$$

Väldefinierat om $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ (dvs $\|f\|_{L^1} < \infty$)

$|\hat{f}(\omega)|$ begränsad

Bevis (av sats på föregående sida)

a) $g(x) = f(x-a)$ $\quad \hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\, e^{-ix\omega}\, dx = \{z = x-a \quad dx = dz\} =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{-i(z+a)\omega}\, dz = e^{-ia\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-iz\omega}\, dz = e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$$

c) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\mathcal{F}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) = \frac{1}{h}\left(e^{ih\omega} \hat{f}(\omega) - \hat{f}(\omega)\right) = \frac{\hat{f}(\omega)}{h}\left(e^{ih\omega} - 1\right) =$$

$$= \hat{f}(\omega)\, \frac{e^{ih\omega} - 1}{ih\omega} \cdot i\omega \to i\omega \hat{f}(\omega) \quad \text{då } h \to 0$$

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

OK om tex $|g(x)| < M$ och $f \in L^1$ $\Rightarrow |f*g(x)| \leq M \|f\|_{L^1}$

Inversionssatsen:

Antag att $f(x) \in L^1$ och $\hat{f}(\omega) \in L^1$

Då gäller $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega}\, d\omega$

LEMMA:

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

BEVIS:

ANTAG FÖRST ATT VI VET ATT $\hat{f}(\omega) = C e^{-\frac{\omega^2}{2}}$

$$\hat{f}(0) = C = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\cdot 0} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \sqrt{2\pi}$$ (SE BETA SID 177 FORMEL 41)

EX: STUDERA DIFFEKVATIONEN

$$f'(x) + x f(x) = 0 \quad (*)$$

$$\mathcal{F}(f'(x)) = i\omega \hat{f}(\omega) \qquad \mathcal{F}(x f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-ix\omega} dx = \hat{g}(\omega)$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx \qquad \hat{f}'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-ix\omega} dx = -i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-ix\omega} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{f}'(\omega) = -i\,\mathcal{F}(x f(x)) \Rightarrow \mathcal{F}(x f(x)) = i \hat{f}'(\omega)$$

$$(*) \Rightarrow i\omega \hat{f}(\omega) + i \hat{f}'(\omega) = 0 \Rightarrow \hat{f}'(\omega) + \omega \hat{f}(\omega) = 0$$

$$f'(x) + x f(x) = 0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -x \Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln f(x)) = -x \Rightarrow \ln f(x) = -\frac{x^2}{2} + A$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-\frac{x^2}{2} + A} = \hat{A} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{PSS}: \hat{f}(\omega) = \tilde{B} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

SATS:

ANTAG ATT $f \in L^1$, STYCKVIS KONTINUERLIG

(SÄTT $f(x) = \frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)]$ I DISKONTINUITETSPUNKTERNA)

DÅ ÄR $f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} e^{-\frac{\varepsilon^2 \omega^2}{2}} \hat{f}(\omega)\, d\omega \right)$

OM $\hat{f}(\omega) \in L^1$ SÅ ÄR $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} \hat{f}(\omega)\, d\omega$

BEVIS:

$\hat{f}(\omega)$ ÄR BEGRÄNSAD OCH KONTINUERLIG

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} e^{-\frac{\varepsilon^2 \omega^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy\omega} dy \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\omega} e^{-\frac{\varepsilon^2\omega^2}{2}} f(y)\, dy\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-i(y-x)\omega} e^{-\frac{\varepsilon^2 \omega^2}{2}} d\omega\, f(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathcal{F}\left(e^{-\frac{\varepsilon^2\omega^2}{2}}\right)}_{(p = y-x)} f(y)\, dy = \left\{ \mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{x}{a}\right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi}\, \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{(y-x)^2}{\varepsilon^2}} f(y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{(y-x)^2}{\varepsilon^2}} f(y)\, dy \to f(x)$$ [SE SATS 7,3 I FOLLAND]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{(y-x)^2}{-\varepsilon^2}} f(y)\,dy \approx f(x)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{(y-x)^2}{-\varepsilon^2}}\,dy = f(x)\sqrt{2\pi}$$

FOURIER TRANSFORM I L^2

$$L^2 = \left\{ f(x) : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \ , \ |f(x)|^2 = f(x)\cdot\overline{f(x)} \right\}$$

DEFINITIONER:

$$\|f\|_{L^2} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\right]^{1/2}$$

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx$$

SKILLNADER MELLAN L^1 OCH L^2:

$f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ $\quad f(x) \in L^2 \quad f(x) \notin L^1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^{3/4}} & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases} \qquad f(x) \in L^1 ,\ f(x) \notin L^2$$

MÅLSÄTTNING: DEFINIERA FOURIERTRANSFORMEN FÖR L^2

SATS: PLANCHERELS FORMEL

$f, g \in L^1 \cap L^2$ $\quad (f, g \in L^1, L^2)$

DÅ ÄR $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\cdot\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$

BEVIS:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega}\,\overline{g(x)}\,dx\right)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\,e^{ix\omega}\,d\omega}_{2\pi f(x)}\,\overline{g(x)}\,dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx$$

EX: $f(x) = g(x)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi\,\|f(x)\|^2_{L^2} = \|\hat{f}(\omega)\|^2_{L^2}$$

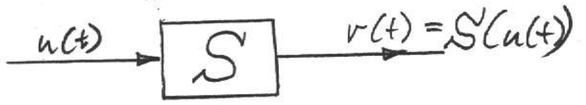
$f \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ BEGRÄNSAD $(\hat{f} \in L^\infty)$

$f \in L^2 \Rightarrow \hat{f} \in L^2$

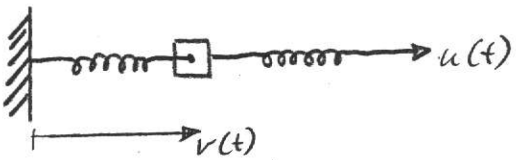
TILLÄMPNINGAR PÅ SIGNALANALYS

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

LINJÄRA SYSTEM



Ex:



OM $u(t) = \delta(t)$ (KRAFTIMPULS)

$\Rightarrow v(t) = \{\text{LÄGET}\} = A\cos(\omega t + b)$

DEFINITIONER:

$\delta(t)$ ÄR EN IMPULS $\quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\delta(t-a)\,dt = \varphi(a)$

IMPULSSVARET $h(t)$ ÄR UTSIGNAL TILL S DÅ INSIGNALEN ÄR $\delta(t)$

$h(t) = S(\delta(t))$

ETT SYSTEM S KALLAS TIDSINVARIANT OM $v(t) = S(u(t)) \Rightarrow$

$\Rightarrow v(t-T) = S(u(t-T))$

S KALLAS KAUSALT OM $v(t) = S(u(t))$ BARA BEROR PÅ $u(\tau), \tau < t$

Föreläsning 5: 31/1

Linjära system (filter)

$$\mathcal{S}(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha \mathcal{S}(u_1) + \beta \mathcal{S}(u_2) = \alpha v_1 + \beta v_2$$

Sats:

Låt $h(t) = \mathcal{S}(\delta(t))$ $\mathcal{S}$: linjärt, tidsinvariant

Då är $\mathcal{S}(u(t)) = v(t) = h * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau$

Bevis:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \{\text{om } u(t) \text{ är kontinuerlig}\} =$$

$$= u(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau = u * \delta(t)$$

$$\mathcal{S}(u(t)) = \mathcal{S}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}(u(\tau)\delta(t-\tau))d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\mathcal{S}(\delta(t-\tau))d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = u * h(t)$$

Sats:

$$\mathcal{S}(e^{i\omega t}) = \hat{h}(\omega)\cdot e^{i\omega t}$$

Bevis:

$$\mathcal{S}(e^{i\omega t}) = e^{i\omega t} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\cdot h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)}h(\tau)d\tau =$$

$$= e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = e^{i\omega t}\cdot \hat{h}(\omega)$$

Ex:

Lågpassfilter definierat av $\hat{h} = \begin{cases} 1, & |\omega| < \Omega \\ 0, & |\omega| > \Omega \end{cases}$

Motsvarande impulssvaret:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i\omega t}}{it}\right]_{-\Omega}^{\Omega} = \frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2\pi i t} =$$

$$= \frac{\sin(\Omega t)}{\pi t}$$

SATS:

ETT LINJÄRT, TIDSINVARIANT SYSTEM ÄR KAUSALT OMM $h(t)=0,\ t\leq 0$

*) OM $h(t)\neq 0$ FÖR NÅGOT $t<0$ SÅ FINNS EN UTSIGNAL FÖRE INSIGNALEN $\Rightarrow$ EJ KAUSALT

*) OM $h(t)=0$ FÖR ALLA $t<0 \Rightarrow S(u(t)) = u*h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau =$

$= \int_0^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau \qquad \arg(u(t-\tau)) = t-\tau \leq t\ ,\ 0<\tau<\infty$

$\Rightarrow S(u(t))$ BEROR BARA PÅ $u(\tau)$ FÖR $\tau\leq t$

FÖLJDSATS:

DET FINNS INGA IDEALA LÅGPASSFILTER.

DEFINITION:

ETT SYSTEM KALLAS STABILT OM $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt<\infty$ (DVS $h\in L^1(\mathbb{R})$)

SATS:

OM S STABILT $\Leftrightarrow$ EN BEGRÄNSAD INSIGNAL GER EN BEGRÄNSAD UTSIGNAL.

BEVIS:

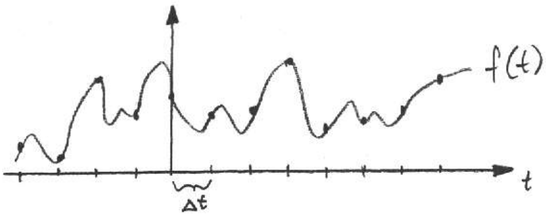
$\Rightarrow$: $v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad |v(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(\tau)|\cdot|h(t-\tau)|d\tau \leq$

$\leq \max_t |u(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau < \infty$

$\Leftarrow$: LÅT $u(t) = \dfrac{\overline{h(-t)}}{|h(-t)|} \qquad v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\overline{h(\tau-t)}}{|h(\tau-t)|} h(\tau)d\tau$

$v(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\overline{h(\tau)}\,h(\tau)}{|h(\tau)|} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau < \infty$

SAMPLINGSSATSEN



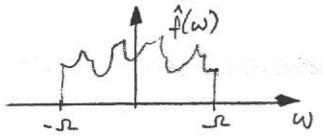
$t_n = n \cdot \Delta t$

EN SAMPLAD SIGNAL: $f_n = f(n \cdot \Delta t)$

DEFINITION:

EN SIGNAL $f(t)$ KALLAS BANDBEGRÄNSAD OM DET $\exists\, \Omega \in \mathbb{R}$

SÅ ATT $\hat{f}(\omega) = 0$ DÅ $|\omega| \geq \Omega$



(EJ I VERKLIGHETEN, EXISTERAR INGA IDEALA LÅGPASSFILTER)

SAMPLINGSSATSEN:

ANTA ATT $f(t) \in L^2$ $\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$ OCH ATT

f ÄR BANDBEGRÄNSAD OCH KONTINUERLIG. $(|\hat{f}(\omega)| = 0,\ |\omega| \geq \Omega)$

DÅ ÄR $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\frac{\pi}{\Omega}) \frac{\sin(\Omega t - n\pi)}{\Omega t - n\pi}$ $\quad (\Delta t = \frac{\pi}{\Omega})$

BEVIS:

$\hat{f}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{-n} e^{in\frac{\pi}{\Omega}\omega}$ FÖR $|\omega| < \Omega$ $\quad c_{-n} = \frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{-in\frac{\pi}{\Omega}\omega} d\omega$

$f(t) \in L^2 \Rightarrow \hat{f}(\omega) \in L^2$ $\quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} c_{-n} e^{in\frac{\pi}{\Omega}\omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\tilde{\omega}) e^{-in\frac{\pi}{\Omega}\tilde{\omega}} d\tilde{\omega}\, e^{in\frac{\pi}{\Omega}\omega} e^{i\omega t} d\omega = \circledast$$

$$\left\{ c_{-n} = \frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{-in\frac{\pi}{\Omega}\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-in\frac{\pi}{\Omega}\omega} d\omega \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{\Omega} f(-n\tfrac{\pi}{\Omega}) \right\}$$

$$\circledast = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{\Omega}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} f(-n\tfrac{\pi}{\Omega}) e^{in\frac{\pi}{\Omega}\omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\Omega}\sum_{-\infty}^{\infty} f(-n\tfrac{\pi}{\Omega}) \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i(n\frac{\pi}{\Omega}+t)\omega} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\Omega}\sum_{-\infty}^{\infty} f(-n\tfrac{\pi}{\Omega}) \left[\frac{e^{i(n\frac{\pi}{\Omega}+t)\omega}}{i(n\frac{\pi}{\Omega}+t)} \right]_{\omega=-\Omega}^{\Omega} = \frac{1}{2\Omega}\sum_{-\infty}^{\infty} f(-n\tfrac{\pi}{\Omega}) \frac{e^{i(n\pi+\Omega t)} - e^{-i(n\pi+\Omega t)}}{i(n\frac{\pi}{\Omega}+t)} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} f(-n\tfrac{\pi}{\Omega}) \frac{\sin(n\pi+\Omega t)}{n\pi+\Omega t} = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n\tfrac{\pi}{\Omega}) \frac{\sin(\Omega t - n\pi)}{\Omega t - n\pi}$$

FÖRELÄSNING 6: 2/2

LINJÄR ALGEBRA, KAPITEL 3

$\mathbb{X} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = (x, y, z)$

$\mathbb{X}_1 \cdot \mathbb{X}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \qquad |\mathbb{X}| = \sqrt{\mathbb{X} \cdot \mathbb{X}}$

$\mathbb{C}^k = \{(a_1, \ldots, a_k) : a_i \in \mathbb{C}\}$

SKALÄRPRODUKT

FÖRSÖK (i $\mathbb{C}^3$): $\langle \mathbb{a}, \mathbb{b} \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

INGEN BRA DEF. $\langle \mathbb{a}, \mathbb{a} \rangle$ EJ ALLTID POSITIV.

KORREKT: $\langle \mathbb{a}, \mathbb{b} \rangle = a_1 \cdot \overline{b_1} + a_2 \cdot \overline{b_2} + a_3 \cdot \overline{b_3}$

SKALÄRPRODUKT

i $\mathbb{R}^k$	i $\mathbb{C}^k$
$\langle \mathbb{a}, \mathbb{b} \rangle = \langle \mathbb{b}, \mathbb{a} \rangle$	$\langle \mathbb{a}, \mathbb{b} \rangle = \overline{\langle \mathbb{b}, \mathbb{a} \rangle}$
	$\langle \alpha\mathbb{a}, \mathbb{b} \rangle = \alpha \langle \mathbb{a}, \mathbb{b} \rangle$
	$\langle \mathbb{a}, \beta\mathbb{b} \rangle = \overline{\beta} \langle \mathbb{a}, \mathbb{b} \rangle$

SKALÄRPRODUKT I $\mathbb{C}^k$ ÄR <u>HERMITSK</u>, DEN ÄR LINJÄR ENDAST I FÖRSTA ARGUMENTET.

GÄLLER FORTFARANDE:

CAUCHY'S OLIKHET: $|\langle \mathbb{a}, \mathbb{b} \rangle| \leq |\mathbb{a}| \cdot |\mathbb{b}| \qquad |\mathbb{a}| = \sqrt{\langle \mathbb{a}, \mathbb{a} \rangle}$

TRIANGEL OLIKHET: $|\mathbb{a} + \mathbb{b}| \leq |\mathbb{a}| + |\mathbb{b}|$

EXEMPEL PÅ LINJÄRA RUM MED ∞-DIMENSION

$L^2 = \{f(x) : (a, b) \to \mathbb{C} : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\}$

EN SKALÄRPRODUKT, $f, g \in L^2(a, b)$

$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx \qquad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx\right]^{1/2}$

f OCH g ÄR ORTOGONALA OM $\langle f, g \rangle = 0$

DEFINITION:

EN FÖLJD AV FUNKTIONER $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\phi_n \in L^2(a,b)$

KALLAS ORTONORMERAD OM

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Ex:

$$\phi_n(x) = e^{inx} \quad (a,b) = (-\pi, \pi) \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

$$\Rightarrow \langle \phi_n, \phi_m \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx =$$

$$= \begin{cases} n=m: & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1 \\ n \neq m: & \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}}{2i\,\pi(n-m)} = \frac{\sin((n-m)\pi)}{(n-m)\pi} = 0 \end{cases}$$

$\phi_n \in L^2(-\pi, \pi)$

LINJÄRA FUNKTIONSRUM MED SKALÄRPRODUKT SOM ÄR FULLSTÄNDIG KALLAS HILBERTRUM.

KONVERGENS OCH FULLSTÄNDIGHET

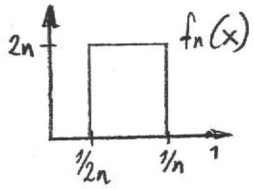
DEFINITION:

$f_n(x) \in L^2(a,b) \quad f(x) \in L^2(a,b)$

$f_n \to f$ I NORM OM $\|f_n - f\| \to 0$ DÅ $n \to \infty$

OBS: EJ SAMMA SOM PUNKTVIS KONVERGENS

Ex:



$f_n(x) \to 0, \ n \to \infty, \ \forall x \in R$

$$\|f_n\|^2 = \int_{1/2n}^{1/n} (2n)^2\,dx = 4n^2\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right] = 2n \to \infty, \ n \to \infty$$

SATS:

OM $f_n \to f$ LIKFORMIGT I (a,b) $\{$DVS $\max_{x\in(a,b)} |f_n(x)-f(x)| \to 0,\ n\to\infty \}$.
SÅ $f_n \to f$ I NORM.

DEFINITIONER

*) LÅT $f_n(x) \in L^2(a,b)$. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ KALLAS CAUCHYFÖLJD OM DET
FÖR $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ N SÅ ATT $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ DÅ $n,m > N$.
I $\mathbb{R}^2$: VARJE CAUCHYFÖLJD ÄR KONVERGENT

*) ETT FUNKTIONSRUM H KALLAS FULLSTÄNDIGT OM VARJE
CAUCHYFÖLJD ÄR KONVERGENT, DVS OM DET $\exists f \in H$
SÅ ATT $\|f_n - f\| \to 0,\ n\to\infty$

EX: $x_n \in Q$ $\{Q =$ MÄNGDEN AV RATIONELLA TAL$\}$
$x_1 = 3{,}1$ $x_2 = 3{,}14$ $x_3 = 3{,}141$ $x_n = 3{,}141\ldots$ (n DECIMALER AV π)
$|x_n - x_m| < 10^{-N}$; $m,n > N$
$x_n \to \pi \notin Q$ $\Rightarrow$ RUMMET EJ FULLSTÄNDIGT

SATS:

$L^2(a,b)$ ÄR FULLSTÄNDIGT (M.A.P. $\|f\|$)
OM $f \in L^2(a,b) \Rightarrow \exists \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$: f_n GLATTA : $\|f_n - f\| \to 0,\ n\to\infty$

SATS: BESSELS OLIKHET

LÅT $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ VARA ORTONORMERAD MÄNGD I $L^2(a,b)$
OCH LÅT $f \in L^2(a,b)$
DÅ GÄLLER: $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f,\phi_n\rangle|^2 \leq \|f\|^2$ $\{$PYTHAGORAS SATS$\}$

BEVIS:

$$0 \leq \|f - \sum_1^N \langle f,\phi_n\rangle \phi_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\langle f, \sum_1^N \langle f,\phi_n\rangle \phi_n\rangle\right) + \|\sum_1^N \langle f,\phi_n\rangle\phi_n\|^2 =$$
$$= \|f\|^2 - \sum_1^N |\langle f,\phi_n\rangle|^2$$

FÖRELÄSNING 7 : 7/2

LEMMA:

LÅT $f \in L^2(a,b)$ $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ = ON-MÄNGD

DÅ ÄR $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ NORMKONVERGENT, DVS DET $\exists$ $g \in L^2(a,b)$

SÅ ATT $\lim_{N \to \infty} \| g - \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \| = 0$

$\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \| \leq \| f \|$

SATS: (VIKTIG)

LÅT $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ VARA ORTONORMERAD I $L^2(a,b)$ OCH $f \in L^2(a,b)$

DÅ ÄR FÖLJANDE EKVIVALENTA:

a) $\langle f, \phi_n \rangle = 0, \forall n \Rightarrow f(x) \equiv 0$

b) $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ (NORMKONVERGENT)

c) $\| f \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | \langle f, \phi_n \rangle |^2$

BEVIS:

$a \Rightarrow b$: $f \in L^2(a,b) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ ÄR NORMKONVERGENT

SÄTT $g = f - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$

$\langle g, \phi_m \rangle = \langle f, \phi_m \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \langle \phi_n, \phi_m \rangle = \langle f, \phi_m \rangle - \langle f, \phi_m \rangle = 0$

$b \Rightarrow c$: $\| f \|^2 = \lim_{N \to \infty} \| \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \|^2 = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} | \langle f, \phi_n \rangle |^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | \langle f, \phi_n \rangle |^2$

$c \Rightarrow a$: $\langle f, \phi_n \rangle = 0, \forall n \Rightarrow \| f \|^2 = 0$ DVS $\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$

Ex:

$\phi_n(x) = e^{inx}$ ÄR ON-FÖLJD I $L^2[-\pi, \pi]$ OM MAN DEFINIERAR

$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$

SATS:

$L^2(-\pi, \pi)$ ÄR FULLSTÄNDIGT OCH TILL VARJE $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$ FINNS EN FÖLJD $f_n(x)$ (GLATTA) SÅ ATT $\| f - f_n \| \to 0$ DÅ $n \to \infty$

SATS:

$\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ÄR EN ON-BAS I $L^2(-\pi,\pi)$, $e^{inx} = \phi_n(x)$

BEVIS:

VI VILL VISA ATT $\sum_{n=-N}^{N} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \to f(x)$ I NORM DÅ $N \to \infty$

- VÄLJ $\varepsilon > 0$ GODTYCKLIGT
- VÄLJ EN FUNKTION $\tilde{f}(x)$ GLATT SÅ ATT $\| f - \tilde{f} \| < \frac{\varepsilon}{3}$

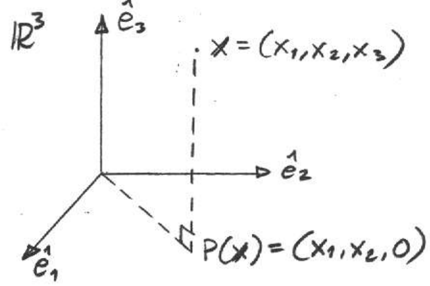
LÅT $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx = \langle f, \phi_n \rangle$, $\tilde{c}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) e^{-inx}\,dx$

VÄLJ N SÅ ATT $\| \tilde{f}(x) - \sum_{n=-N}^{N} \tilde{c}_n e^{inx} \| < \frac{\varepsilon}{3}$

DÅ FÅR VI $\| f - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \| = \| (f - \tilde{f}) + (\tilde{f} - \sum_{-N}^{N} \tilde{c}_n e^{inx}) + (\sum_{-N}^{N} \tilde{c}_n e^{inx} - \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}) \| \leq$

$\leq \| f - \tilde{f} \| + \| \tilde{f} - \sum_{-N}^{N} \tilde{c}_n e^{inx} \| + \| \sum_{-N}^{N} (\tilde{c}_n - c_n) e^{inx} \| \leq \varepsilon$

BÄSTA APPROXIMATION



SATS:

LÅT $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ VARA EN ON-FÖLJD I $L^2(a,b)$. OM $f \in L^2(a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \| f - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \| \leq \| f - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n \|$ FÖR ALLA $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ MED $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$

BEVIS:

$$f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) = \overbrace{f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)}^{\text{ORTOGONAL MOT } \forall \phi_n} + \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (\langle f, \phi_n \rangle - c_n) \phi_n(x)}^{\text{LINJÄRKOMBINATION AV } \forall \phi_n}$$

$\Rightarrow \| f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \|^2 = \| f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle - c_n|^2 \geq$

$\geq \| f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \|^2$

STURM - LIOUVILLE'S TEORI

LINJÄR ALGEBRA: A = MATRIS $(n \times n)$ $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x \mapsto Ax$

OM A SYMMETRISK SÅ $\exists$ BAS AV EGENVEKTORER TILL A,

$\{e_i\}_{i=1}^{n}$: $Ae_i = \lambda_i e_i$

KOMPLEXA FALLET:

OM B HERMITSK (DVS $B^T = \bar{B}$) SÅ GÄLLER OVANSTÅENDE

EGENSKAPER FÖR...

... SYMMETRISK MATRIS: $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$

... HERMITSK MATRIS: $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$

Ex:

$f(x) \in L^2(0,\pi)$ $\frac{d^2}{dx^2}: f(x) \mapsto f''(x)$ $g(x) \in L^2(0,\pi)$

$$\langle \frac{d^2}{dx^2} f, g\rangle = \int_0^\pi f''(x)\overline{g(x)}\,dx = \left[f'(x)\overline{g(x)}\right]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\overline{g'(x)}\,dx =$$

$$= \left[f'(x)\overline{g(x)}\right]_0^\pi - \left[f(x)\overline{g'(x)}\right]_0^\pi + \int_0^\pi f(x)\overline{g''(x)}\,dx = \langle f, \frac{d^2}{dx^2} g\rangle + [\cdots]_0^\pi$$

OM f OCH $g = 0$ I ÄNDPUNKTER BLIR $\frac{d^2}{dx^2}$ HERMITSK

DEFINITION:

LÅT $L(f) = rf'' + qf' + pf$ $f = f(x)$, $x \in (a,b)$

$\{r, q, p\}$ ÄR KONTINUERLIGA FUNKTIONER PÅ $[a,b]$

$L(f)$ ÄR EN LINJÄR DIFFERENTIAL OPERATOR

Ex:

$L(f) = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx} f\right)$, $0 < x < 1$ (LAPLACE OPERATOR)

FORMELT ADJUNGERAD OPERATOR (MOTSVARAR TRANSPONAT)

$$Ax \cdot y = (Ax)^T y = x^T A^T y = x \cdot (A^T y)$$

$$\int_a^b [r(x)f''(x) + q(x)f'(x) + p(x)f(x)]\,\overline{g(x)}\,dx =$$

$$= \int_a^b [(r\bar{g})'' - (q\bar{g})' + p g]\, f\,dx + [r f' g + q f \bar{g} - (r\bar{g})' f]_a^b =$$

$$= \int_a^b f(x)[r\bar{g}'' + (2r' - q)\bar{g}' + (r'' - q' + p)\bar{g}]\,dx + [\cdots]_a^b$$

DEFINITION:

$L^* g = r g'' + (2r' - q) g' + (r'' - q' + p) g$ KALLAS "FORMAL ADJOINT" TILL L

OM $L^* f = L(f)$ SÄGS L VARA FORMELLT SJÄLVADJUNGERAD (S.A)

SATS:

L ÄR FORMELLT SJÄLVADJUNGERAD PRECIS DÅ

$L(f) = (r f')' + pf = r f'' + r' f' + pf \quad , \; q = r'$

LAGRANGES EKVATIONER

OM L ÄR FORMELLT S.A:

$$\langle L(f), g \rangle = \langle f, L(g) \rangle + [r(f'\bar{g} - f\bar{g}')]_a^b$$

FÖRELÄSNING 8: 9/2

STURM-LIOUVILLE PROBLEM

$f(x) \quad a \le x \le b \quad L(f) = r f'' + q f' + pf$

RANDVILLKOR:

$B_1(f) = \alpha_1 f(a) + \tilde{\alpha}_1 f'(a) + \beta_1 f(b) + \tilde{\beta}_1 f'(b)$

$B_2(f) = \alpha_2 f(a) + \tilde{\alpha}_2 f'(a) + \beta_2 f(b) + \tilde{\beta}_2 f'(b)$

SPECIALFALL:

$B_1(f) = \alpha_1 f(a) + \tilde{\alpha}_1 f'(a)$

$B_2(f) = \beta_2 f(b) + \tilde{\beta}_2 f'(b)$

SJÄLVADJUNGERANDE RANDVILLKOR ÄR SÅDANA SOM

GÖR $[r(f'\bar{g} - f\bar{g}')]_a^b = 0$

DEFINITION:

ETT REGULJÄRT S-L PROBLEM ÄR ETT RANDVÄRDESPROBLEM...

$$\dots \begin{cases} L(f) + \lambda w f = 0 \\ B_1(f) = 0 \qquad [a<x<b] \\ B_2(f) = 0 \end{cases}$$

DÄR $L(f) = (rf')' + pf$, $\{r, r', p\}$ ÄR KONTINUERLIGA I $[a,b]$,

$r(x) > 0$ I $[a,b]$ OCH DÄR B_1 OCH B_2 ÄR SJÄLVADJUNGERANDE

$w(x) > 0$, $\lambda_n = n^2$

TYPEXEMPEL:

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad 0<x<\pi \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) = 0 \end{cases}$$

KOMPLEXA MATRISER

$A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \quad A^T = \bar{A}$ (HERMITSK)

DÅ $\exists$ EN BAS AV EGENVEKTORER $\{e_i\}$

$Ae_i = \lambda_i e_i$ EGENVÄRDENA $\{\lambda_i\}$ ÄR REELLA

SATS:

LÅT $f(x), \lambda$ (OCH $g(x), \mu$) VARA LÖSNING TILL ETT REGULJÄRT S-L PROBLEM

DÅ GÄLLER:

a) λ ÄR REELL

b) OM $\lambda \neq \mu$ SÅ GÄLLER $\langle f, g \rangle_w = 0$, DÄR $\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)}\, w(x)\, dx$

c) LÅT $M_\lambda = \{ f$ SOM LÖSER PROBLEMET MED EGENVÄRDET $\lambda \}$

OM RANDVÄRDENA ÄR SEPARERADE ÄR $\dim(M_\lambda) = 1$

BEVIS:

a) $$\lambda \|f\|_w^2 = \lambda \int_a^b f(x) \cdot \overline{f(x)}\, w(x)\, dx = -\int_a^b L(f)\, \overline{f(x)}\, dx = -\int_a^b f(x)\, L(\overline{f})\, dx =$$
$$= \int_a^b f(x)\, \overline{\lambda f}\, w\, dx = \bar{\lambda} \int_a^b f(x) \cdot \overline{f(x)}\, w\, dx = \bar{\lambda} \|f\|_w^2 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

b) $$\lambda \langle f, g \rangle_w = \lambda \int_a^b f(x) \overline{g(x)}\, w(x)\, dx = -\int_a^b L(f)\, \overline{g(x)}\, dx = -\int_a^b f(x)\, L(\bar{g})\, dx =$$
$$= \int_a^b f(x)\, \mu \bar{g}\, w\, dx = \mu \int_a^b f(x) \overline{g(x)}\, w(x)\, dx = \mu \langle f, g \rangle_w \Rightarrow (\lambda - \mu) \langle f, g \rangle_w = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\lambda \neq \mu) \Rightarrow \langle f, g \rangle_w = 0$$

SATS:

LÅT $$\begin{cases} (rf')' + pf + \lambda w f = 0, & a < x < b \\ B_1(f) = 0 \\ B_2(f) = 0 \end{cases}$$ VARA ETT REGULJÄRT S-L PROBLEM

DÅ $\exists$ EN FÖLJD AV LÖSNINGAR $\{\phi_n, \lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ DÄR $\{\phi_n\}$ BILDAR EN ON-BAS I $L_w^2(a,b)$ $\left(L_w^2(a,b) = \{ f : \int_a^b |f|^2 w\, dx < \infty \}\right)$

$\lambda_n \to 0$ DÅ $n \to \infty$, OCH FÖR $f \in L_w^2(a,b)$: $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$ (NORMKONV.)

OM $f(x) \in C^2$ SÅ GÄLLER LIKFORMIG KONVERGENS ($C^2 = \{ f : \exists f''$ KONT.$\}$)

Ex: VÄRMELEDNINGSEKVATION

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<\ell \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \alpha u(0,t), \quad \alpha > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = -\alpha\, u(\ell,t) \end{cases}$$

VARIABELSEPARATION: $u(x,t) = X(x)\cdot T(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} XT' = KX''T \\ X'(0)\cdot \cancel{T(t)} = \alpha X(0)\cdot \cancel{T(t)} \\ X'(\ell)\cdot \cancel{T(t)} = -\alpha X(\ell)\cdot \cancel{T(t)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{X''}{X} = \frac{T'}{KT} = -\lambda \Rightarrow X'' = -\lambda X \\ X'(0) = \alpha X(0) \\ X'(\ell) = -\alpha X(\ell) \end{cases}$$

VI VILL NU LÖSA PROBLEMET:

$$\begin{array}{l} \text{DE} \\ \text{RE1} \\ \text{RE2} \end{array} \begin{cases} f''(x) + \lambda f(x) = 0 \\ f'(0) = \alpha f(0) \\ f'(\ell) = \beta f(\ell) \end{cases} \quad (= \text{ETT REGULJÄRT S-L PROBLEM})$$

$\lambda > 0: \ \lambda = \nu^2 \Rightarrow f(x) = A\cos\nu x + B\sin\nu x \quad f'(x) = -\nu A\sin\nu x + \nu B\cos\nu x$

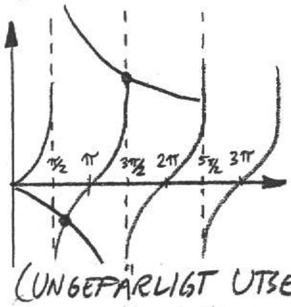
RE1: $\nu B = \alpha A \Rightarrow$ EN LÖSNING: $A = \nu$, $B = \alpha$

DVS: $f(x) = \nu\cos\nu x + \alpha\sin\nu x \quad f'(x) = -\nu^2\sin\nu x + \alpha\nu\cos\nu x$

RE2: $-\nu^2\sin\nu\ell + \alpha\nu\cos\nu\ell = \beta\nu\cos\nu\ell + \beta\alpha\sin\nu\ell \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin\nu\ell\,(\beta\alpha + \nu^2) = \cos\nu\ell\,(\alpha\nu - \beta\nu) \Rightarrow \tan\nu\ell = \frac{\nu(\alpha-\beta)}{\nu^2+\alpha\beta}$$

I VÅRT FALL: $\beta = -\alpha \Rightarrow \frac{2\alpha\nu}{\nu^2-\alpha^2} = \tan\nu\ell$



(UNGEFÄRLIGT UTSEENDE)

VI FÅR FLERA LÖSNINGAR. VI KALLAR DEM ν_n

NU LÖSER VI $\frac{T'}{T} = -\nu_n^2 K \Rightarrow T = e^{-\nu_n^2 Kt}$

ALLMÄN LÖSNING FÅS NU:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\nu_n\cos\nu_n x + \alpha\sin\nu_n x)e^{-\nu_n^2 Kt}$$

ETT BEGYNNELSE VILLKOR $u(x,0) = u_0(x)$ GER OSS:

$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\nu_n\cos\nu_n x + \alpha\sin\nu_n x)$ SÄTT $\phi_n = (\nu_n\cos\nu_n x + \alpha\sin\nu_n x)/d_n$

DÄR $d_n = \|\nu_n\cos\nu_n x + \alpha\sin\nu_n x\| = \left[\int_0^\ell(\nu_n\cos\nu_n x + \alpha\sin\nu_n x)^2dx\right]^{1/2}$

$\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ÄR NU BAS TILL $L^2(0,\ell)$

OM $u_0(x) \in \ell^2: u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle u_0, \phi_n\rangle\phi_n \quad , \ c_n = \langle u_0, \phi_n\rangle$ □

FÖRELÄSNING 9: 14/2

FORTSÄTTNING, VÄRMELEDNINGSEKVATIONEN

$$\left.\begin{cases} u(0,t) = u(2\pi,t) \\ u_\theta'(0,t) = u_\theta'(2\pi,t) \end{cases}\right\} \text{ VID PERIODISKT PROBLEM}$$

HOMOGEN EKVATION, HOMOGENA RANDVÄRDEN

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ B_1 = 0 \\ B_2 = 0 \end{cases}$$

OM u_1 OCH u_2 ÄR LÖSNINGAR SÅ ÄR $C_1u_1 + C_2u_2$ OCKSÅ LÖSNING.

Ex:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{DE} & u_t = Ku_{xx} \quad 0<x<\ell \\ \text{RV} & \left.\begin{array}{l} u(0,t)=0 \\ u(\ell,t)=A \end{array}\right\} \text{FALL 1} \\ \text{RV} & \left.\begin{array}{l} \alpha u(0,t) + \tilde{\alpha} u_x(0,t) = a \\ \beta u(\ell,t) + \tilde{\beta} u_x(\ell,t) = b \end{array}\right\} \text{FALL 2} \\ \text{BV} & u(x,0) = f(x) \end{array}\right\} \circledast$$

LÖSNING:

HITTA EN TIDSOBEROENDE FUNKTION $f(x)$ SOM LÖSER DE OCH RV.

FALL 1: $\begin{cases} u_0''(x) = 0 \\ u_0(0) = 0 \\ u_0(\ell) = A \end{cases} \Rightarrow u_0(x) = \frac{Ax}{\ell}$

LÅT $v(x,t) = u(x,t) - u_0(x)$ OCH SÄTT IN I $\circledast$:

$$\begin{cases} v_t - Kv_{xx} = u_t - Ku_{xx} = 0 \\ v(0,t) = u(0,t) - u_0(0) = u(0,t) = 0 \\ v(\ell,t) = u(\ell,t) - u_0(\ell) = 0 \\ v(x,0) = u(x,0) - u_0(x) = f(x) - \frac{Ax}{\ell} \end{cases}$$

PRECIS SOM INNAN: $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right) e^{-Kn^2t}$, $C_n = \frac{1}{2\ell}\int_0^\ell \sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right)\left(f(x) - \frac{Ax}{\ell}\right)dx$

$$\begin{cases} u_t = K u_{xx} + F(x,t), \; 0<x<l & F(x,t) = \text{TEX. EN UPPVÄRMNING} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

<u>LÖSNINGSMETODIK:</u>

ANSÄTT EN LÖSNING $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{c_n \sin(n\frac{\pi}{l}x) e^{-Kn^2 t}}^{=b_n(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(n\frac{\pi}{l}x)$

SKRIV $F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(t) \sin(n\frac{\pi}{l}x)$

$$\begin{cases} u_t - K u_{xx} = F(x,t) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n'(t) + K \frac{n^2\pi^2}{l^2} b_n(t) \right] \sin(n\frac{\pi}{l}x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t) \sin(n\frac{\pi}{l}x) \\ u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \sin(n\frac{\pi}{l}x) = 0 \end{cases}$$

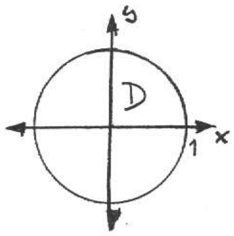
$$\Rightarrow \begin{cases} b_n'(t) + K\frac{n^2\pi^2}{l^2} b_n(t) = d_n(t) \quad , t>0 \\ b_n(0) = 0 \end{cases}$$

INTEGRERANDE FAKTOR: $e^{K\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}$

$$\frac{d}{dt}\left(b_n(t) e^{K\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}\right) = e^{K\frac{n^2\pi^2}{l^2}t} d_n(t) \Rightarrow b_n(t) = e^{-K\frac{n^2\pi^2}{l^2}t} \int_0^t e^{K\frac{n^2\pi^2}{l^2}\tau} d_n(\tau)\, d\tau$$

<u>BESSELFUNKTIONER</u>

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) & (x,y) \in D \\ u(x,y,t) = 0 \quad \text{DÅ} \quad x^2+y^2=1 \end{cases}$$



POLÄRA KOORDINATER:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) & 0<r<1 \\ u(1,\theta,t) = 0 \end{cases}$$

VARIABELSEPARATION:

ANSÄTT $u(r,\theta,t) = R(r)\cdot \Theta(\theta) \cdot T(t)$

$$R\Theta T'' = c^2\left(R''\Theta T + \frac{1}{r}R'\Theta T + \frac{1}{r^2}R\Theta'' T\right) \Rightarrow \frac{T''}{c^2 T} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta} = -\mu^2$$

$$\Rightarrow r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \mu^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \nu^2$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{T''}{c^2 T} = -\mu^2 \\ \frac{\Theta''}{\Theta} = -\nu^2 \end{array}\right]$$

LÅT: $x = \mu r$ $\quad R(r) = f(\mu r)$ $\quad R'(r) = \mu f'(\mu r)$ $\quad R''(r) = \mu^2 f''(\mu r)$

$$\Rightarrow x^2 \frac{f''(x)}{f(x)} + x\frac{f'(x)}{f(x)} + x^2 - \nu^2 = 0$$

BESSELS DIFFERENTIALEKVATION:

$$x^2 f'' + x f' + (x^2 - \nu^2) f = 0$$

SÖK LÖSNING SOM EN POTENSSERIE:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+b} \quad x f'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+b) a_j x^{j+b} \quad x^2 f''(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+b)(j+b-1) a_j x^{j+b}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left[(j+b)(j+b-1) + (j+b) - \nu^2 \right] x^{j+b} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+b+2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left[(j+b)^2 - \nu^2 \right] x^{j+b} + \sum_{j=2}^{\infty} a_{j-2} x^{j+b} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_0 (b^2 - \nu^2) x^b + a_1 (1 + 2b + b^2 - \nu^2) x^{b+1} + \sum_{j=2}^{\infty} x^{j+b} \left[a_{j-2} + a_j \left((j+b)^2 - \nu^2 \right) \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 (b^2 - \nu^2) = 0 & a_0 \neq 0 \Rightarrow b = \pm \nu \\ a_1 ((1+b)^2 - \nu^2) = 0 & a_1 = 0 \\ a_{j-2} + a_j \left[(j+b)^2 - \nu^2 \right] = 0 & a_j = \dfrac{-a_{j-2}}{(j+b)^2 - \nu^2} = \dfrac{-a_{j-2}}{j^2 + 2\nu j} = \dfrac{-a_{j-2}}{j(2\nu + j)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots \\ a_{2k} = \dfrac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (1+\nu)(2+\nu) \cdots (k+\nu)} \end{cases} \quad \text{VÄLJ } a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)} \text{ DÄR } \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

DEFINITION:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \, \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu} = \text{BESSELFUNKTION AV ORDNING } \nu$$

$J_\nu(x)$ ÄR LÖSNING TILL $x^2 f'' + x f' + (x^2 - \nu^2) f = 0$

$J_{-\nu}(x)$ ÄR VÄLDEFINIERAD

A) OM ν EJ HELTAL $\Rightarrow$ J_ν OCH $J_{-\nu}$ OBEROENDE LÖSNINGAR

B) OM ν HELTAL $\Rightarrow$ $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

FÖRELÄSNING 10: 16/2

BESSELFUNKTIONER

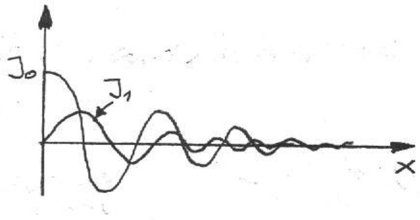
$$x^2 f'' + x f' - \nu^2 f + \mu^2 x^2 f = 0$$

LÖSNINGAR: $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$

* ν EJ HELTAL $\Rightarrow$ J_ν OCH $J_{-\nu}$ OBEROENDE

* ν HELTAL $= n \Rightarrow J_{-n} = (-1)^n J_n$

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\pi\nu) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}$$



REKURRENSFORMLER

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$ (SE FOLLAN SID 133 FÖR FLER)

GENERALISERADE FUNKTIONER

SATS:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)\, z^n = e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}$$

BEVIS:

$$e^{\frac{xz}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{xz}{2}\right)^n \qquad e^{-\frac{x}{2z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{-x}{2z}\right)^k \qquad e^{\frac{xz}{2}} \cdot e^{\frac{-x}{2z}}$$

Ex:

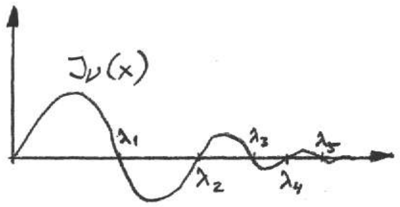
$$z = e^{i\theta} \Rightarrow e^{ix\sin\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)\, e^{in\theta}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta} e^{-in\theta}\, d\theta = J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - n\theta)}\, d\theta \Rightarrow |J_n(x)| \leq 1$$

{MATLAB: besselj(ν, x)}

$$\begin{cases} x f''(x) + f'(x) - \frac{\nu^2}{x} f(x) + \mu^2 x f(x) = 0 \quad 0 < x < b \\ f(0_+) = \text{ÄNDLIG} \\ \beta f(b) + \tilde{\beta} f'(b) = 0 \end{cases}$$

LÖSNINGAR: $f(x) = J_\nu(\mu x)$



$\mu_n b = \lambda_n \Rightarrow J_\nu(\mu_n b) = 0 \Rightarrow \{J_\nu(\mu_n x)\}_{n=1}^\infty$

FRÅGA: BILDAR $\{J_\nu\}$ BAS I L^2 ?

$$\begin{matrix} \text{DE} \\ \text{RV} \end{matrix} \begin{cases} f''(x) - \mu^2 f(x) = 0 \\ f(0) = f(b) = 0 \end{cases}$$

LÖSNINGAR: $f(x) = \sin(\mu x)$ $\quad \mu = \frac{\pi}{b} n$ GER LÖSNINGAR

$\{\sin(\frac{\pi}{b} n x)\}_{n=1}^\infty$ BILDAR BAS I $L^2(0,b)$

SATS:

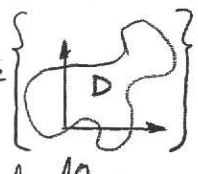
LÅT $f(x) = J_\nu(\mu_1 x)$ OCH $g(x) = J_\nu(\mu_2 x)$, DÄR f OCH g UPPFYLLER R.V. DÅ ÄR:

1) μ_1 OCH μ_2 REELLA

2) OM $\mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow f(x)$ OCH $g(x)$ ORTOGONALA, DVS $\int_0^b f(x) \cdot \overline{g(x)}\, w(x)\, dx = 0$

UTVIKNING:

$f(x,y)$ DEFINIERAD I $D \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad \|f\| = \left[\iint_D f \cdot \bar{f} \cdot w \cdot dx \cdot dy\right]^{1/2}$



OM D ÄR CIRKELSKIVA MED RADIE = 1: $\|f\|^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f \cdot \bar{f} \cdot r\, dr \cdot d\theta$

STURM-LIOUVILLE: RÄCKTE ATT VISA ATT $L(f)$ ÄR SJÄLVADJUNGERAD

DVS: $\langle L(f), g\rangle = \langle f, L(g)\rangle$ DÄRFÖR ATT $L(f) + w(x)\mu f = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\langle \mu_1 f, g\rangle_w = -\langle f, \mu_2 g\rangle_w$

$$\underbrace{(x f'(x))' - \frac{\nu^2}{x} f(x)}_{L(f)} + \mu^2 x f(x) = 0 \qquad \nu^2/x \leftarrow p(x)$$

$$\int_\varepsilon^b \left[L(f)\bar{g} - f \cdot \overline{L(g)}\right] dx = \left[x\left(f'(x)\overline{g(x)} - f(x)\overline{g'(x)}\right)\right]_\varepsilon^b = -\varepsilon f'(\varepsilon)\overline{g(\varepsilon)} + \varepsilon f(\varepsilon)\overline{g'(\varepsilon)}$$

$$g(x) = J_\nu(\mu x) \sim x^\nu$$

$$x g'(x) \sim x^\nu \Rightarrow -\varepsilon f'(\varepsilon)\overline{g(\varepsilon)} + \varepsilon f(\varepsilon)\overline{g'(\varepsilon)} \sim x^{2\nu} \to 0, \ \varepsilon \to 0$$

RANDVÄRDE TILL HÖGER:

$$\beta f(b) + \tilde{\beta} f'(b) = 0, \quad f(x) = J_\nu(\mu x)$$

$$\beta J_\nu(\mu b) + \tilde{\beta}\mu J'_\nu(\mu b) = 0 \Rightarrow \beta J_\nu(\mu b) + \frac{\tilde{\beta}}{b}\mu b J'_\nu(\mu b) = 0$$

$\mu b = \lambda \Rightarrow \beta J_\nu(\lambda) + \frac{\tilde{\beta}}{b} J'_\nu(\lambda) = 0$ EGENVÄRDEN: $\mu_n = \frac{\lambda_n}{b}$

ALLTSÅ: $J_\nu(\mu_k x)$ ÄR ORTOGONALA PÅ $(0,b)$ MED $w(x) = x$

FRÅGA: $f(x) \in L^2_w(0,b)$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, J_\nu(\mu_k x)\rangle_w J_\nu(\mu_k x) \frac{1}{\alpha_k^2}$

DÄR $\alpha_k = \langle J_\nu(\mu_k x), J_\nu(\mu_k x)\rangle_w$

SATS:

ANTAG $\nu > 0$, $w(x) = x$. LÅT $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ VARA NOLLSTÄLLEN TILL $J_\nu(x)$ OCH LÅT $\phi_k(x) = J_\nu\left(\frac{\lambda_k x}{b}\right)$.

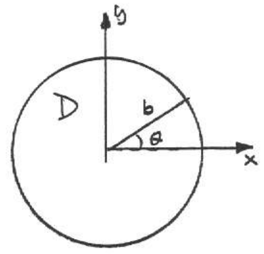
DÅ ÄR $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ EN ON-BAS FÖR $L^2_w(0,b)$ OCH $\|\phi_k\|_w^2 = \frac{b^2}{2} J_{\nu+1}(\lambda_k)^2$

VÅGEKVATIONEN I CIRKELSKIVAN:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) = c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right)$$

FÖRELÄSNING 11: 21/2

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u & , |x| < b \\ u = 0 & , |x| = b \\ u = f & , t = 0 \\ u'_t = 0 & , t = 0 \end{cases}$$



$$u(t,x) = T(t)\cdot R(r)\cdot \Theta(\theta) \qquad \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \quad R(b) = 0 \quad r = |x|$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) \Rightarrow \frac{T''}{c^2 T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = -\mu^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = -r^2\mu^2 \Rightarrow r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + r^2\mu^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \nu^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \nu^2\Theta = 0 \quad (\text{PERIODISK}, 2\pi) \Rightarrow (\nu = n) \Rightarrow \Theta = a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta) \\ T'' + c^2\mu^2 T = 0 \Rightarrow T(t) = c_1\cos(\mu c t) + c_2\sin(\mu c t) \\ r^2R'' + rR' - \nu^2 R + \mu^2 r^2 R = 0 \Rightarrow R(r) = J_\nu\left(\frac{\lambda_k r}{b}\right), \text{ DÄR } J_\nu(\lambda_k) = 0 \end{cases}$$

SATS:

LÅT $\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \dots, \lambda_{kn}, \dots$ VARA NOLLSTÄLLEN TILL $J_n(\lambda)$

DÅ ÄR $\{J_n(\lambda_{kn}\frac{r}{b})\sin(n\theta)\} \cup \{J_n(\lambda_{kn}\frac{r}{b})\cos(n\theta)\}$ EN ORTOGONAL BAS TILL $L^2(\{|x| < b\})$

OBS 1: EJ EN ON-BAS, $\|J_n(\lambda_{kn}\frac{r}{b})\cos(n\theta)\| \neq 1$

OBS 2: $\langle J_n(\lambda_{kn}\frac{r}{b}), J_n(\lambda_{\ell n}\frac{r}{b})\rangle_w = \begin{cases} = 0 & , k \neq \ell \\ \neq 0 & , k = \ell \end{cases}$ $\quad w(r) = r$

BEVIS:

OM $\{\phi_n\}$ ÄR ORTONORMERAD FÖLJD SÅ ÄR DET EN BAS OMM $\{\langle f, \phi_n\rangle = 0, \forall n \Rightarrow f \equiv 0\}$

VILL ALLTSÅ VISA ATT $\langle f, J_n(\frac{\lambda_{kn}}{b}r)\cos(n\theta)\rangle = \langle f, J_n(\frac{\lambda_{kn}}{b}r)\sin(n\theta)\rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(r,\theta) = 0$

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^b f(r,\theta)\,\overline{g(r,\theta)}\, r\,dr\,d\theta$$

LÅT $g_n(r) = \int_0^{2\pi} f(r,\theta)\cos n\theta \, d\theta$, $h_n(r) = \int_0^{2\pi} f(r,\theta)\sin n\theta\, d\theta$

$$\int_0^b g_n(r) J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} r\right) r\,dr = 0,\ \forall k \Rightarrow g_n(r) = h_n(r) = 0 \quad \forall r \text{ (NÄSTAN)}$$

$\Rightarrow f(r,\theta) = 0$ (NÄSTAN ÖVERALLT)

TRUMMAN:

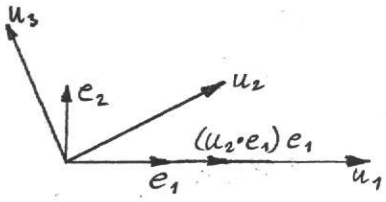
$$u(t,r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[c_{nk}\cos n\theta + d_{nk}\sin n\theta\right] J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} r\right)\left[A_{nk}\cos\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} ct\right) + B_{nk}\sin\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} dt\right)\right]$$

$$u_t'(0,r,\theta) = 0 \Rightarrow B_{nk} \equiv 0$$

$$u(0,r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\tilde{c}_{nk}\cos n\theta + \tilde{d}_{nk}\sin n\theta\right] J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b} r\right) = f$$

ORTOGONALA POLYNOM

ON-BASER I $\mathbb{R}^n$



GRAM-SCHMIDT

$$e_1 = \frac{u_1}{|u_1|}$$

$$e_2 = \frac{u_2 - (u_2\cdot e_1)\cdot e_1}{|u_2 - (u_2\cdot e_1)\cdot e_1|}$$

$$e_3 = \frac{u_3 - (u_3\cdot e_1)e_1 - (u_3\cdot e_2)\cdot e_2}{|u_3 - (u_3\cdot e_1)e_1 - (u_3\cdot e_2)e_2|}$$

POLYNOM

SKALÄRPRODUKT PÅ INTERVALLET $(a,b) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)\,dx$, $w(x)$ = VIKTFUNKTION

EN BAS FÖR MÄNGDEN AV POLYNOM : $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$

MED HJÄLP AV GRAM-SCHMIDT KAN MAN ÅSTADKOMMA EN FÖLJD :

$\left.\begin{matrix} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = \ldots \end{matrix}\right\}$ $P_n(x)$ ÄR POLYNOM AV GRAD EXAKT $= n$ SOM ÄR ORTOGONALA.

Rodriguez formel

Givet en vikt $w(x)$ och en följd av konstanter c_n definieras $P_n(x) = \frac{c_n}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n}\left(w(x) P(x)^n\right)$

Exempel: Legendrepolynom

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) \quad \left\{ P_0 = 1,\ P_1 = x,\ P_2 = \tfrac{1}{2}(3x^2-1) \ldots \right\}$$

Sats:

$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ är ortogonala på $(-1,1)$ med vikten $w(x)=1$.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot P_k(x)\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \frac{2}{2n+1}, & n = k \end{cases}$$

Bevis:

Låt $f(x)$ vara ett polynom av grad j

$$\langle f, P_n \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot P_n(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(x)\, c_n \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) dx = \left\{ \begin{matrix} \text{Partial integration} \\ n \text{ gånger} \end{matrix} \right\}$$

$$= (-1)^n c_n \int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)\, (x^2-1)^n\, dx$$

Om $j < n \Rightarrow f^{(n)}(x) = 0 \Rightarrow \langle f, P_n \rangle = 0 \Rightarrow \langle P_j, P_n \rangle = 0$ $\square$

Sats:

Låt $n \geq 0$. Då är $\left[(1-x^2) P_n'(x)\right]' + n(n+1) P_n(x) = 0$

$\{$ dvs $P_n(x)$ löser $\left[(1-x^2) y'(x)\right]' + n(n+1) y(x) = 0 \ (*) \ ] \}$

Obs 1: Singulärt Sturm-Liouville problem

Obs 2: Man kan försöka lösa $(*)$ i formen $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+b}$

BEVIS:

I) $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}x^{2j}\right] =$

$= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{2n}+\ldots\right] = \frac{1}{2^n n!}\,2n\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)\,x^n+\ldots$

II) VARJE POLYNOM AV GRAD n KAN SKRIVAS

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(x)$$

III) $g(x) = \left[(1-x^2)P_n'(x)\right]'$: GRAD $= n$ DVS $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k P_k(x)$

$$\int_{-1}^{1} g(x)P_k(x)\,dx = C_k\int_{-1}^{1} g(x)\frac{d^k}{dx^k}\left[(x^2-1)^k\right]dx =$$

$= C_k\int_{-1}^{1}\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]'\frac{d^k}{dx^k}\left[(x^2-1)^k\right]dx =$ (BEVISET GÖRES FÄRDIGT SOM ÖVNING)

FÖRELÄSNING 12: 23/2

DET FINNS EN GENERERANDE FUNKTION

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$$

REKURSIONSFORMEL: $P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x)$

SATS:

$\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ BILDAR EN ORTOGONALBAS TILL $L^2[-1,1]$

BEVIS:

$\{P_n(x)\}$ ÄR EN ORTOGONAL FÖLJD. ÅTERSTÅR ATT VISA ATT OM $f(x)\in L^2(-1,1)$ OCH OM $\langle f, P_n\rangle = 0,\ \forall n$ SÅ ÄR $f\equiv 0$ {NÄSTAN ÖVERALLT}

[LEMMA: (WEIERSTRASS APPROXIMATIONSSATS)

OM $g(x)$ ÄR KONTINUERLIG PÅ $[a,b]$ SÅ FINNS EN FÖLJD AV POLYNOM $g_n(x)$ SÅ ATT $\max_{a\le x\le b}|g(x)-g_n(x)| \to 0$ DÅ $n\to\infty$]

TAG $\varepsilon > 0$ OCH $g(x)$ GLATT SÅ ATT $\|f-g\| < \varepsilon$

TAG ETT POLYNOM $q(x)$ SÅ ATT $|g(x)-q(x)| < \varepsilon$ DÅ $x \in [-1,1]$.

$\|f\|^2 = \langle f,f\rangle = \langle f-g+g-q+q,\ f\rangle = \langle f-g, f\rangle + \langle g-q, f\rangle + \langle q, f\rangle \le$

$\le |\langle f-g, f\rangle| + |\langle g-q, f\rangle|$ $\{$TY $\langle q,f\rangle = 0$ DÅ f ÄR $\perp$ MOT ALLA POLYNOM.$\}$

$|\langle f-g,f\rangle| + |\langle g-q,f\rangle| \le \|f-g\|\cdot\|f\| + \left[\int_{-1}^{1}(g-q)^2\,dx\right]^{1/2}\|f\| \le \varepsilon\|f\| + \sqrt{2}\,\varepsilon\|f\| \Rightarrow$

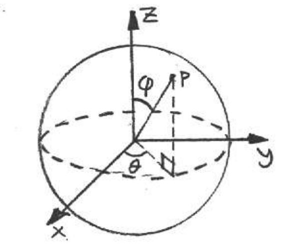
$\Rightarrow \|f\| \le \varepsilon(1+\sqrt{2})$

OM MAN VILL MINIMERA $\int_{-1}^{1}|f(x)-p(x)|^2\,dx$ DÄR $p(x)$ ÄR

ETT POLYNOM AV GRAD n SÅ VÄLJS $p(x) = \sum_{j=0}^{n}\alpha_j P_j(x)$ DÄR $\alpha_j = \langle f, P_j\rangle\frac{2n+1}{2}$

TY OM $\{\phi_n\}$ ÄR ON SÅ: $\|f - \sum\langle f,\phi_j\rangle\phi_j\| \le \|f - \sum c_j\phi_j\|$

VARIABELSEPARATION I POLÄRA KOORDINATER I $\mathbb{R}^3$



EXEMPEL:

VI VILL LÖSA $\begin{cases}\nabla^2 u = 0 & ,\ \|x\| < 1\\ u = f & ,\ \|x\| = 1\end{cases}$

ANSÄTT EN LÖSNING $u(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$

$\Rightarrow \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$

$\Rightarrow R''\Theta\Phi + \frac{2}{r}R'\Theta\Phi + \frac{1}{r^2\sin\varphi}(\sin\varphi\,\Phi')'R\Theta + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}R\Phi\Theta'' = 0$

$\Rightarrow \frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{(\sin\varphi\,\Phi')'}{\Phi} + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\Theta''}{\Theta} = 0$

$\left\{\frac{\Theta''}{\Theta} = -m^2\right\} \Rightarrow \frac{m^2}{\sin^2\varphi} - \frac{(\sin\varphi\,\Phi')'}{\sin\varphi\,\Phi} = \frac{r^2R'' + 2rR'}{R} = \lambda$

$\frac{(\sin\varphi\,\Phi')'}{\sin\varphi} - \frac{m^2}{\sin^2\varphi}\Phi = -\lambda\Phi$

KLURIGT VARIABELBYTE!

LÅT $S(\cos\varphi) = \Phi(\varphi)$ $\cos\varphi = s,\ -1 \le s \le 1$

$\Rightarrow \left[(1-s^2)S'(s)\right]' - \frac{m^2 S}{1-s^2} + \lambda S = 0$

SINGULÄRT STURM-LIOUVILLE PROBLEM.

FALL 1: $m=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [(1-s^2)S'(s)]' + \lambda S = 0 \\ S(s) \text{ SKA VARA BEGRÄNSAD DÅ } s \in [-1,1] \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = n(n+1),\ S(s) = P_n(s)$

FALL 2: $m =$ heltal >0

LÅT $S(s) = (1-s^2)^{m/2} w^{(m)}(s)$

STUDERA $[(1-s^2)w']' - \frac{m^2 w}{1-s^2} + \lambda w = 0$

DERIVERA m GÅNGER $\Rightarrow [(1-s^2)w']^{(m+1)} - \left(\frac{m^2 w}{1-s^2}\right)^{(m)} + \lambda w^{(m)} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow S$ LÖSER $[(1-s^2)S']' - \frac{m^2 S}{1-s^2} + \lambda S = 0$, MED $m>0$

DEFINITION

ASSOCIERADE LEGENDREFUNKTIONER

$P_n^m(x) = (1-s^2)^{m/2} \frac{d^m}{ds^m} P_n(s)$, DÄR $n \geq m$

SATS:

FÖR VARJE $m \geq 0$ ÄR $\{P_n^m(s)\}$ ORTOGONAL I $L^2(-1,1)$.

OCH BILDAR BAS OM $\|P_n^m\|^2 = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1}$

$$\left[\Theta'' + m^2 \Theta = 0 \Rightarrow \Theta = a\cos(m\theta) + b\sin(m\theta) \right]$$

$$\left[\begin{array}{ll} \Phi(\varphi) = S(\cos\varphi) & \lambda = n(n+1) \\ [(1-s^2)S']' - \frac{m^2 S}{1-s^2} + \lambda S = 0 \Rightarrow S(s) = P_n^{|m|}(s) & \end{array} \right]$$

$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0 \Rightarrow R(r) = ar^n + \cancel{br^{-n-1}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{EJ BEGRÄNSAD} \\ \text{DÅ } r \approx 0 \end{array} \right\}$

$u(r,\theta,\varphi) = R \cdot \Theta \cdot \Phi$

VI FÅR EN BAS $u_{m,n} = r^n \overbrace{e^{im\theta} P_n^{|m|}(\cos\varphi)}^{Y_{mn},\ \text{KLOTYTEFUNKTION}}$, $m \in (-\infty,\infty)$ $n \geq m$

$\Rightarrow u(r,\theta,\varphi) = \sum c_{mn} r^n Y_{mn}(\theta,\varphi)$

HERMITEPOLYNOM:

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ $\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) \cdot H_k(x) e^{-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} 2^n n! \sqrt{\pi},\ k=m \\ 0,\ k \neq m \end{array} \right.$

FÖRELÄSNING 13 : 28/2

ORTOGONALA POLYNOM

GIVET ETT INTERVALL (a,b) OCH EN VIKTFUNKTION $w(x)>0$

$$\langle f,g\rangle_w = \int_a^b f(x)\cdot\overline{g(x)}\,w(x)\,dx$$

ORTOGONALA POLYNOM ÄR ETT PRAKTISKT SÄTT ATT APPROXIMERA FUNKTIONER MED POLYNOM. POLYNOMEN BILDAR BAS I $L^2_w(a,b)$

* MAN KAN HITTA EN BAS TILL L^2 SOM DIAGONALISERAR DIFFERENTIALOPERATORN.

EXEMPEL: LEGENDRE POLYNOM

$$\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' = -n(n+1)P_n(x) \quad \{\text{Jfr } Ax=\lambda x \text{ OM } x \text{ ÄR EGENVEKTOR}\}$$

GENERERANDE FUNKTION:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{z^n}{n!} = e^{2xz-z^2}$$

BEVIS:

SÄTT $u=x-z$ $\quad \frac{d^n}{dz^n}e^{-(x-z)^2}\Big|_{z=0} = (-1)^n\frac{d^n}{du^n}e^{-u^2}\Big|_{u=x} = e^{-u^2}H_n(u)\Big|_{u=x} =$

$$= e^{-x^2}H_n(x) \Rightarrow H_n(x) = e^{x^2}\frac{d^n}{dz^n}e^{-x^2+2xz-z^2}$$

$$\left\{\text{EFTERSOM } f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n\right\}$$

LAGUERRE POLYNOM

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right) \quad w(x)=x^{-\alpha}e^{x} \quad (a,b)=(0,\infty)$$

SATS:

$\{L_n^{\alpha}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ÄR EN ORTOGONALBAS TILL $L^2_w(0,\infty)$, $w(x)=x^{-\alpha}e^{-x}$

OCH $\displaystyle\int_0^{\infty} L_n^{\alpha}(x)L_k^{\alpha}(x)x^{-\alpha}e^{-x}\,dx = \begin{cases} 0, & n\neq k \\ \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{n!}, & n=k\end{cases}$ $\qquad \Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}\,dt$

FOURIERTRANSFORM I FLERA DIMENSIONER

DIM = 1 $\quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx$

OM $f(x)$ STYCKVIS GLATT: $\quad \dfrac{f(x_+)+f(x_-)}{2} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega & (\text{OM } \hat{f}(\omega) \in L^1) \\ \lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-R}^{R} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega \end{cases}$

DEFINITION

OM $f(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ DVS $\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty$

SÅ ÄR $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}\cdot\omega} d\mathbf{x} = \{\text{EX I DIM}=2\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2) e^{-i(x_1\omega_1+x_2\omega_2)} dx_1 dx_2$

INVERSIONSFORMEL:

OM $\hat{f}(\omega) \in L^1$ SÅ ÄR $f(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\omega) e^{i\mathbf{x}\cdot\omega} d\omega$

EXEMPEL PÅ FORMLER

[OM $f(\mathbf{x}) \to \hat{f}(\omega)$]

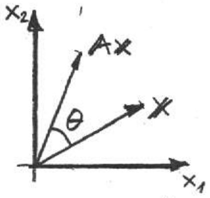
$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \to i\omega_k \hat{f}(\omega)$

$g(\mathbf{x}) = a^n f(a\mathbf{x}) \Rightarrow \hat{g}(\omega) = \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

OM $\hat{g}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}\cdot\omega} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} a^n f(a\mathbf{x}) e^{-ia\mathbf{x}\cdot\frac{\omega}{a}} d\mathbf{x} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{y} = a\mathbf{x} \\ d\mathbf{y} = a^n d\mathbf{x} \end{matrix} \right\} =$

$= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{y}\cdot\frac{\omega}{a}} d\mathbf{y} = \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

OM $g(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x})$ $\quad A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (A EN MATRIS SOM ROTERAR $\mathbf{x}$)



$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ $\quad \det A = 1$, A: ORTOGONAL: $A^T A = E$

$\hat{g}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}\cdot\omega} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(A\mathbf{x}) e^{-iA\mathbf{x}\cdot A\omega} d\mathbf{x} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{y} = A\mathbf{x} \\ d\mathbf{x} = d\mathbf{y} \end{matrix} \right\} =$

$= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{y}\cdot A\omega} d\mathbf{y} = \hat{f}(A\omega)$

VÄRMELEDNINGSEKVATIONEN

$$\begin{cases} u = u(\mathbf{x},t) \ , \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ , \ t \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = K \nabla^2 u = K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) \\ u(\mathbf{x},0) = f(\mathbf{x}) \end{cases}$$

FOURIERTRANSFORM I $\mathbf{x}$-LED:

$$U(\omega,t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t)\, e^{-i\mathbf{x}\cdot\omega}\, d\mathbf{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \to \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t)\, e^{-i\mathbf{x}\cdot\omega}\, d\mathbf{x} = U_t'(\omega,t)$$

$$\nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) \to (i\omega_1)^2 U(\omega,t) + \dots + (i\omega_n)^2 U(\omega,t) =$$

$$= -(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots + \omega_n^2)\, U(\omega,t) = -|\omega|^2\, U(\omega,t)$$

$\Rightarrow U(\omega,t)$ UPPFYLLER

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -K|\omega|^2 U \Rightarrow U(\omega,t) = A\, e^{-K|\omega|^2 t} = A(\omega)\, e^{-K|\omega|^2 t}$$

ALLTSÅ:

$$U(\omega,t) = A(\omega)\, e^{-K|\omega|^2 t}$$

$$U(\omega,0) = \mathcal{F}(u(\mathbf{x},0)) = \mathcal{F}(f(\mathbf{x})) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{x}\cdot\omega}\, d\omega = \hat{f}(\omega)$$

$$\Rightarrow A(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

$$\Rightarrow U(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\, e^{-K|\omega|^2 t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{FALTNINGSSATSEN}} \\ \text{OM } f \to \hat{f} \text{ OCH } g \to \hat{g} \Rightarrow f * g \to \hat{f} \cdot \hat{g} \end{array} \right\}$$

LÅT $m(\mathbf{x},t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-K|\omega|^2 t}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, m(\mathbf{y},t)\, d\mathbf{y} \qquad m(\mathbf{y},t) = \frac{1}{2\sqrt{Kt\pi}}\, e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{4Kt}}$$

LAPLACETRANSFORMEN

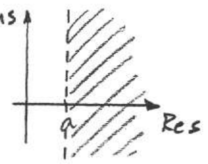
DEFINITION:

$\mathcal{E} = \{ f(t) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ STYCKVIS KONTINUERLIG , $|f(t)| \leq C_1 e^{at} \}$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_{-0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

ANTAG ATT $f(t) = 0$ DÅ $t < 0 \Rightarrow \mathcal{L}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt$

OM $\operatorname{Re} s > a$:

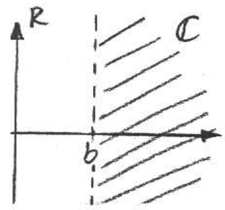


OM $f(t) \leq C_1 e^{-\varepsilon t}$, $t > 0$ SÅ ÄR $\mathcal{L}(f)(s)$ DEFINIERAD FÖR $\operatorname{Re} s \geq 0$

$$\mathcal{L}(f)(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \hat{f}(\omega)$$

INVERSIONSFORMEL

ANTAG ATT $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{DÅ } t < 0 \\ \leq C_1 e^{at} & \text{DÅ } t > 0 \end{cases}$ $f(t)$ STYCKVIS GLATT



OM $b > a$ SÅ ÄR

$$\frac{f(t_+) + f(t_-)}{2} = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iR}^{b+iR} \mathcal{L}(f)(z) e^{izt}\, dz$$

BEVIS:

$g(t) = e^{-bt} f(t) \in L^1$

$$\frac{g(t_+) + g(t_-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \hat{g}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

$\hat{g}(\omega) = \mathcal{L}(f)(\underbrace{b + i\omega}_{z})$, $dz = i\, d\omega$

RESTEN INSES ENKELT !

(SKOJAR BARA. FÖRELÄSAREN AVSLUTADE ALDRIG BEVISET)

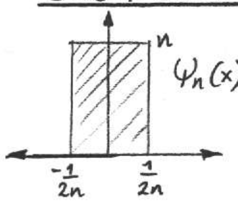
FÖRELÄSNING 14 : 1/3

DISTRIBUTIONER

GENERALISERADE FUNKTIONER

$\delta(x-x_0)$ {DIRACMÅTT} HAR EGENSKAPEN ATT OM $\phi(x)$ ÄR KONTINUERLIG SÅ ÄR $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\delta(x-x_0)\,dx = \phi(x_0)$

EXEMPEL 1:



$\delta(x)$ "=" $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$

EXEMPEL 2:

$\delta(x)$ "=" $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}$

DEFINITIONER

* $C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f \in \mathcal{C}^\infty,\ \exists M$ SÅ ATT $f(x)=0$ DÅ $|x|>M\}$

GÄLLER ÄVEN FÖR $\mathbb{R}^n$

* EN FUNKTIONAL ÄR EN AVBILDNING FRÅN ETT FUNKTIONSRUM TILL $\mathbb{C}$.

EXEMPEL 1: $\delta(x-x_0): \phi(x) \mapsto \int_{-\infty} \phi(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = \phi(x_0)$

EXEMPEL 2: "$\int$": $\phi(x) \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx \in \mathbb{C}$ $[\phi \in C_0^\infty]$

EXEMPEL 3: TAG $g(x)$ INTEGRERBAR, $\phi(x) \in C_0^\infty$ $\phi(x) \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) g(x)\,dx \in \mathbb{C}$

DESSA EXEMPEL ÄR:

1) LINJÄRA (TESTA MED $\phi_1 + \phi_2$)

2) KONTINUERLIGA, DVS OM $\{\phi_n(x)\} \in C_0^\infty$ SÅ ATT $\phi_n^{(k)}(x) \to 0,\ n\to\infty$

SÅ GÄLLER ATT $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x) g(x)\,dx \to 0,\ n \to \infty$

DEFINITION AV DISTRIBUTION

EN FUNKTIONAL $F: C_0^\infty \mapsto \mathbb{C}$ KALLAS FÖR DISTRIBUTION

OM DEN ÄR LINJÄR OCH KONTINUERLIG

1) $F(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \alpha F(\phi_1) + \beta F(\phi_2)$

2) $\phi_n \in C_0^\infty$ OCH $\phi_n^{(k)}(x) \to 0,\ n \to \infty \Rightarrow F(\phi_n) \to 0,\ n \to \infty$

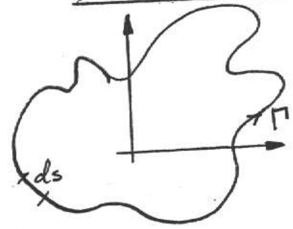
EXEMPEL 1:

$C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ {INNEHÅLLET I C_0^∞ KALLAS "TESTFUNKTIONER"}

$\delta_{x_0,y_0} : C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \mapsto \mathbb{C}$

$\phi(x,y) \mapsto \phi(x_0,y_0)$

EXEMPEL 2:



LÅT $F(\phi) = \int_\Gamma \phi(x,y)\,ds = \int \phi(x(s),y(s))\,|(x'(s),y'(s))|\,ds$

FUNKTIONER KAN DERIVERAS. HUR DEFINIERAS DERIVATA AV DISTRIBUTION?

OM $g(x)$ ÄR $\mathscr{C}^1$-FUNKTION LÅT $F(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,g(x)\,dx$

$\tilde{F}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,g'(x)\,dx$

NATURLIG DEFINITION:

$F' = \tilde{F} \quad \tilde{F}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,g'(x)\,dx = \overbrace{\left[\phi(x)\,g(x)\right]_{-\infty}^{\infty}}^{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x)\,g(x)\,dx =$

$= F(-\phi')$

DEFINITION:

$F'(\phi) \equiv F(-\phi') \qquad F^{(k)}(\phi) = F((-1)^k \phi^{(k)})$

FOURIERTRANSFORM AV DISTRIBUTION

EXEMPEL:

$$\begin{cases} \hat{\delta} = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega}\,\delta(x-x_0)\,dx = e^{-ix_0\omega} = 1\,,\quad x_0 = 0 \\ F(e^{-ix\omega}) = 1 \end{cases}$$

DEFINITION:

$S = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f \in C^{\infty}.$ FÖR VARJE k OCH m GÄLLER $|x|^k |f^{(m)}(x)| \to 0,\ |x| \to \infty \}$

S' = TEMPERERADE DISTRIBUTIONER = MÄNGDEN AV LINJÄRA, KONTINUERLIGA FUNKTIONALER $S \to \mathbb{C}$

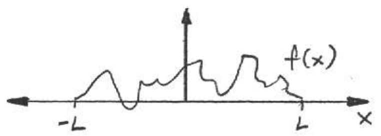
EXEMPEL:

$$F(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) g(x)\,dx \qquad \tilde{F}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iyx}\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-ixy}\,dx\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\hat{\phi}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(y) g(y)\,dy = F(\hat{\phi})$$

REPETITION AV KURSEN:

1) FOURIERSERIER



$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}x}\,,\quad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x}\,dx$$

2) SÖKA ORTOGONALA BASER I L^2, $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ SÅ ATT

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

SATS: OM $\{\phi_n\}$ ÄR ON (ORTONORMERAD) OCH $[\langle f, \phi_n\rangle = 0,\ \forall n \Rightarrow$ $\Rightarrow f = 0]$ SÅ BILDAR $\{\phi_n\}$ BAS.

3) SKALÄRPRODUKTER:

$$\langle f, g\rangle_w = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,w(x)\,dx$$

4) VARIABELSEPARATION:

EXEMPEL: $\frac{T'}{T} = K\frac{X''}{X}$

ALLMÄNT: $\frac{L_1(T)}{T} = \frac{L_2(X)}{X} = \lambda$

5) STURM-LIOUVILLE PROBLEM:

$L(x) - \lambda w x = 0$

PROBLEM: SÖK EGENVÄRDEN OCH EGENFUNKTIONER OM L SJÄLVADJUNGERAD

VILL HA BAS AV EGENFUNKTIONER

6) FOURIERTRANSFORMEN

$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega$

$\mathcal{F}(f(x-a)) = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$

$\mathcal{F}(f'(x)) = i\omega \hat{f}(\omega)$

$\|f\|^2 = \int f \cdot \bar{f}\, dx \qquad \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|^2$