Bevislista, Fourieranalys:

1) Konvergenssatsen för F-serier

Formulering: generell

Bevis: för punkter där f kontin

2) Integrering / Derivering av F-serier (s. 38)

3) Fouriers inversionssats:

Formulering: Inkl sats 7.3

Bevis: för $f, \hat{f} \in L^1$

4) Plancherels formel om $f, \hat{f}, g, \hat{g} \in L^1 \cap L^2$ (s. 221)

5) Samplingsteoremet (s. 230)

6) Bessels olikhet och konvergens för ortonormala system i L^2 (s 75)

7) BAS (Sats 3.8)

8) Villkor för fullständighet av ett ortonormalt system (Sats 3.4)

9) Visa för reg. S-L-probl:

a) Alla egenv. reella

b) Visa att egenf. för olika egenv. är ortogonala map viktfkt.

10) Visa att $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = e^{x/2(z+\frac{1}{z})}$ (s. 134)

11) Visa att Legendre-polynom är ortogonala i $L^2]-1,1[$ (s. 167)

12) Härled diffekv för Legendre-polynom (Sats 6.2, s. 168)

13) Hermite-polynomens ortogonalitet (Sats 6.11, s. 184)

Konvergenssatsen för F-serier

Föruts: f 2π-periodisk, styckvis glatt på $\mathbb{R}$

$$S_N^f(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{in\theta}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) e^{-in\psi} d\psi$$

Påst: $$\lim_{N\to\infty} S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}\left(f(\theta-) + f(\theta+)\right)$$

Bevis: (Då f kontin)

f kontin i θ_0, sätt $g(\theta) = \dfrac{f(\theta) - f(\theta_0)}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}$

g kontin för $\theta \neq \theta_0$. $g(\theta)$ har höger-/vänstergr.v

ty: enl L'Hospital:

$$\lim_{\theta\to\theta_0^+} g(\theta) = \lim_{\theta\to\theta_0^+} \frac{f'(\theta)}{ie^{i\theta}} = \frac{f'(\theta_0^+)}{ie^{i\theta_0}}, \quad \lim_{\theta\to\theta_0^-} g(\theta) = \frac{f'(\theta_0^-)}{ie^{i\theta_0}}$$

$$\Rightarrow g \text{ styckvis kontin} \overset{\text{Corollary 2.1}}{\Rightarrow} c_n(g) \to 0, \; n \to \pm\infty$$

$$f(\theta) = f(\theta_0) + e^{i\theta} g(\theta) - g(\theta) e^{i\theta_0}$$

$$\Rightarrow c_n(f) = f(\theta_0) c_n(1) + c_n(e^{i\theta} g) - e^{i\theta_0} c_n(g) =$$

Lemma 2.5

$$= f(\theta_0)\delta_{n0} + c_{n-1}(g) - e^{i\theta_0} c_n(g)$$

$$\Rightarrow S_N^f(\theta_0) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{in\theta_0} = \sum_{-N}^{N} f(\theta_0)\delta_{n0} e^{in\theta_0} + \sum_{-N}^{N}\left(c_{n-1}(g) e^{in\theta_0} - c_n(g) e^{i(n+1)\theta_0}\right) =$$

$d_n = c_{n-1}(g) e^{in\theta_0}$

$$= f(\theta_0) + \sum_{-N}^{N}(d_n - d_{n+1}) = f(\theta_0) + d_{-N} - d_{-N+1} + d_{-N+1} - d_{-N+2} \dots$$

$$\dots d_{N-1} - d_N + d_N - d_{N+1} =$$

$= f(\theta_0) + d_N - d_{N+1}$

Men

$c_n(g) \to 0,\ n \to \infty \Rightarrow d_n \to 0,\ n \to \infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\theta_0} = \lim_{N\to\infty} S_N^f(\theta_0) = f(\theta_0)$$

Derivering

Föruts: f 2π-per, kont, styckvis glatt

c_n F-koeff av f m.a.p. $e^{in\theta}$ $\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta\right)$

c_n' — " — f' — " —

Påst: $c_n' = in c_n$

Bevis:

$$c_n' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta = [\text{part. int}] = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\Big[f(\theta) e^{-in\theta}\Big]_{-\pi}^{\pi}}_{\left.\begin{array}{l} f(\pi) = f(-\pi) \\ e^{in\pi} = e^{-in\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow [\ ] = 0} -$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (+in) f(\theta) e^{-in\theta} =$$

$$= in \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = in c_n$$

Integrering

Föruts: f 2π-per, st.v. kontin.

c_n F koeff av f m.a.p $e^{in\theta}$

$$F(\theta) = \int_0^\theta f(\phi)\,d\phi$$

Påst: $$F(\theta) = c_0\theta + C_0 + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{in} e^{in\theta}$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\,d\theta$$

Bevis: F är kontin och st.v. glatt ty integral av st.v. kontin fkt. $c_0 = 0 \Rightarrow F$ 2π-per., ty:

$$F(\theta+2\pi) - F(\theta) = \int_\theta^{\theta+2\pi} f(\phi)\,d\phi \overset{f\ 2\pi\text{-per.}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\,d\phi = 2\pi c_0 = 0$$

Konvergens av F-serier medför då

$$F(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}$$

Enligt deriv. av F-serie gäller då:

$$C_n = \frac{c_n}{in},\quad n\neq 0,\quad C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\,d\theta \quad \text{(vanliga formeln)}$$

Om $c_0 \neq 0$, sätt $g(\theta) = f(\theta) - c_0 = \sum_{n\neq 0} c_n e^{in\theta}$

$$G(\theta) = \int_0^\theta g(\phi)\,d\phi = \int_0^\theta (f(\phi) - c_0)\,d\phi = F(\theta) - c_0\theta$$

Då gäller för G enl ovan

$$G(\theta) = C_0 + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{in} e^{in\theta} = F(\theta) - c_0\theta$$

$$\Rightarrow F(\theta) = c_0\theta + C_0 + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{in} e^{in\theta}$$

Plancherels formel

Föruts: $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in L^1 \cap L^2$

Påst: $2\pi \langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$

Bevis: $2\pi \langle f, g\rangle = 2\pi \int f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = 2\pi \int f(x) \overline{\frac{1}{2\pi}\int \hat{g}(\xi) e^{ix\xi}\,d\xi}\,dx =$

$$= \iint f(x)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,e^{-ix\xi}\,d\xi\,dx = \int \overline{\hat{g}(\xi)} \underbrace{\int f(x)\,e^{-ix\xi}\,dx}_{\hat{f}(\xi)}\,d\xi =$$

$$= \int \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

Samplingsteoremet

Föruts: $f \in L^2$, $\hat{f}(\omega) = 0$ för $|\omega| \geq \Omega$

Påst: $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega t - n\pi)}{\Omega t - n\pi}$

Bevis: Utveckla $\hat{f}(\omega)$ i en F-serie på $[-\Omega, \Omega]$ (skriv $-n$ istället för n):

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega\frac{\pi}{\Omega}} \qquad (|\omega| \leq \Omega)$$

$$c_{-n} = \frac{\langle \hat{f}(\omega), e^{-in\omega\frac{\pi}{\Omega}} \rangle}{\underbrace{\| e^{-in\omega\frac{\pi}{\Omega}} \|^2}_{2\Omega}} = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega)\, e^{in\omega\frac{\pi}{\Omega}}\,d\omega = \left[\hat{f} = 0, |\omega| \geq \Omega\right]$$

$$= \frac{1}{2\Omega}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{in\omega\frac{\pi}{\Omega}} d\omega = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}\Omega} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) = \frac{\pi}{\Omega} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$$

Invers F-transf.

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\Omega} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) e^{-in\pi\omega/\Omega}$$

$\hat{F}$-invers:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{\pi}{\Omega} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) e^{-in\pi\omega/\Omega} e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\Omega} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{\omega i\left(t - \frac{n\pi}{\Omega}\right)} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\Omega} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \left[\frac{e^{\omega i\left(t - \frac{n\pi}{\Omega}\right)}}{i\left(t - \frac{n\pi}{\Omega}\right)}\right]_{-\Omega}^{\Omega} =$$

$$= \frac{1}{2\Omega} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \left(\frac{e^{i(\Omega t - n\pi)} - e^{-i(\Omega t - n\pi)}}{i\left(t - \frac{n\pi}{\Omega}\right)}\right) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega t - n\pi)}{\Omega t - n\pi}$$

Bessels olikhet

Föruts: $\{\phi_n\}_1^\infty$ ortonormal uppsättning i $L^2]a,b[$

$f \in L^2]a,b[$

Påst: $\sum_1^\infty |\langle f,\phi_n\rangle|^2 \le \|f\|^2$

Bevis: $\langle f, \langle f,\phi_n\rangle \phi_n\rangle = \int_a^b f(x)\overline{\langle f,\phi_n\rangle \phi_n(x)}\, dx =$

$= \overline{\langle f,\phi_n\rangle} \int_a^b f(x)\overline{\phi_n(x)}\, dx = \overline{\langle f,\phi_n\rangle}\langle f,\phi_n\rangle = |\langle f,\phi_n\rangle|^2$

Pythagoras sats ger:

$$\|\sum_1^N \langle f,\phi_n\rangle \phi_n\|^2 = \sum_1^N |\langle f,\phi_n\rangle|^2 \|\phi_n\|^2 = \sum_1^N |\langle f,\phi_n\rangle|^2$$

Enl Lemma 3.1:

$$0 \le \|f - \sum_1^N \langle f,\phi_n\rangle \phi_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle f, \sum_1^N \langle f,\phi_n\rangle \phi_n\rangle$$

$$+ \|\sum_1^N \langle f,\phi_n\rangle \phi_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_1^N |\langle f,\phi_n\rangle|^2 + \sum_1^N |\langle f,\phi_n\rangle|^2 =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_1^N |\langle f,\phi_n\rangle|^2 \Rightarrow \sum_1^N |\langle f,\phi_n\rangle|^2 \le \|f\|^2$$

$$N \to \infty \Rightarrow \sum_1^\infty |\langle f,\phi_n\rangle|^2 \le \|f\|^2$$

Konvergens av ortonormala syst i L^2

Föruts: $f \in L^2]a,b[$

$\{\phi_n\}$ ortonormal uppsättn fkt i $L^2]a,b[$

Påst: $\sum_1 \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ konv. i normen och

$$\left\| \sum_1 \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\| \leq \|f\|$$

Bevis: $\sum_1 |\langle f, \phi_n \rangle|^2$ konv enl Bessels olikhet

Pythagoras ger därför

$$\left\| \sum_m^k \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 = \sum_m^n |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \to 0, \quad m, k \to \infty$$

Därför bildar delsummorna av $\sum_1 \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ en Cauchy-följd och eftersom $L^2]a,b[$ är fullständig konv $\sum_1 \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$. Då ger Pythagoras och Bessel:

$$\left\| \sum_1^\infty \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 = \lim_{N \to \infty} \left\| \sum_1^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 = \lim_{N \to \infty} \sum_1^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2$$

$$= \sum_1^\infty |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

BAS

Förutš: $\{\phi_n\}$ ortonormal uppr. fkt i $L^2(D)$

$f \in L^2(D)$

Påst.: $\|f - \sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \| \leq \|f - \sum c_n \phi_n\|$

$\forall c_n : \sum |c_n|^2 < \infty$.

Likhet endast när $c_n = \langle f, \phi_n \rangle \ \forall n$

Bevis:

$$f - \sum c_n \phi_n = f - \sum (c_n + \langle f, \phi_n \rangle - \langle f, \phi_n \rangle) \phi_n =$$

$$= \left(f - \sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n\right) + \sum (\langle f, \phi_n \rangle - c_n) \phi_n$$

$\left(f - \sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n\right)$ ortogonal mot ϕ_k, ty:

$$\left\langle \left(f - \sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n\right), \phi_k \right\rangle = \langle f, \phi_k \rangle - \sum \langle f, \phi_n \rangle \langle \phi_n, \phi_k \rangle =$$

endast $n=k$ överlever

$$= \langle f, \phi_k \rangle - \langle f, \phi_k \rangle = 0$$

$\Rightarrow \left(f - \sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n\right)$ ortog. mot $\sum (\langle f, \phi_n \rangle - c_n) \phi_n$

Då ger Pythagoras: $\|f - \sum c_n \phi_n\|^2 = \|f - \sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n\|^2 + \underbrace{\sum |\langle f, \phi_n \rangle - c_n|^2}_{\geq 0 \ \forall c_n}$

$= 0 \Leftrightarrow c_n = \langle f, \phi_n \rangle \ \forall n$

Villkor för fullständighet av ON-system

Föruts: $\{\phi_n\}_1^\infty$ ON-syst i $L^2]a,b[$

Påst: Följande påståenden är ekvivalenta.

a) $\langle f,\phi_n\rangle = 0 \ \forall n \Rightarrow f = 0$

b) $\forall f \in L^2]a,b[$ är $f = \sum_1^\infty \langle f,\phi_n\rangle \phi_n$ där serien är konv i normen

c) $\|f\|^2 = \sum_1^\infty |\langle f,\phi_n\rangle|^2, \ \forall f \in L^2]a,b[$

Bevis: Bevisgång $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$

<u>$a \Rightarrow b$:</u> $f \in L^2]a,b[\Rightarrow \sum \langle f,\phi_n\rangle \phi_n$ konv i normen enl. Lemma 3.2

Låt $g = f - \sum_1^\infty \langle f,\phi_n\rangle \phi_n$

$$\langle g,\phi_m\rangle = \langle f,\phi_m\rangle - \sum_1^\infty \langle f,\phi_n\rangle\langle \phi_n,\phi_m\rangle = \langle f,\phi_m\rangle - \langle f,\phi_m\rangle = 0$$

Om a) sant är $g = 0$ och b) sant

<u>$b \Rightarrow c$:</u> $f = \sum \langle f,\phi_n\rangle \phi_n \overset{\text{Pythagoras}}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow \|f\|^2 = \lim_{N\to\infty} \Big\|\sum_1^N \langle f,\phi_n\rangle \phi_n\Big\|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_1^N |\langle f,\phi_n\rangle|^2 = \sum_1^\infty |\langle f,\phi_n\rangle|^2$$

<u>$c \Rightarrow a$:</u> Om c) sant och $\langle f,\phi_n\rangle = 0$ är $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$

Egenskaper för reg. S-L-probl.

Förutს: λ_n egenvärden till reg S-L-probl: $L(f)+\lambda w f = 0$

f_n egenf. för λ_n

$L(f) = (rf')' + pf$

på $[a,b]$

$r, r', p \in \mathbb{R}$

$r > 0$

Påst: a) $\lambda_n \in \mathbb{R} \ \forall n$

b) $\langle f_n, f_m \rangle_w = 0$, $(\lambda_n \neq \lambda_m)$

Bevis:

a) λ egenv. med egenf. f

$$\Rightarrow \lambda \|f\|_w^2 \overset{(3.33)}{=} \langle \lambda w f, f \rangle = \langle -L(f), f \rangle = [(3.27) + \text{randvillk}]$$

$$= -\langle f, L(f) \rangle = \langle f, \lambda w f \rangle = \bar{\lambda} \|f\|_w^2$$

$$f \neq 0 \Rightarrow \|f\|_w^2 > 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $L(f) + \lambda w f = 0$ och $L(g) + \mu w g = 0$

$$\lambda \langle f, g \rangle_w = \langle \lambda w f, g \rangle = \langle -L(f), g \rangle = [(3.27) + \text{randvillk}] =$$

$$= -\langle f, L(g) \rangle = \langle f, \mu w g \rangle \overset{\mu \text{ reell}}{=} \mu \langle f, g \rangle_w$$

$$\Rightarrow (\lambda - \mu) \langle f, g \rangle_w = 0 \overset{\lambda \neq \mu}{\Rightarrow} \langle f, g \rangle_w = 0$$

Genererande fkt för Bessel

Föruts: $J_n(x)$ Besselfkt av ordn n

$z \neq 0$

Påst: $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = e^{\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}$

Bevis: $\displaystyle e^{\frac{xz}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\frac{xz}{2}\right)^j, \quad e^{-\frac{x}{2z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{x}{2z}\right)^k$

Båda serierna är abs.-konv. och kan därför multipliceras och summeras i vilken ordn. som helst:

$$\Rightarrow e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{j-k}}{j!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{j+k} =$$

$$= \begin{bmatrix} j-k=n \\ j=n+k \end{bmatrix} = \sum_{n,k} \frac{(-1)^k z^n}{(n+k)!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k)!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\right] z^n$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n \qquad \left(\frac{1}{(n+k)!} = \frac{1}{\Gamma(n+k+1)} = 0, \quad (n+k) < 0\right)$$

Visa Legendrepolynom ortogonala

Förut: $\{P_n\}_0^\infty$ Legendre-polynomen

Påst: $\{P_n\}_0^\infty$ är ortogonala i $L^2]-1,1[$

Bevis: För $f \in C^{(n)}$ på $[-1,1]$ gäller

$$2^n n! \langle f, P_n \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \, dx = [p.i.] =$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} f^{(n)}(x) (x^2-1)^n \, dx$$

$(x^2-1)^n$ har nollst av ordn n i ± 1

$\Rightarrow$ De $n-1$ första deriv. är 0 i ± 1

Om f är polynom av grad $< n$ gäller $\langle f, P_n \rangle = 0$ dy $f^{(n)} \equiv 0$. Speciellt gäller detta för P_m om $m < n$

$\Rightarrow \langle P_m, P_n \rangle = 0$ om $m < n$

Samma resonemang med bytta index ger:

$\langle P_m, P_n \rangle = 0, \quad m > n$

$\Rightarrow \{P_n\}_0^\infty$ ortogonala

Härledn av diff-ekv för Legendre

Föruts: P_n Legendre-polyn. av ordn. $n \geq 0$

Påst: $((1-x^2)P_n')' + n(n+1)P_n = 0$

Bevis: Låt $g(x) = ((1-x^2)P_n')'$

$\deg(P_n') = n-1 \Rightarrow \deg(x^2 P_n') = n+1 \Rightarrow \deg g = n$

Första termen är:

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\frac{d}{dx}\left((1-x^2)(nx^{n-1})\right) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left((-2x)(nx^{n-1}) - x^2(n(n-1))x^{n-2}\right)$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left(-n(-2x^n - (n-1)x^n)\right) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left(-n(n+1)x^n\right)$$

$\Rightarrow \deg(g + n(n+1)P_n) = n-1 \Rightarrow ((1-x^2)P_n')' + n(n+1)P_n$

kan skrivas som LK av $P_0, \dots, P_{n-1}$:

$$g(x) + n(n+1)P_n = ((1-x^2)P_n')' + n(n+1)P_n = \sum_0^{n-1} c_j P_j(x)$$

Ortogonalitet ger:

$$c_j = \frac{\langle g + n(n+1)P_n, P_j\rangle}{\|P_j\|^2} = \frac{\langle g, P_j\rangle + n(n+1)\overbrace{\langle P_n, P_j\rangle}^{=0,\ j<n}}{\|P_j\|^2}$$

$$\langle g, P_j\rangle = \int_{-1}^{1}((1-x^2)P_n')'P_j\,dx = [\text{p.i. } (1-x^2)=0 \text{ i } \pm 1] =$$

$$= \int_{-1}^{1} P_n \underbrace{((1-x^2)P_j')'}\,dx = 0 \Rightarrow c_j = 0$$

(polynom av grad j) $= \sum_{k=0}^{j<n} c_k P_k$ ortogonal mot P_n, $j<n$

Hermite-polynomens ortogonalitet

Förnts: $\{H_n\}_0^\infty$ Hermitepolynomen, $w(x) = e^{-x^2}$

Påst: $\{H_n\}_0^\infty$ ortogonala i $L^2_w(\mathbb{R})$

Bevis: För godt polynom f gäller

$$\langle f, H_n \rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx =$$

$$= [p.i] = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) e^{-x^2} dx \, .$$

Extratermerna försvinner ty $P(x) e^{-x^2} \to 0, x \to \infty$ för alla polynom P

Om $\deg f = m < n$, speciellt om $f = H_m, m < n$ så är $f^{(n)} \equiv 0$ och $\langle f, H_n \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle H_n, H_m \rangle = 0 \, , \, m \neq n$ enl resonemang som Legendre

$$\left[\begin{aligned} &\text{för } f = H_n: \; f^{(n)}(x) \equiv 2^n n! \\ &\Rightarrow \langle H_n, H_n \rangle = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \end{aligned} \right]$$