# OPTIK

Räkneövningar F2

71 sid

~~25:-~~ 35:-

1

# Övning 1

OBS! ÖHX ⇒ Uppgift X i övningshäftet

HX.Y ⇒ Uppgift X.Y i Hecht.

## ÖH 1

En våg beskrivs av den komplexa vågfknen $\Psi = \frac{1+3i}{1-2i} e^{i(6.3t - 108x)}$ uttryckt i SI-enheter. Beräkna vågens amplitud, fashastighet, frekvens & våglängd.

## Lösning:

Lätt. Låt $\frac{1+3i}{1-2i} = A$, en komplex amplitud!

Vad är då en komplex amplitud? Jo, den svarar mot initialfasen*. Vi kan skriva $A = |A| e^{i\varepsilon}$. Genom förlängning av nämnarens konjugat får vi på känt manér:

$$A = \frac{1+3i}{1-2i} = -1+i \Rightarrow |A| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \Psi = \sqrt{2}\, e^{i(6{,}3t - 108x + \varepsilon)}$$

*[illegible] Amplituden är alltså $\sqrt{2}$ m [illegible]

(2) Fasen $\varphi = \underbrace{6{,}3}_{\omega}t - \underbrace{108}_{k}x + \varepsilon$

$\omega = 2\pi f$ (eller $\omega = 2\pi\nu$, om vi använder de beteckningar som Hecht föredrar)

$\Rightarrow$ frekvensen $f = \frac{6{,}3}{2\pi}$ Hz

$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{108}$ m

Fashastigheten $v = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \frac{6{,}3 \cdot \lambda}{2\pi} =$

$= \frac{6{,}3}{108}$ m/s.

II

# ÖH 4

En tuff laser ger pulser med energin 1 mJ under tiden 10 ns. Hur stor är laserns puls-effekt? Strålen fokuseras till en fläck med diametern 0,5 mm. Beräkna intensiteten och elektriska fältet i fokalpkten. $\lambda_{laser} = 693{,}4$ nm. Hur många fotoner innehåller varje puls?

(3)

## Lösning

Pulseffekt $= \frac{\text{energi}}{\text{tid}} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-9}} \; W = 10^5 \; W$

Strålen fokuseras till en pkt med diameter 0,5 mm

Arean $= \frac{\pi \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-6}}{4} \; m^2 = \frac{\pi}{16} \cdot 10^{-6}$

Intensiteten I är lika med effekt per area enhet, och vi får således att $I = \frac{10^5}{\frac{\pi}{16} \cdot 10^{-6}} = \frac{16 \cdot 10^{11}}{\pi} \; J/sm^2$

För att få fram det elektriska fältet utnyttjar vi sambandet (se Hecht sid. 49)

$$I = \varepsilon_0 c \frac{E_0^2}{2} \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\varepsilon_0 c}} = 1{,}95 \cdot 10^7 \; V/m$$

Fotonantalet fås genom att dividera totala energin med energin hos en foton. $E_{foton} = \hbar \cdot \omega = \hbar \cdot \frac{2\pi \cdot c}{\lambda} =$
$= 2{,}87 \cdot 10^{-19} J$. # fotoner $= \frac{10^{-3}}{2{,}87 \cdot 10^{-19}} = 3{,}48 \cdot 10^{15}$ st.

$\square$

## H2.16

Skriv ekvationen för en harmonisk våg som färdas i negativ x-riktning med $A = 10^3 \; V/m$, $T = 2{,}2 \cdot 10^{-15} s$, $v = 3 \cdot 10^8 \; m/s$. $\psi(0,0) = 10^3 \; V/m$

## Lösning:

Begynnelsevillkoret ger att vi har en cosinus-fkn. $\psi(x,t) = A\cos(kx + kvt)$

VGV

(4) Att vågen färdas i negativ riktning ser vi tydligt, därför att om fasen ska vara konstant (vilket den ska) så måste x minska då t ökar.

Vidare fås: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{Tv} = 9{,}5 \cdot 10^{+6}\ m^{-1}$ jag råkade skriva minus, men det ska vara plus

$$\Psi(x,t) = 10^3 \cos(9{,}5 \cdot 10^6 (x + 3 \cdot 10^8 t))$$

$\square$

## H2.26

Vilka av följande beskriver fortskridande vågor?

a) $\Psi(x,t) = e^{-(a^2y^2+b^2t^2-2abty)}$

b) $\Psi(x,t) = A\sin(az^2-bt^2)$

c) $\Psi(x,t) = A\sin 2\pi(\frac{x}{a}+\frac{t}{b})^2$

d) $\Psi(x,t) = A\cos^2 2\pi(t-x)$

## Lösning

Vi vill kunna skriva $\Psi$ som en fkn av $(x \pm vt)$

a) $\Psi = e^{-(ay-bt)^2} = e^{-a^2(y-\frac{b}{a}t)^2} = e^{-a^2(y-vt)^2}$

Japp. En schysst våg.

b) Denna går ej att skriva på önskad form. $az^2-bt^2$ går inte att mickla med.

EJ fortskridande våg.

⑤ c) $\left(\frac{x}{a}+\frac{t}{b}\right)^2 = \frac{1}{a^2}\left(x+\underbrace{\frac{at}{b}}_{v}\right)^2$ *

* $\Psi(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{a^2}(x+vt)^2\right)$ Våg.

d) Här har vi ju rätt form direkt. Våg som rör sig i pos. x-led med $v = 1\,m/s$.

D

# H2.36

Skriv ett uttryck för en harmonisk plan våg med amplitud A, frekvens ω som rör sig i en riktning given av $\bar{k}$ som ligger på en linje från origo till (4,2,1)

## Lösning

En harmonisk planvåg: $\Psi = A\sin(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega t)$

Notera att det i uppgiften står att ω är <u>frekvensen</u>. Vår fulle övningsledare behandlade den dock som vinkelfrekvensen, och förklarade sedan att man brukar strunta i faktorn 2π. Nu vet du varför det blir som det blir.

$\bar{k} = k\hat{k} \quad \hat{k} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{4^2+2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$

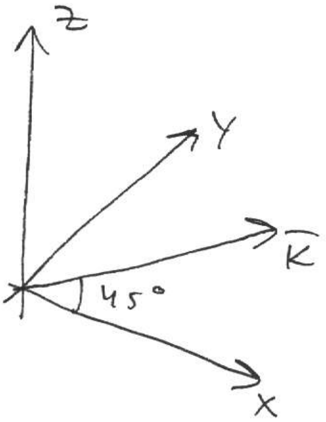
$\bar{k}\cdot\bar{r} = \frac{k}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{4xk}{\sqrt{21}} + \frac{2yk}{\sqrt{21}} + \frac{zk}{\sqrt{21}}$

$$\therefore \quad \Psi = A \sin\left(\frac{4xk}{\sqrt{21}} + \frac{2yk}{\sqrt{21}} + \frac{zk}{\sqrt{21}} - \omega t\right) \qquad \square$$

# H 3.11

En linjärpolariserad harmonisk planvåg färdas längs en linje i xy-planet med 45° vinkel mot x-axeln. Skriv en ekvation för vågen och beräkna flödestätheten i vakuum. Amplituden = 10 V/m.

## Lösning




$$\bar{E} = \bar{E}_0$$

$$\bar{E} = \bar{E}_0 \cos(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)$$

$$\bar{k} = k\hat{k} \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

$\hat{k}$ enhetsvektor

$$\hat{k} = \begin{pmatrix} \cos 45° \\ \sin 45° \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{k} = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Svänger i xy-planet $\perp$ mot utbredningsriktn.

$\bar{E}_0 = E_0 \hat{E}_0 = 10\hat{E}_0$ Men hur får vi $\hat{E}_0$ då? Jo..

$\hat{E}_0 \cdot \hat{k} = 0$ ty ortogonala $\Rightarrow \hat{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{E} = \frac{10}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \omega t\right)$$ [redacted]

Flödestätheten då? $I = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \varepsilon_0 c \frac{E_0^2}{2}$ (för sinusoidal våg i vakuum)

$$\Rightarrow I = \varepsilon_0 c \frac{E_0^2}{2} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{10^2}{2} = 0{,}13 \ \mathrm{W/m^2} \quad \square$$

7

# Övning 2

Nu funkar det så här:
ÖX ⇒ övningshäftet
HX ⇒ Hecht

## Ö15

Två koherenta vågor med samma utbredningsriktning har de komplexa amplituderna $A_1 = 4 + 2i$ $A_2 = 2e^{i\pi/3}$. Hur stor är den resulterande störningens amplitud?

## Lösning

$$\varepsilon_1 = \arctan(1/2)$$

$$\varepsilon_2 = \pi/3$$

Välj koord. syst. så att vågorna utbreder sig i x-riktn.

$$\Psi_1 = A_1 e^{i(wt-kx)} \qquad \Psi_2 = A_2 e^{i(wt-kx)}$$

Resulterande våg: (superposition)

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = \sqrt{20}\, e^{i(wt-kx+\varepsilon_1)} + 2e^{i(wt-kx+\varepsilon_2)}$$

$$= e^{wt} \underbrace{\left( \sqrt{20}\, e^{i(\underbrace{-kx+\varepsilon_1}_{\alpha_1})} + 2e^{i(\underbrace{-kx+\varepsilon_2}_{\alpha_2})} \right)}_{A_0 = \text{Kompl. ampl. för sammansatt våg}}$$

Hur får vi nu fram ngt vettigt ur det här? Jo, vi tar till lite vanlig hederlig komplexanalys.

$$A_0^2 = \left(\sqrt{20}\, e^{i\alpha_1} + 2e^{i\alpha_2}\right) \underbrace{\left(\sqrt{20}\, e^{-i\alpha_1} + 2e^{-i\alpha_2}\right)}_{\text{konjugatet}} =$$

$$= 20 + 4 + 2\sqrt{20}\Big(\underbrace{e^{i(\alpha_1-\alpha_2)} + e^{-i(\alpha_1-\alpha_2)}}_{2\cos(\alpha_1-\alpha_2)}\Big) =$$ 8

$$= 24 + \underbrace{4\cdot\sqrt{20}\cdot\cos(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}_{\text{interferenston}}$$

$$\therefore \quad A_0 = \sqrt{24+4\sqrt{20}\cos(\varepsilon_1-\varepsilon_2)} \approx 6{,}2 \text{ V/m}.$$

□

## Ö16

Fem vågor ger vardera intensiteten $2 \text{ mW/m}^2$ i en pkt. Bestäm den resulterande intensiteten om vågorna är a) inkoherenta b) koherenta & i fas.

## Lösning

Tänk på föregående uppgift! Vi lade ihop två vågor och fick $A_0^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$

Om vi generaliserar uttrycket till addition av N st vågor får vi $E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}^2 + 2\sum_{j>i}^{N}\sum_{i=1}^{N} E_{0i}E_{0j}\cos(\alpha_i-\alpha_j)$

Med detta som utgångspunkt är det inte helt hyperomöjligt att lösa uppgiften.

forts ...

⑨ forts... Ö16

a) Inkoherenta vågor ger totalt sett ingen interferens.

$$\langle \cos(\alpha_i - \alpha_j) \rangle = 0$$

$$E_0^2 = 5 E_{0i}^2$$ (de var ju samma ännu)

Intensiteterna adderas (intensitet är ju prop. mot ampl. i kvadrat). Intens. för 5 vågor $= \underline{\underline{5 \cdot 2 \ mV/m^2}}$

b) I fas! $\alpha_i = \alpha_j$

$$\cos(\alpha_i - \alpha_j) = 1$$

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}^2 + 2 \sum_{j>i}^{N} \sum_{i=1}^{N} E_{0i} E_{0j} = \left( \sum_{i=1}^{N} E_{0i} \right)^2$$

Amplituderna adderas!

$$\left( \sum_{i=1}^{N} E_{0i} \right)^2 = 5^2 E_{0i}^2 = 25 E_{0i}^2$$

Dvs: Intensiteten blir 25 ggr större, eller närmare bestämt 50 mV/m².

□

# Ö17



Två harmoniska vågor superponeras. De har samma amplitud och fashastighet, men olika frekvens och vågtal.

$$\zeta_1(x,t) = a\cos 2\pi(\nu_1 t - x/\lambda_1)$$

$$\zeta_2(x,t) = a\cos 2\pi(\nu_2 t - x/\lambda_2)$$

Ge matematiskt uttryck för den resulterande vågen. Ange fashastighet och grupphastighet. Bla bla bla.

## Lösning

Resulterande våg

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = a\cos(\omega_1 t - k_1 x) + a\cos(\omega_2 t - k_2 x) =$$

$$= \left[\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] =$$

$$= 2a\cos\left(\frac{\omega_1 t - k_1 x + \omega_2 t - k_2 x}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1 t - k_1 x - \omega_2 t + k_2 x}{2}\right) =$$

$$= 2a\cos\left(\underbrace{\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}}_{\bar{\omega}}t - \underbrace{\frac{(k_1+k_2)}{2}}_{\bar{k}}x\right)\cos\left(\underbrace{\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}}_{\omega_m}t - \underbrace{\frac{(k_1-k_2)}{2}}_{k_m}x\right) =$$

$$= 2a\cos(\omega_m t - k_m x)\underbrace{\cos(\bar{\omega} t - \bar{k} x)}_{\text{bärvåg}}$$

forts...

(11)

Ö17 forts ...

## Fashasthighet (lite väl många h. kanske borde skriva med blyerts? nå...)

$$\frac{\overline{\omega}}{\overline{k}} = \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2} = \frac{\nu_1+\nu_2}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}} = \frac{\lambda_1\lambda_2(\nu_1+\nu_2)}{\lambda_1+\lambda_2} =$$

$$= \frac{\lambda_1\nu_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_2\nu_2}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{V_{f_1}\lambda_2+V_{f_2}\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} =$$

$$= [V_{f_1}=V_{f_2}] = V_f\,\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = V_f$$

## Grupphastighet

$$V_g = \frac{\omega_m}{k_m} = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} = \cancel{\frac{\nu_1-\nu_2}{k_1-k_2}} = \frac{\nu_1-\nu_2}{\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}} =$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2(\nu_1-\nu_2)}{\lambda_2-\lambda_1} = V_f\,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} = V_f$$

$\square$

## Ö18

Fashast. i ett visst material ges av $V_f = C_1 + C_2\lambda$
$C_1, C_2$ konstanter. $\lambda$ våglängd. Bestäm grupphastigheten.

### Lösning

$$\omega = kV_f = C_1k + C_2\lambda k = C_1k + C_2\cdot\lambda\cdot\frac{2\pi}{\lambda} = C_1k + C_2\cdot 2\pi$$

$\omega = C_1k + 2\pi C_2$ Dispersionsrelation

Grupphastighet $V_g = \frac{d\omega}{dk} = C_1$

$\square$

# H7.14

Vi slår till två stämgafflar, med frekvensen 340 respektive 342 Hz. Vad hör vi?

Lösning:

Antag att örat befinner sig vid fixt x.
$\Rightarrow$ Inget x-beroende.

$\Psi_1(t) = A\cos\omega_1 t \quad \Psi_2(t) = A\cos\omega_2 t$

$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 =$ [enl. samma trig. formel som i Ö17] =

$$= 2A\cos\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]\cos\left[\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right] =$$

$$= 2A\cos\left[2\pi\underbrace{\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}_{\frac{340+342}{2}=341\text{ Hz}}t\right]\cos\left[2\pi\underbrace{\left(\frac{\nu_1-\nu_2}{2}\right)}_{\frac{340-342}{2}=-1\text{ Hz}=1\text{ Hz}}t\right]$$

tonhöjd

svävning

$\square$

# H 7.19

Våg i vätska. Bla bla bla. Utbredningshastigheten ges av

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\Upsilon}{\rho\lambda}}$$

där $g$ = accelerationskonstanten
$\rho$ = densiteten $\lambda$ = våglängden
$\Upsilon$ = ytspänning

Beräkna grupphastigheten för en puls med "lång" våglängd. Dvs $k = \frac{2\pi}{\lambda} << 1$.

byt!

## Lösning:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \left[\omega = v_f k\right] = \frac{d}{dk}\left[\sqrt{\frac{g}{k} + \frac{k\Upsilon}{\rho}} \cdot k\right] =$$

$$= \frac{d}{dk}\left(\sqrt{gk + \frac{k^3\Upsilon}{\rho}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{gk + \frac{k^3\Upsilon}{\rho}}} \cdot \left(g + \frac{3k^2\Upsilon}{\rho}\right)$$

Okej! Låt nu $k << 1$. Då blir $v_g \approx \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{gk}} \cdot g =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$ Jaha där ser man.

$\square$

# #7.21

Visa att grupphast. kan skrivas

$$V_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

## Lösning:

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} \overset{1)}{=} \frac{d}{dk}\left(\frac{ck}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{dk}{dk} + k\frac{d}{dk}\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= c\left(\frac{1}{n} - \frac{k}{n^2}\frac{dn}{dk}\right) = \frac{c}{n}\left(1 - \underbrace{\frac{k}{n}}_{\frac{\omega}{c}}\frac{dn}{d\omega}\cdot V_g\right)$$

$$\Rightarrow V_g\left(1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right) = \frac{c}{n}$$

$$\Rightarrow V_g = \frac{c/n}{1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}}$$

1) $V_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \Rightarrow \omega = \frac{ck}{n}$

$n \equiv \frac{c}{v}$ ← hast. i medret

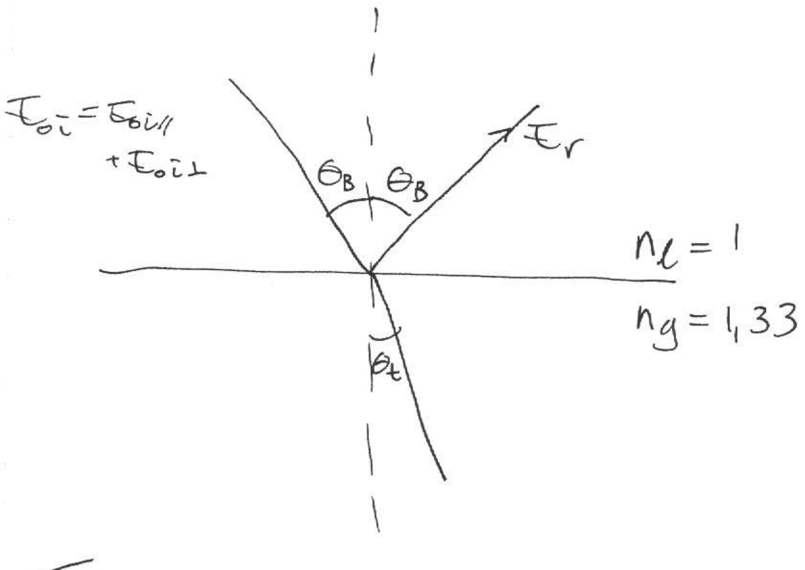
(15)

# ÖVNING 3

## Ö7

Opolariserat ljus skickas under Brewstervinkel mot en plan glasskiva ($n=1,33$). Ber. de elektr. fältst. och polarisationsgraderna på det refl. ljuset.

## Lösning




För Brewstervinkel gäller $\theta_B + \theta_t = \pi/2$

Fresnells lag: $n_l \sin\theta_B = n_g \sin\theta_t =$

$= n_g \sin(\pi/2 - \theta_B) = n_g \cos\theta_B$

$\Rightarrow \tan\theta_B = \dfrac{n_g}{n_l} \Rightarrow \theta_B \approx 53,06°$

$$r_\parallel = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)_\parallel = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\underbrace{\tan(\theta_i + \theta_t)}_{\to \infty \text{ då } \theta_i \to \theta_t}} = (\theta_i = \theta_B) = 0$$

$\because$ $E_{or\parallel} = 0$

(16)

$$r_\perp = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)_\perp = \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} = -\sin(\theta_B - \theta_t) =$$

$$= -\sin(\theta_B - (\pi/2 - \theta_B)) = -\sin(2\theta_B - \pi/2) =$$

$$= \sin(\pi/2 - 2\theta_B) \approx -0{,}278$$

$$E_{or\perp} = -0{,}278 \cdot E_{oi\perp} = -0{,}278 \cdot \frac{E_{oi}}{\sqrt{2}}$$

Polarizationsgrad:

$$P_r = \frac{I_{pr}}{I_{pr} + \underbrace{I_{nr}}_{\text{naturligt} = 0}} = | I_r = I_{r\perp} = I_{pr} | = 1$$

(Jag har ingen aning om vad det är vi gör, men jag skriver på ändå)

$$t_\perp = \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}}\right)_\perp = \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_i)} = 2\cos^2\theta_B =$$

$$= 0{,}722 \quad E_{ot\perp} = 0{,}722 E_{oi\perp} = \frac{0{,}722}{\sqrt{2}} E_{oi} =$$

$$= 0{,}51 E_{oi}$$

$$t_\parallel = \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}}\right)_\parallel = \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\underbrace{\sin(\theta_i + \theta_t)}_{=1}\cos(\theta_i - \theta_t)} =$$

$$= \ldots = \frac{2\cos^2\theta_B}{\sin(2\theta_B)} = 0{,}752$$

$$E_{ot} = \frac{0{,}752}{\sqrt{2}} E_{oi} = 0{,}53 E_{oi}$$

Eftersom $E_{ot\parallel} \approx E_{ot\perp}$ är det mesta av ljuset opolariserat. $I_p = I_{max} - I_{min}$

$$I_{max} \propto (\max(t_\perp, t_\parallel) E_{oi})^2$$

17

$I_{min} \propto (\min(t_\perp, t_\parallel) E_{0i})^2$

och så får vi

$$P_t = \frac{0{,}752^2 - 0{,}722^2}{0{,}752^2 + 0{,}722^2} = 0{,}04$$

nämnare* = polariserat

täljare* = totalt

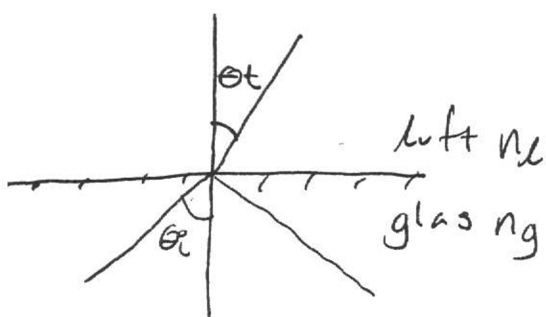
* fast tvärtom då (jag är lite trött)

□

# Ö8

Visa att reflexionskoefficienterna $r_\perp$ och $r_\parallel$ är komplexa vid totalreflexion och best. det rel. fasskiftet mellan de två komponenterna komp. i den reflekterade strålen.

## Lösning




Snells lag $n_g \sin\theta_i = n_l \sin\theta_t$

$$\sin\theta_t = \frac{n_g}{n_l}\sin\theta_i$$

Kvadrering ger $\cos^2\theta_t = 1 - \frac{n_g^2}{n_\ell^2}\sin^2\theta_i$ 

$$\Rightarrow \cos\theta_t = \sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_\ell^2}\sin^2\theta_i}$$

Varför intresserar vi oss för $\cos\theta_t$? Jo, det ingår i reflektionskoefficienten.

$$r_\perp = \frac{n_g\cos\theta_i - n_\ell\cos\theta_t}{n_g\cos\theta_i + n_\ell\cos\theta_t} \qquad \theta_i > \theta_t$$

$$\cos\theta_t = i\sqrt{-1 + \frac{n_g^2}{n_\ell^2}\sin^2\theta_i}$$

$$r_\perp = \frac{n_g\cos\theta_i - i n_\ell\sqrt{\quad}}{n_g\cos\theta_i + i n_\ell\sqrt{\quad}} =$$

$$= \frac{A - iB}{A + iB} = \begin{bmatrix} A - iB = re^{i\varphi_1} \\ A + iB = re^{i\varphi_2} \end{bmatrix} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$$

$$e^{i\varphi_1} = \frac{A}{r} - \frac{+iB}{r} = [\text{Euler}] = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$$

$$\Rightarrow \tan\varphi_1 = \frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} = -\frac{B/r}{A/r} = -\frac{B}{A}$$

$\Rightarrow \varphi_1 = -\arctan\left(\frac{B}{A}\right)$. På samma sätt fås att

$\varphi_2 = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$ $\quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -2\arctan\left(\frac{B}{A}\right)$

$$\Rightarrow \varphi = -2\arctan\left(\frac{n_\ell\sqrt{\left(\frac{n_g}{n_\ell}\right)^2\sin^2\theta_i - 1}}{n_g\cos\theta_i}\right)$$

$$r_{/\!/} = \frac{n_\ell\cos\theta_i - n_g\cos\theta_t}{n_\ell\cos\theta_i + n_g\cos\theta_t}$$

$$\varphi_{/\!/} = -2\arctan\left(\frac{n_g\sqrt{\frac{n_g^2}{n_\ell^2}\sin^2\theta_i - 1}}{n_\ell\cos\theta_i}\right)$$

(19) Okej. Relativa fasskiftet $\varphi_\perp - \varphi_\parallel$

$$\frac{r_\perp}{r_\parallel} = e^{i(\varphi_\perp - \varphi_\parallel)} = \frac{\dfrac{A_\perp - iB_\perp}{A_\perp + iB_\perp}}{\dfrac{A_\parallel - iB_\parallel}{A_\parallel + iB_\parallel}} =$$

$$= \frac{A_\perp A_\parallel + B_\perp B_\parallel - i(A_\parallel B_\perp - A_\perp B_\parallel)}{\underbrace{A_\perp A_\parallel + B_\perp B_\parallel}_{C} + i\underbrace{(A_\parallel B_\perp - A_\perp B_\parallel)}_{D}} =$$

$$= \frac{C - iD}{C + iD} \qquad C = A_\perp A_\parallel + B_\perp B_\parallel = \ldots = \frac{n_g}{n_\ell}\sin^2\theta_i\,(n_g^2 - n_\ell^2)$$

$$D = A_\parallel B_\perp - A_\perp B_\parallel = \ldots = (n_\ell^2 - n_g^2)\cos\theta_i\sqrt{\text{bla bla}}$$

$$\left[\begin{array}{l} A_\perp = n_g\cos\theta_i \\ A_\parallel = n_\ell\cos\theta_i \\ B_\perp = n_\ell\sqrt{\frac{n_g^2}{n_\ell^2}\sin^2\theta_i - 1} \\ B_\parallel = n_g\sqrt{\text{dito}} \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = -2\,\text{atan}\left(\frac{D}{C}\right) =$$

$$= -2\,\text{atan}\left(\frac{(n_\ell^2 - n_g^2)\cos\theta_i\sqrt{\frac{n_g^2}{n_\ell^2}\sin^2\theta_i - 1}}{\frac{n_g}{n_\ell}\sin^2\theta_i\,(n_g^2 - n_\ell^2)}\right) =$$

$$= 2\,\text{atan}\left(\frac{\cos\theta_i\sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{n_\ell^2}{n_g^2}}}{\sin 2\theta_i}\right)$$

□ GÔTT.

# ÖVNING 4

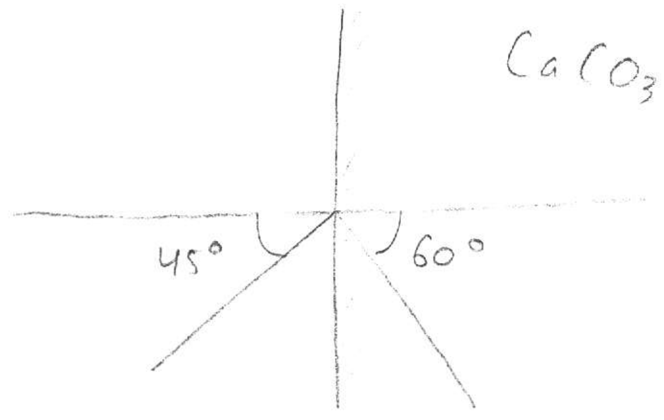
## Ö26

En tjock planparallell kalkspatskiva har o.a. $60^\circ$ mot ytnormalen. Beskriv i detalj, med användning av Huygens' princip, utbredningen av en ljusstråle ($\lambda = 589$ nm) som faller in med $45^\circ$ infallsvinkel. O.a ligger i infallsplanet. $n_o = 1{,}65835$, $n_{eo} = 1{,}48640$

## Lösning

Ljus med elfältet $\perp$ mot o.a. upplever $n_o$.

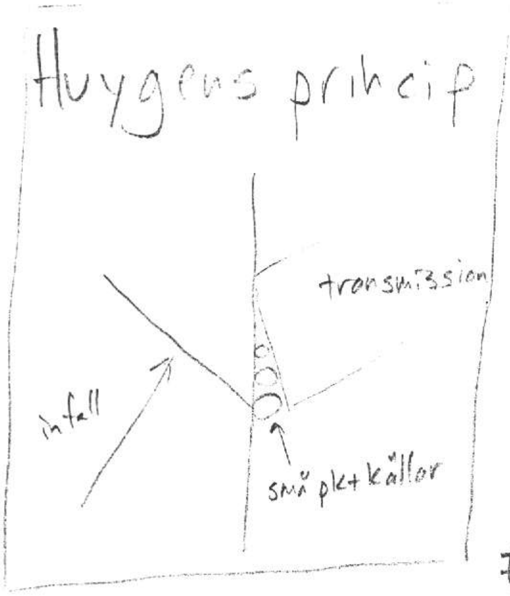
—— || —— // med o.a upplever $n_{eo}$




Studera först ljuset planpolariserat $\perp$ mot infallsplanet.

$\Rightarrow E_\perp \perp$ mot o.a.

$\Rightarrow E_\perp$ upplever $n_o$ ($E_\perp$ ordinära fältet)




Snell: $n_\ell \sin 45^\circ = n_0 \sin \theta_t$

$\Longrightarrow \theta_t = 25^\circ$

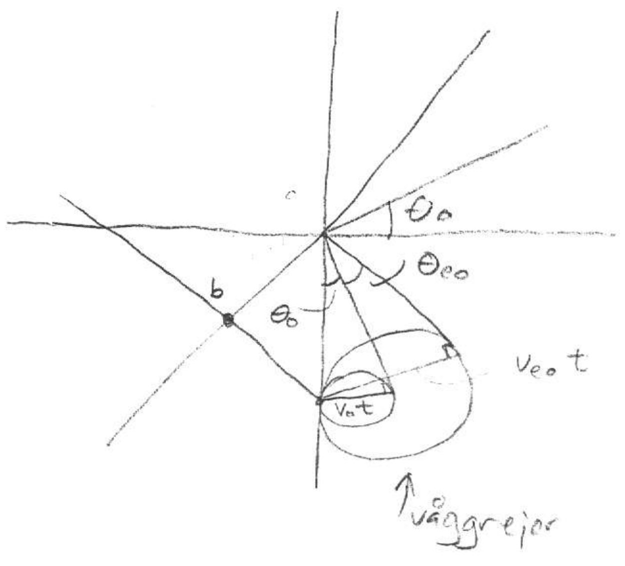
Studera ljuset polariserat $\parallel$ mot infallsplanet

VQ delar upp den transmitterade vågen i en del $E_{\parallel \parallel oa}$ och en del $E_{\parallel \perp oa}$

$E_{\parallel \perp oa}$ kommer att fördas med en hast. $v = \frac{c}{n_o}$

$E_{\parallel \parallel oa}$ ——— " ——— $v = \frac{c}{n_{eo}}$

Ny förvillande figur:




$$\sin\theta_o = \frac{v_o t}{ab'} = \frac{c}{n_o}\frac{t}{ab'}$$

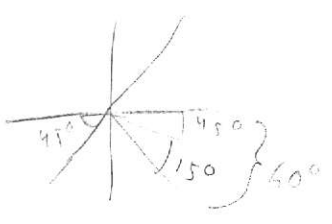
$$\sin\theta_{eo} = \frac{v_{eo} t}{ab'} = \frac{c}{n_{eo}}\frac{t}{ab'}$$

$$\sin\theta_i = \frac{v_i t}{ab} = \frac{c}{n_i}\frac{t}{ab}$$

$\Longrightarrow n_i \sin\theta_i = n_o \sin\theta_o \Longrightarrow \theta_o = 25^\circ$

$n_i \sin\theta_i = n_{eo} \sin\theta_{eo} \Longrightarrow \theta_{eo} = 28^\circ$

Hvr stor del av $E_{\parallel}$ bryts till $\theta_o$ resp. $\theta_{eo}$?




$E_{\parallel \parallel oa} = E_\parallel \cos 15^\circ$

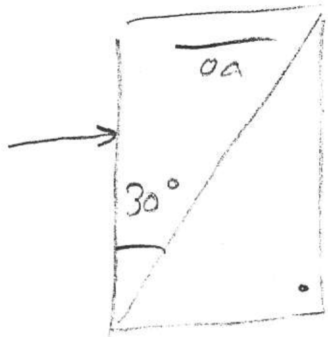
$E_{\parallel \perp oa} = E_\parallel \sin 15^\circ$

$\square$

## Ö29

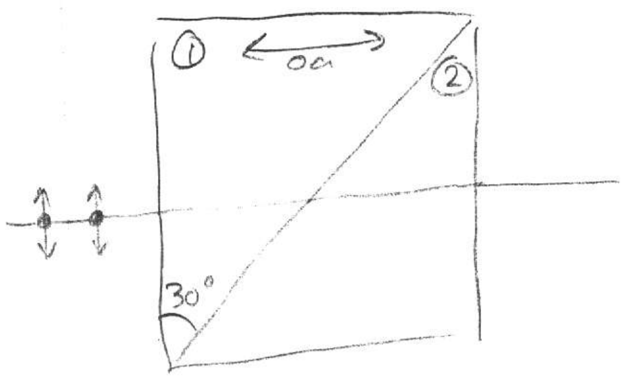
Ett prisma består av två ⊥ prismor, sammansatta med o.a ⊥ mot varandra enl. figur.

Opolariserat ljus infaller vinkelrätt mot prismat. Hur stor blir vinkeln mellan de genom prismat transmitterade strålarna?




($n_o = 1,668$, $n_{eo} = 1,491$)

## Lösning

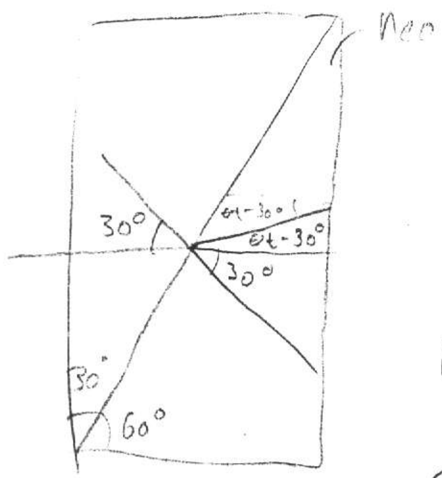



① Ljuset faller in längs o.a ⟹ Allt ljus ⊥ mot oa. ⟹ Ingen splittring

② När ljuset faller in i prisma två består det av två lika stora komponenter $I_{//oa}$ & $I_{\perp oa}$, som är polariserade // resp. ⊥ mot oa.

$I_{\perp oa} \Rightarrow n_2 = n_o = n_1 \Rightarrow$ ingen gränsyta, ingen brytning

$I_{// oa} \Rightarrow n_2 = n_{eo} \neq n_1 \Rightarrow$ gränsyta & brytning




Snell: $n_o \sin 30° = n_{eo} \sin \theta_t$

$\Longrightarrow \quad \theta_t = 34{,}01°$

$n_{eo} \sin(\theta_t - 30°) = n_e \sin \theta_t$

$\theta_f = 5{,}98°$

$\square$

# ÖVNING 5

## Ö24

Visa att vi kan skriva $P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$

## Lösning:

Skicka in pol. ljus. Då vi vrider polarisatorn kommer vi någon gång få att ljuset blir helt blockerat.

IN: $I_{pol}$ UT: $I_{max} = I_{pol}$

$I_{min} = 0$

IN: $I_{opol}$ UT: $I_{max} = \frac{I_{opol}}{2}$

$I_{min} = \frac{I_{opol}}{2}$

Skicka nu in delvis polariserat ljus

IN: $I_{\text{delv. pol.}}$ UT: $I_{max} = I_{pol} + \frac{I_{opol}}{2}$

$$I_{min} = 0 + \frac{I_{opol}}{2}$$

$$\Rightarrow I_{opol} = 2I_{min}$$

$$I_{pol} = I_{max} - \frac{I_{opol}}{2} = I_{max} - I_{min}$$

$$\text{Polarizationsgraden} = \frac{I_{pol}}{I_{opol} + I_{pol}} = \frac{I_{max} - I_{min}}{2 \cdot I_{min} + I_{max} - I_{min}}$$

Ja! Det var ju inte så svårt.

Nu till något annat.

Ö31 □

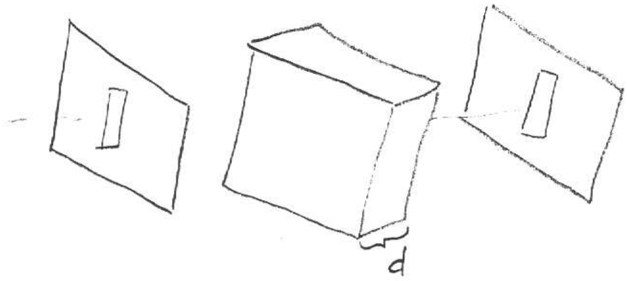
Beskriv hur man kan fixa fram ett polarizations-filter (som har max. transm. för $\lambda = 0,6563 \mu m$ och helt blockerar $\lambda = 0,6867 \mu m$) m h a två planpolarisatorer och en optiskt aktiv skiva, vars optiska rotation är

$$\phi = 2.10 + \frac{8,14}{\lambda^2} \text{ grader/mm med } \lambda$$

uttryckt i $\mu m$.

$\Rightarrow$

# Lösning




Vi vill att skivan ska vrida ljus med $\lambda_{block}$ 90°. *

1) $90(1+2m) = \left(2{,}10 + \frac{8{,}14}{\lambda_{block}^2}\right)d =$

$= A_{block} \cdot d$   Vidare vill vi att ljus med $\lambda_{max}$ ska vridas 180°.*

$$90 \cdot 2m = \left(2{,}10 + \frac{8{,}14}{\lambda_{max}^2}\right) \cdot d = A_{max} \cdot d$$

2) $\Longrightarrow \quad m = \frac{A_{max} \cdot d}{180}$

sätt in i 1) $\Longrightarrow \quad 90\left(1 + \frac{A_{max} \cdot d}{90}\right) = A_{block} \cdot d$

$$90 + A_{max} \cdot d = A_{block} \cdot d$$

$$d\,(A_{block} - A_{max}) = 90$$

$$d = \left|\frac{90}{A_{block} - A_{max}}\right| = 55 \text{ mm}$$

* eller multipler dära

Ö32

Monokromatiskt ljus ($\lambda = 589\,nm$) passerar en planpolarisator och en kalkspatskiva.

a) Kan det transmitterade ljuset göras cirkulärpolariserat om den ordinära strålen delvis absorberas i kalkspatskivan medan den extraordinära intensiteten är opåverkad?

b) Om svaret är ja, beskriv i detalj anordningen under antagande att 25% av den ordinära intensiteten absorberas i den tunnast möjliga kalkspatskivan.

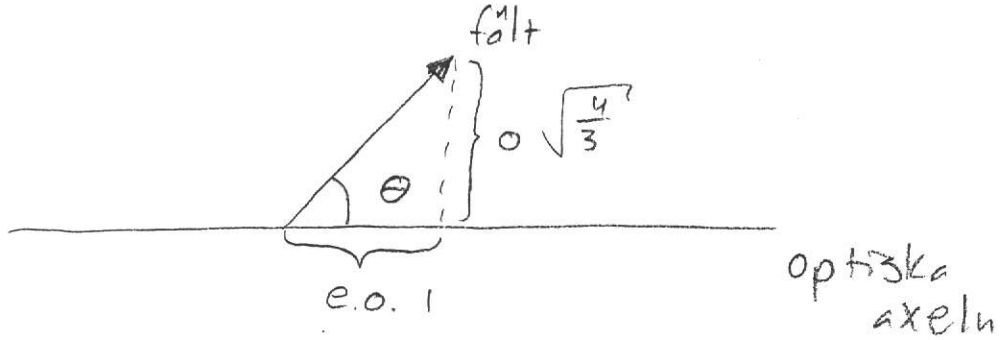
Lösning

Vi* vet att linj. polarisator + $\lambda/4$-platta ger cirkulärpolariserat ljus. Vi behöver ha lika stora komponenter $I_o$, $I_{eo}$. Vi vet att 25% av den ordinära intensiteten absorberas. Vi måste göra den ordinära intensiteten en faktor $\frac{1}{0{,}75}$ ggr större för att kompensera för absorbtionen. Det innebär att den ord. intensiteten ska vara en faktor $\frac{1}{0{,}75} = \frac{4}{3}$ ggr större än den extraordinära int. $\Longrightarrow$ Det ordinära fältet ska då

* [illegible]

vara en faktor $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ggr större än det e.o. fältet.

$(I \propto E^2)$




$\tan\theta = \sqrt{\frac{4}{3}}$ $\quad \theta = \operatorname{atan}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 49{,}1°$

□

## Ö33

Beskriv fullständigt polarisationstillstånden för följande vågor och teckna motsvarande Jonesvektorer.

a) $\mathbf{E} = \hat{i}E_0\cos(kz-\omega t+\pi/8)+\hat{j}E_0\cos(kz-\omega t-\pi/8)$

b) $\mathbf{E} = \hat{i}E_0\cos(kz-\omega t+\pi/8)+\hat{j}E_0\sin(kz-\omega t-\pi/8)$

## Lösning:

a) $\bar{E} = \hat{i}E_0\cos(kz-\omega t+\pi/8)+\hat{j}E_0\cos(kz-$
$-\omega t-\pi/8)$

$|E| = \sqrt{\bar{E}\cdot\bar{E}}$ $\quad \beta = kz-\omega t$

$|E| = E_0\sqrt{\cos^2(\beta+\pi/8)+\cos^2(\beta-\pi/8)}$

$$\frac{\partial|E|}{\partial\beta} = \frac{E_0}{2}\,\frac{-2\cos(\beta+\pi/8)\sin(\beta+\pi/8) - 2\cos(\beta-\pi/8)\sin(\beta-\pi/8)}{\sqrt{\cos^2(\beta+\pi/8)+\cos^2(\beta-\pi/8)}}$$

$$\frac{\partial|E|}{\partial\beta} = 0 \Rightarrow$$

$$\sin 2(\beta+\pi/8) + \sin 2(\beta-\pi/8) = 0$$

$$\sin(2\beta+\pi/4) = -\sin(2\beta-\pi/4) = \sin(\pi/4 - 2\beta)$$

$$2\beta + \pi/4 = \frac{\pi}{4} - 2\beta + n\cdot 2\pi$$

$$4\beta = n\cdot 2\pi$$

$$\beta = \frac{n\pi}{2}$$

n jämn $\Rightarrow$ MAX!!

n udda $\Rightarrow$ min

$\underline{\beta = 0}$

$$\bar{E} = \hat{i}\,E_0\cos(\pi/8) + \hat{j}\,E_0\cos(\pi/8)$$

$$\bar{E} = E_0\cos(\pi/8)\,(\hat{i}+\hat{j})$$

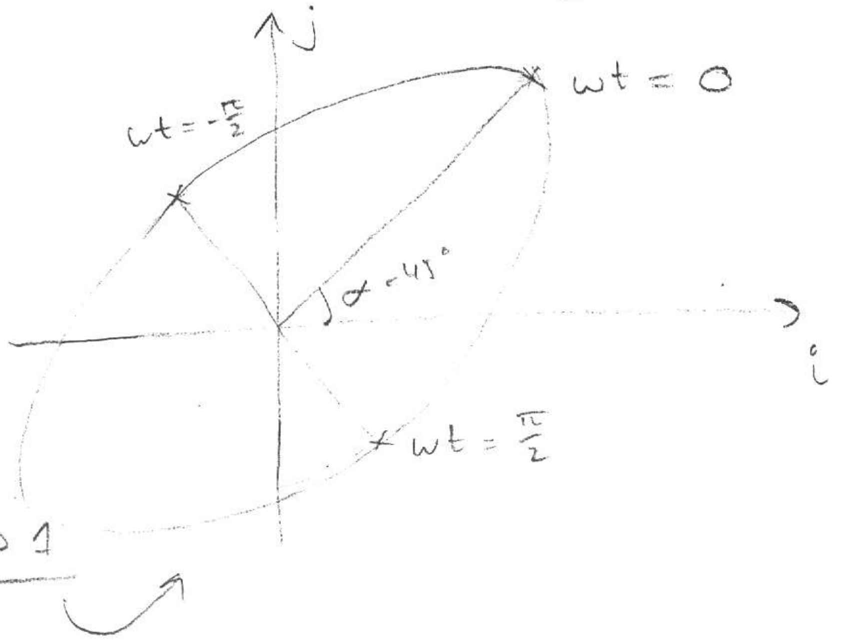



BILD 1

$\underline{\beta = \pi/2}$

$$\bar{E} = \hat{\imath} E_0 \cos\underbrace{\left(\pi/2 + \pi/8\right)}_{\frac{5\pi}{8}} + \hat{\jmath} E_0 \cos\underbrace{\left(\pi/2 - \pi/8\right)}_{\frac{3\pi}{8}}$$

$$\bar{E} = \hat{\imath} E_0 \underbrace{\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)}_{-\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{8}\right)} + \hat{\jmath}\, E_0 \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$\bar{E} = E_0 \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\left(-\hat{\imath} + \hat{\jmath}\right)$ Se BILD 1.

$\therefore$ Ljuset är elliptiskt polariserat
$\alpha = 45°$ Fältet roterar medurs - Högerellipt. pol.

Jonesvektor då?

$\bar{E} = \begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{pmatrix}$ Vi ser att $E_y$ ligger $2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ före $E_x$.

$$E_y = E_x \cdot e^{-i\pi/4}$$

$$\tilde{E} = E_x \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}$$

b-uppgiften är precis likadan, fast med ett annorlunda uttryck för fälten.

# Ö40

En planpolariserad ljusstråle ($\lambda = 600$ nm) kommer vinkelrätt mot en dubbelbrytande kristallplatta, som är skuren så att optiska axeln ligger i kristallens yta. Plattans tjocklek är 5,0 μm. Ljusets polarisations plan bildar 60° vinkel med optiska axeln. Best. Jones-vektorerna för de infallande och transmitterade strålarna med o.a i y-riktningen. Visa med en figur hur det transmitterade E-fältet svänger som fkn av tiden

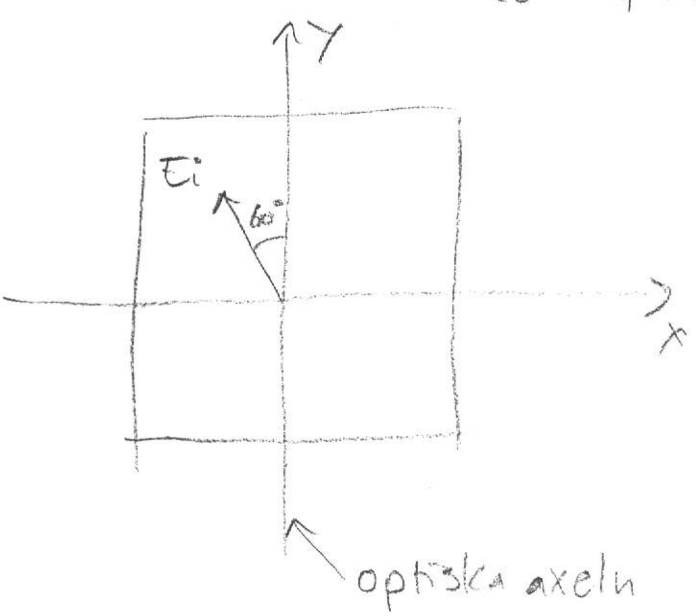
Brytningsindex: $n_o = 1{,}550$ $n_{eo} = 1{,}560$

## Lösning

$\lambda = 600$ nm Plattans tjocklek $d = 5{,}0\ \mu m$

Brytningsindex $n_o = 1{,}550$

$n_{eo} = 1{,}560$




Titta i utbredningsriktningen

$$E_x = \underbrace{-\sin 60°}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot E_i \qquad E_y = \underbrace{\cos 60°}_{1/2} \cdot E_i$$

Jonesvektor in $J_{in} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{E_i}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Fasskift $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot |n_o - n_{eo}| = 30°$

$n_{eo} > n_o \Longrightarrow \underset{\frac{c}{n_{eo}}}{V_{eo}} < \underset{\frac{c}{n_o}}{V_o}$

opt. axeln är "slow axis"

$\Longrightarrow E_y$ ligger $30°$ efter $E_x$

$E_y = E_x e^{i30°}$

$$J_{ut} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ e^{i30°} \end{pmatrix}}_{\text{normerad, ännu}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i30°} \cdot e^{i180°} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i210°} \end{pmatrix}$$

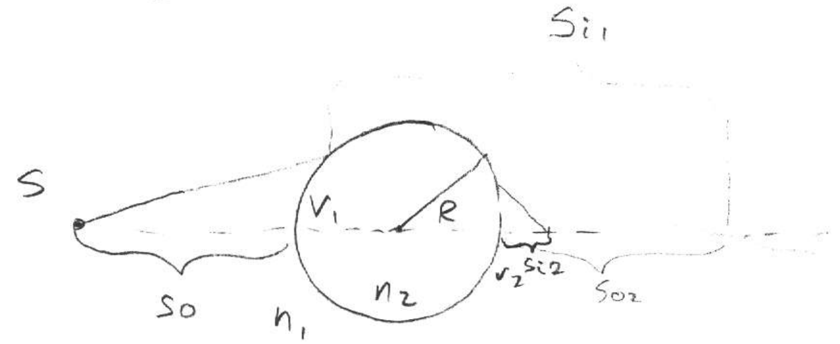
Skippar figuren

# ÖVNING 6

## H 5.8

Hur blir bilden av ett föremål placerat 1,2 m från en kristallkula ($n=1,5$ $r=0,10$ m)?

## Lösning




Framsidan av kulan:
Brytning i står

$$\frac{n_1}{S_o} + \frac{n_2}{S_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$S_i = \frac{n_2}{\frac{n_2 - n_1}{R} - \frac{n_1}{S_o}} = \frac{1,5}{\frac{0,5}{10} - \frac{1}{120}} = 36 \text{ cm}$$

Bilden till höger om $V_2$ : $S_{o2} < 0$.

$S_{o2} = -(S_{i1} - 2 \cdot R) =$
$= -(36 - 2 \cdot 10) = -16$ cm

Baksidan av sfären:

$$S_{i2} = \frac{n_1}{\frac{n_1 - n_2}{-R} - \frac{n_2}{S_{o2}}} = \frac{1}{\frac{-0,5}{-10} - \frac{1,5}{-16}}$$

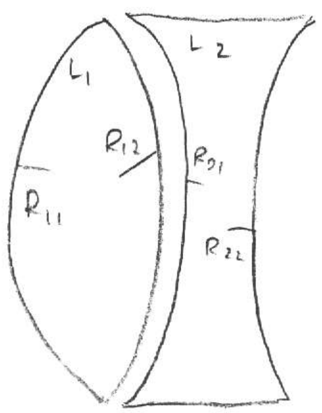
neg. krökningsradie
Konkav

П

# H 5,30

Vid tillverkningen av ett optiskt instrument bringas en ekvikonvex tunn lins $L_1$ i "intim" kontakt med en tunn, negativ lins $L_2$, så att kombinationen av dem har en fokallängd på 0,50 m i luft. Om deras index är 1,50 och 1,55, och om $L_2$:s fokallängd är -50 cm, vad är då radien för hela kurvaturen?

## Lösning




$L_1$: Framsida $R_{11}$
Baksida $R_{12}$

$L_2$: Framsida $R_{21}$
Baksida $R_{22}$

$n_1 = 1{,}50 \qquad f_2 = -50$ cm
$n_2 = 1{,}55 \qquad f_1 = 50$ cm

Kombination av linser

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{f_2}} = \frac{1}{\frac{1}{50} + \frac{1}{50}} = 25$$

Linsmakarformel på lins 1:

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}}\right) = /R_{11} = -R_{12}/ =$$

$$= (n_1 - 1)\left(\frac{2}{R_{11}}\right) \Rightarrow R_{11} = 2(n_1 - 1) f_1 = f_1 = 25 \text{ cm}$$

$$R_{12} = -R_{11} = -25 \text{ cm}$$

$$R_{21} = R_{12} = -25 \text{ cm}$$

Linsmakarformeln för lins 2:

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_2(n_2-1)} = \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}}$$

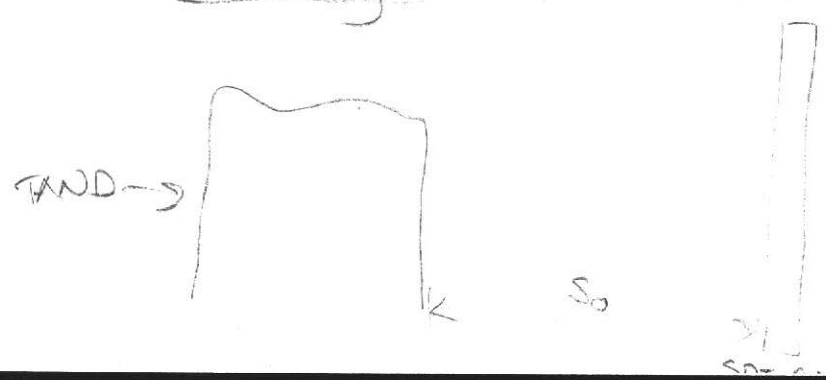
$$R_{22} = \frac{1}{\frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{f_2(n_2-1)}} = \frac{1}{-\frac{1}{25} + \frac{1}{50(0{,}155)}} = \underline{-275 \text{ cm}}$$

□

# H5,52

Vi ska designa en tandläkarspegel med vissa krav.
1) Bilden ska vara rättvänd.
2) 1,5 cm från tanden ska spegeln ge 2 ggrs förstoring

Lösning




Förstl. $M_T = -\frac{S_i}{S_o} = +2$

rättvänd

$\Rightarrow$ $S_i$, $S_o$ har olika tecken. Virtuell bild

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i}$$

$$\frac{S_o}{f} = 1 + \frac{S_o}{S_i} = 1 - \frac{1}{M_T} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f = 2 S_o = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \text{ cm}$$

$f = -\frac{R}{2} \Rightarrow R < 0 \Rightarrow$ Konkav

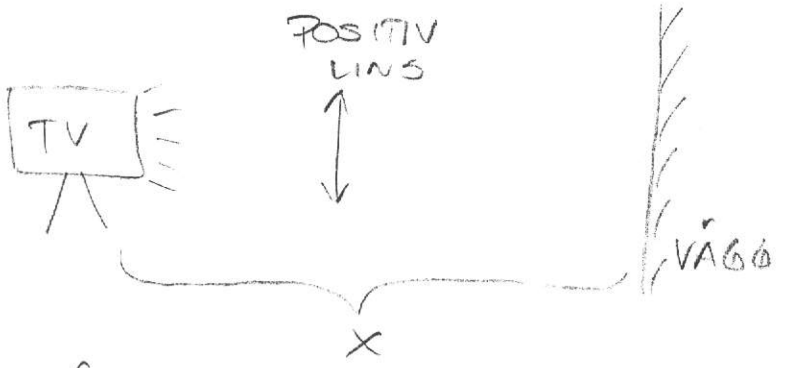
$R = -6$ cm

$\square$

# ÖVNING 7

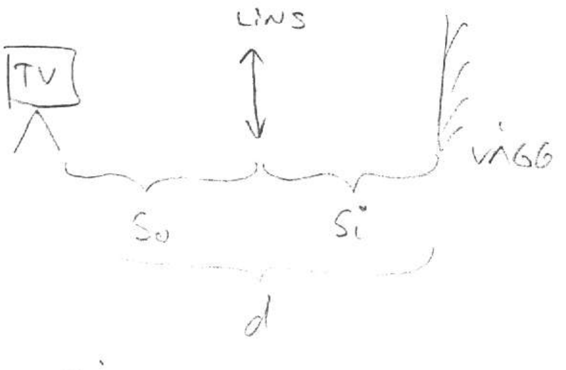
## H5.25

En gör-det-självare vill ha större TV-bild, och placerar därför en positiv lins framför TV:n.




Linsens fokallängd = 0,6 m.
Vi vill ha 3 ggr:s förstoring. Vad ska x vara?

Lösning




$$\underbrace{\underbrace{\quad}_{s_o}\underbrace{\quad}_{s_i}}_{d}$$

$A_T = -\frac{s_i}{s_o} = -3$ (bilden blir inverterad)

$s_i = 3s_o \qquad \frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{3s_o} = \frac{4}{3s_o}$

$$\Rightarrow \quad s_o = \frac{4f}{3} = 80 \text{ cm}$$

$$s_i = 3 s_o = 240 \text{ cm}$$

$$d = s_o + s_i = 320 \text{ cm}$$

Med denna uppställning har vi en inverterad bild (positiv lins, reell bild) Vänd TV:n! □

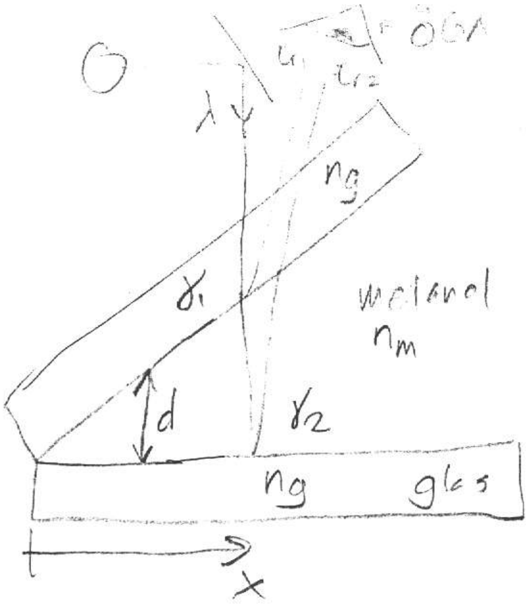
Skrivkilles anm.: He! Det här var ju lätt. Perfekt för en bakfull dag som denna.

## Ö41

Ett metanolfyllt kilformat utrymme mellan två glasplattor belyses med Na-ljus och observeras uppifrån. Man ser då ett fransmönster, i vilket separationen mellan närliggande fransar är 0,2 mm. Best. kilvinkeln. $\lambda_{Na} = 589$ nm, $n_m = 1{,}329$.

## Lösning

Se nästa sida.




$\tan \alpha = \frac{d}{x}$ Tillräckli små $\alpha$ : $\alpha x = d$

Antar $\theta_i \approx 0 \approx \theta_t$

Skillnad i optisk väglängd = $2 \cdot d \cdot n_m$ (upp & ner)

Fasskillnad $\delta = k \cdot 2 \cdot d \cdot n_m + \Delta\varphi$

där $\Delta\varphi$ = fasskillnad pga reflektion.

Tex $r_{1\perp} = \frac{n_g \cos\theta_i - n_m \cos\theta_t}{n_g \cos\theta_i + n_m \cos\theta_t} \approx \frac{n_g - n_m}{n_g + n_m}$

$r_{2\perp} = \frac{n_m - n_g}{n_g + n_m}$ $\quad -1 = e^{i(\pm\pi)}$

$\delta = 2kdn_m - \pi$

Interferensmax: $2\pi m = k2dn_m - \pi$ $\quad (k = \frac{2\pi}{\lambda})$

$m = \frac{2}{\lambda} dn_m - \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{\lambda}{2n_m}(m + 1/2) = x$

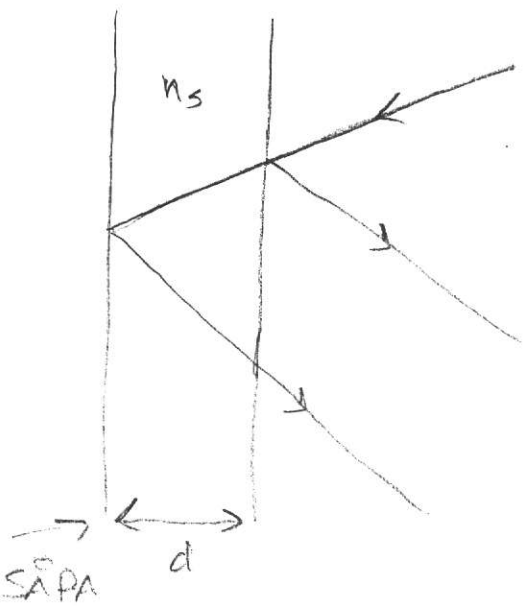
$\Delta x = \frac{\lambda}{2n_m\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda}{2n_m \Delta x} = \frac{589 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 1{,}329 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}} = 1{,}1$ m...

## Ö43

Vitt ljus infaller mot såphinna. Reflekterade ljuset har interferensmax vid 600 nm ($\lambda_{max}$) och minimum vid 450 nm ($\lambda_{min}$). Inget annat minimum ses. $n_{såpa} = 1{,}33$. Bestäm hinnans tjocklek.

VINKELRÄTT!

### Lösning




skillnad i opt. vägl.

$= 2 \cdot d \cdot n_s$ (kom ihåg vinkelrätt infall)

Fasskillnad:

$$\delta = 2 \cdot k \cdot d \cdot n_s + \pi$$

$$\delta_{max} = k_{max} \cdot 2 \cdot d \cdot n_s + \pi = 2m \cdot \pi$$

$$\delta_{min} = k_{min} \cdot 2 \cdot d \cdot n_s + \pi = 2m\pi + \pi$$

$$\delta_{min} - \delta_{max} = 2 \cdot d \cdot n_s (k_{min} - k_{max}) = \pi$$

$$\Rightarrow d = \frac{\pi}{2n_s(k_{min} - k_{max})} = \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2 \cdot n_s \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda_{min}} - \frac{2\pi}{\lambda_{max}}\right)} = \text{Sätt in!} = 338 \text{ nm}$$

$\square$

HA! FÖR LÄTT!

Övning 8

# Ö45

a) Hur stor skall separationen mellan två spalter vara för att avståndet mellan interferensfransarna på en skärm 2 m bakom spalterna ska bli 1 mm då $\lambda = 600$ nm?

b) Hur mycket förskjuts interferensmönstret om en 0,05 mm tjock glasplatta ($n = 1,5$) placeras framför ena spalten?

<u>Lösning</u>

a)

Skillnad i optisk våglängd.

$\Delta x = a \sin\theta_m$

$\sin\theta_m = \frac{y_m}{r}$ = (antag a << s)

$= \frac{y_m}{s}$

$\Rightarrow \Delta x = \frac{a y_m}{s}$

Fasskillnad: $\delta = k \cdot \Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{a y_m}{s}$

Konstr. interferens $\delta = 2m\pi$

$\Rightarrow m = \frac{a y_m}{\lambda s} \Rightarrow y_m = \frac{\lambda s m}{a}$

$\Rightarrow \Delta y = \frac{\lambda s}{a} \Rightarrow a = \frac{\lambda s}{\Delta y} = 1,2$ mm

b) Ny skillnad i opt. vägl.

$\Delta x = \frac{a y_m}{s} + d(n_g - n_L) = \frac{a y_m}{s} + \frac{d}{2}$

Ny fasskillnad $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a y_m}{s} + \frac{d}{2}\right) \overset{\text{Konstr. interferens}}{=} 2\pi m$

$\Rightarrow m = \frac{a y_m}{\lambda s} + \frac{d}{2\lambda}$

$\Rightarrow y_m = \left(m - \frac{d}{2\pi}\right)\frac{\lambda s}{a} \Rightarrow y_m = \frac{m\lambda s}{a} - \frac{ds}{2a}$

$\Rightarrow \Delta y = \frac{\lambda s}{a}$ dvs ingen skillnad i avstånd mellan fransarna

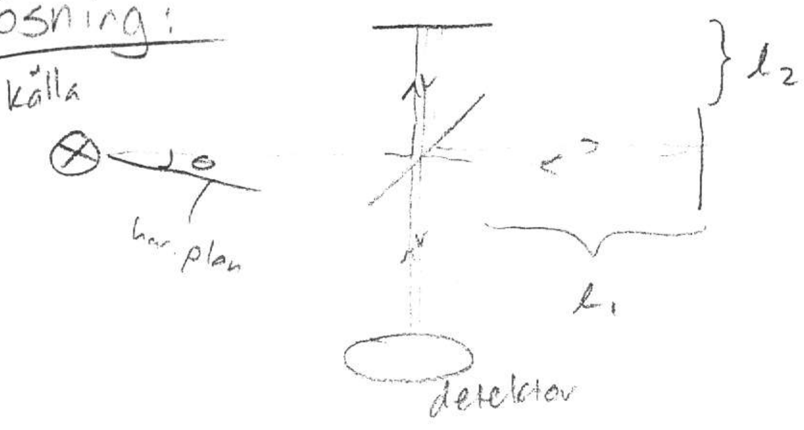
Förskjutningen är $\frac{ds}{2a} = 41,7$ mm

D

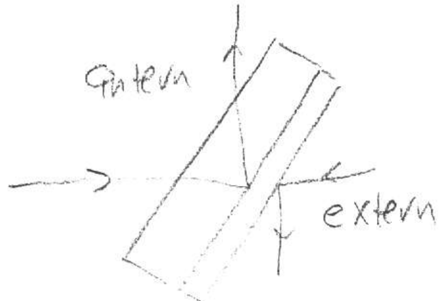
# Ö50

$n_{gas} = 1 + \beta \frac{p}{760}$ β konstant, p tryck i torr. En evakuerad, 35 cm lång tryckkammare placeras i ena armen av en Michelson-interferometer. Då kammaren fylls med gas till atmosfärstryck passerar 77 fransar interferensmönstrets centrum. a) Försvann eller skapades fransar? b) Best. β och n vid atmosfärstryck. c) Hur noggrant kan brytningsindex best. om förskj. av mönstret kan bestämmas med en noggrannhet av 1/5 steg? $\lambda_{ljus} = 650$ nm

## Lösning:




Close-up:




$l_1 - l_2 = d$

θ - vinkeln mellan horisontalplan och stråle från källan.

Skillnad i optisk väglängd: $2d\cos\theta$

Fasskillnad $\delta = k \cdot 2d\cos\theta + \pi$

pga intern och extern reflektion, tydligen

Destruktiv interferens: $\delta = 2\pi m + \pi$

$\Rightarrow 2d\cos\theta = m\lambda$

Sätt in i tryckkammare i ena armen. $l = 0{,}35$

skillnad i optisk väglängd $\Delta x = 2 \cdot l \cdot (n(p) - n(p=0)) \cdot \cos\theta =$

$= 2l\cos\theta(n-1)$

Fasskillnadsändring $\Delta\delta = k \cdot 2l\cos\theta\,(n-1)$

$n = 1 + \beta \cdot \frac{p}{760}$

Trycket ökar $\Rightarrow$ n ökar $\Rightarrow$ fasskillnaden ökar

$\Rightarrow$ För en given interferensring minskar $\cos\theta$.

$\Rightarrow$ $\theta$ ökar $\Rightarrow$ Nya ringar skapas och sprider sig ut från centrum

b) Best. $\beta$

Studera centralmax $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$, $m = m_0$

$\Delta\delta$ svarar mot 77 fransar då trycket i kammaren ökar från $p = 0$ till $p = 760$ torr.

$\Delta\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2l\cos\theta(n-1) = 77 \cdot 2\pi$

$\Rightarrow n - 1 = \frac{77\lambda}{2l} \Rightarrow \beta = \frac{77\lambda}{2l} = 7{,}15 \cdot 10^{-5}$

$n = 1 + \beta$

c) $\Delta n = \Delta\beta = \frac{\lambda}{2\pi}\Delta m = \frac{\lambda}{2l} \cdot \frac{1}{5} = 1{,}9 \cdot 10^{-7}$

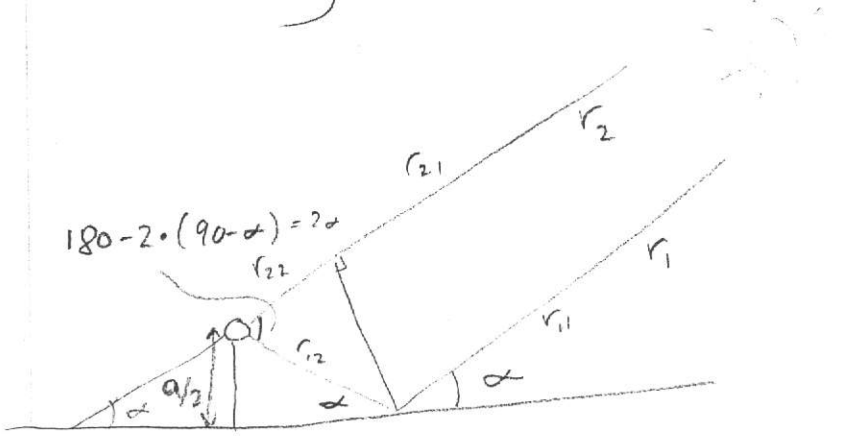
□

# H 9.22

En antenn vid en sjö fångar upp en radiosignal från en avlägsen stjärna, som just höjt sig över horisonten. Skriv uttrycken för $\delta$ och... öh... stjärnans vinkliga position när antennen detekterar det första maximumet.

(maximat?)

## Lösning




Fasskillnad mellan $r_1$ & $r_2$

$$\delta = k\cdot(r_1 - r_2) + \pi$$

$$r_1 - r_2 = r_{11} + r_{12} - r_{21} - r_{22} = r_{12} - r_{22}$$

$$r_{12} = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

$$r_{22} = r_{12}\cos 2\alpha = \frac{a}{2\sin\alpha}\cos 2\alpha$$

$$r_1 - r_2 = \frac{a}{2\sin\alpha}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\delta = \frac{ka}{2\sin\alpha}(1-\cos 2\alpha) + \pi$$

1:a max $\delta = 2\pi$

$$\frac{2\pi a}{2\lambda \sin\alpha}(1-\cos 2\alpha) = \pi$$

$$\frac{\lambda \sin\alpha}{a} = 1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\lambda}{2a} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)$$

$\square$

## H 9.42

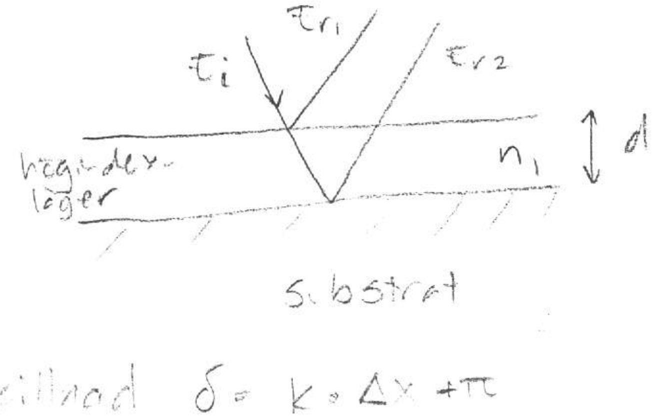
Verifiera att ett substrats reflektans kan ökas genom att belägga det med $\lambda_f/4$, högindex lager, dvs $n_1 > n_2$. Visa att de reflekterade vågorna ordkar konstruktiv interferens.

## Lösning

Antag normalt infall $\theta_i = 0$

Skillnad i optisk väglängd: $\Delta x = 2 \cdot d \cdot n_1$

$n_1 > n_s$




$\Rightarrow$ Fasskillnad $\delta = k \cdot \Delta x + \pi$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 2 \cdot d \cdot n_1 + \pi = \frac{4\pi d}{\lambda_f} + \pi =$$

$= / d = \lambda_f/4 / = \pi + \pi = 2\pi \Rightarrow$ konstruktiv interferens!

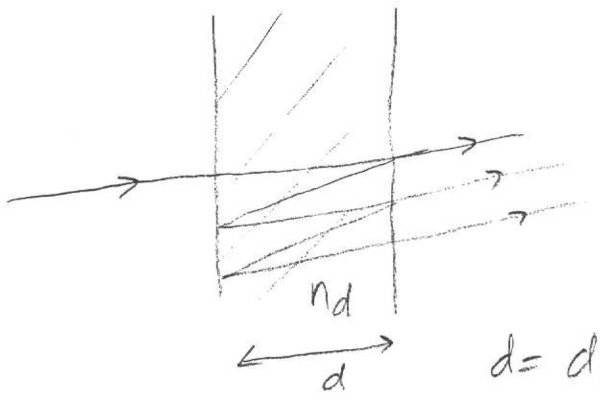
$\square$

# ÖVNING 9

## Ö55

Rubinlaserljus ($\lambda = 694,3$ nm) faller $\perp$ mot en diamantplatta ($n = 2,624$; $\alpha = 0,13 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$) och $I_t$ mäts som fkn av plattans temperatur. Vid en viss temp är $I_t$ max. 100 K senare är $I_t = 0,8\,I_{max}$, efter att först ha passerat ett minimum och däretter ett nytt maximum. Best. diamantplattans begynnelsetjocklek.

Lösning:



$$d = d_0(1 + \alpha T)$$

$$\Delta x = 2\,d \cdot n_d \Rightarrow \delta = k_0 \cdot 2 \cdot d \cdot n_d + \underbrace{2\varphi}_{0}$$

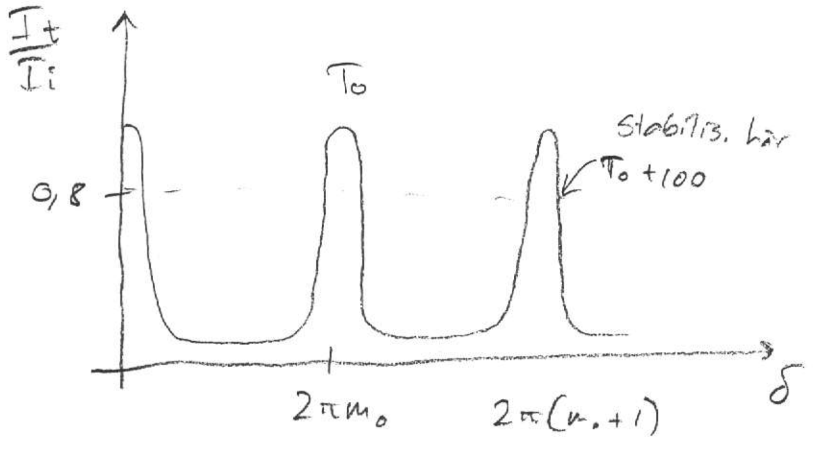
$$\Rightarrow \delta = \frac{4\pi d n_d}{\lambda}$$

Vid en viss temperatur $T_0$ har vi max transmission, dvs konstr. interferens.

$$\delta_m = 2m\pi = \frac{4\pi n_d \cdot d(1 + \alpha T)}{\lambda}$$

$n_d \in \mathbb{R}$ - ingen absorption

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F\sin^2 \delta/2} \qquad F = \text{finesskoeff}$$




För $T = T_0 + 100$ har vi

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1+F\sin^2\left(\frac{\delta_{100}}{2}\right)} = 0{,}8 \qquad \delta_{100} = \frac{4\pi n d}{\lambda_0} d_0\left(1+\alpha(T_0+100)\right) =$$

$$= 2\pi(m_0+1) + \varphi$$

$$\delta_{100} - \delta_0 = \frac{4\pi n d}{\lambda} d_0 \alpha \cdot 100 = 2\pi + \varphi$$

$$\Rightarrow d_0 = \frac{\lambda_0(2\pi + \varphi)}{\pi n_d \alpha \cdot 400}$$

$$\frac{I_{t100}}{I_i} = 0{,}8 = \frac{1}{1+F\sin^2\left(\frac{2\pi(m_1+1)+\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{1+F\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow 1 + F\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{0{,}8} \Rightarrow \varphi = a\sin\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{0{,}8}-1\right)}{F}}$$

$$F \text{ allmänt} = \frac{4R}{(1-R)^2} \qquad R = \left(\frac{n_d - n_e}{n_d + n_e}\right)^2 = \left(\frac{n_d - 1}{n_d + 1}\right)^2 = 0{,}20$$

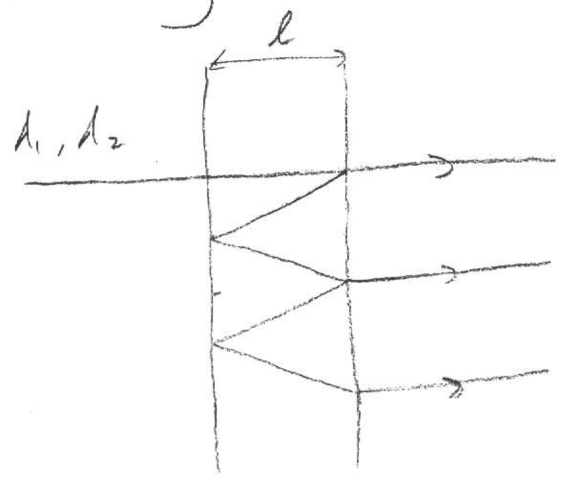
$$\Rightarrow F = 1{,}26 \Rightarrow \varphi = 0{,}92 \Rightarrow d = 1{,}16 \text{ mm}$$

LÄTT !! $\square$

# Ö57

Strukturen hos en dubbel spektrallinje studeras med en Fabry-Perot interferometer. $\lambda = 475$ nm och dublettseparationen 0,0043 nm. För vilket plattavstånd sammanfaller i interferensmönstrets centrum ordning $N$ för den ena komponenten med ordning $N+1$ för den andra?

## Lösning




Alternativt sätt

$$\begin{cases} \delta_2 = \dfrac{4\pi l}{\lambda_2} = 2\pi m \\ \delta_1 = \dfrac{4\pi l}{\lambda_1} = 2\pi(m+1) \end{cases}$$

$$l = \frac{1}{2\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)}$$

$\lambda_1 \simeq \lambda_2 \simeq 475$ nm $\qquad \Delta x = 2 \cdot l \cdot n$

$\lambda_2 - \lambda_1 = 0{,}0043$ nm $\qquad \Rightarrow \delta = \dfrac{4\pi l}{\lambda} \quad (n = 1)$

Differentiera $d\delta = -\dfrac{4\pi l}{\lambda^2} d\lambda$

Vi vill ha $|d\delta| = 2\pi \Rightarrow \dfrac{4\pi l}{\lambda^2} d\lambda = 2\pi$

$$\Rightarrow l = \frac{\lambda^2}{2 d\lambda} = \frac{(475 \cdot 10^{-9})^2}{2 \cdot 0{,}0043 \cdot 10^{-9}} = 2{,}6 \text{ cm}$$

$\square$

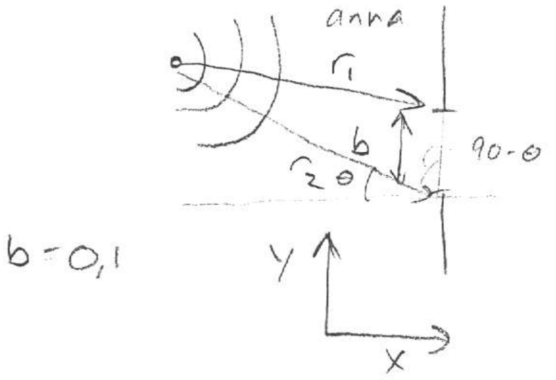
Ö5 9

Studera lord Rayleighs kriterium* för övergång från Fresnel- till Fraunhofer diffraktion, och bestäm mha detta kriterium det minsta avståndet mellan en monokrom pkt källa och en 0,1 mm bred spalt, så att Fraunhofervillkoret satisfieras. Antag $\lambda = 500$ nm.

*avvikelsen från faslineariteten över aperturen är $\leq \frac{\pi}{4}$

## Lösning!!

Pkt källa som sänder ut sfäriska vågor




Sfäriska vågor ⇒ Fresnel diffr.
Approx: plana vågor (Fraunhofer)
$\Rightarrow \delta = k\Delta x = k(r_2 - r_1)$ beror
linjärt på b.
(y)

Cosinussatsen: $r_1^2 = r_2^2 + b^2 - 2r_2 b \underbrace{\sin\theta}_{\cos(90-\theta)}$

$$\Rightarrow r_1 = \sqrt{r_2^2 + b^2 - 2r_2 b\sin\theta} =$$

$$= r_2\sqrt{1 + \frac{b^2}{r^2} - \frac{2b\sin\theta}{r}} = \Big/ \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots \quad \text{antag } r_2 >> b \Big/ =$$

$$= r_2\left(1 + \frac{b^2}{2r_2^2} - \frac{b}{r_2}\sin\theta - \frac{1}{8}\left(\frac{b^2}{r^2} - \frac{2b}{r}\sin\theta\right)^2\right) =$$

$$= r^2\left(1 + \frac{b^2}{2r_2^2} - \frac{b\sin\theta}{r_2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{4b^2}{r_2^2}\sin^2\theta\right) =$$

$$= r_2 + \frac{b^2}{2r_2} - b\sin\theta - \frac{b^2}{2r_2}\sin^2\theta = r_2 - b\sin\theta + \frac{b^2}{2r_2}(1-\sin^2\theta) =$$

$$= \underbrace{\overbrace{r_2 - b\sin\theta}^{r_1}}_{\text{linj. med } b} + \underbrace{\frac{b^2}{2r_2}\cos^2\theta}_{\text{olinjär}} \Rightarrow \Delta x = r_2 - r_1 = b\sin\theta - \frac{b^2}{2r_2}\cos^2\theta.$$

$$\Rightarrow \delta = \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda} b\sin\theta}_{\text{linj.}} - \underbrace{\frac{\pi b^2}{\lambda r_2}\cos^2\theta}_{\text{olinj.}}$$

Observera att för planvåg hade det olinj. bidraget ej existerat.

$$\delta_{\text{olinj}} = \frac{\pi b^2}{\lambda r_2}\cos^2\theta$$ Värsta fallet $\theta = 0 \Rightarrow \delta_{\text{olinj, max}} = \frac{\pi b^2}{\lambda r_2} \leq \frac{\pi}{4}$

kriteriet

$$\Rightarrow r_2 \geq \frac{4b^2}{\lambda} = 8\,\text{cm}$$

$r_2 >> b$ ok!

Avståndet mellan källan och spalten $\geq 8$ cm

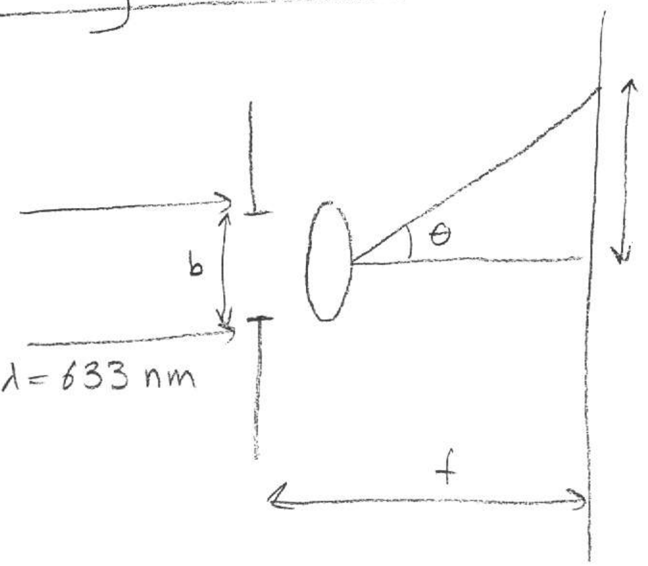
$\square$

Oj oj.

Ö60

En kollimerad laserstråle ($\lambda = 633$ nm) träffar under normalincidens en 0,5 mm bred spalt. Diffraktionsmönstret avbildas mha en lins med 50 cm fokallängd, placerad omedelbart efter spalten. Best. avståndet mellan det första minimat och första sekundär maximat.

## Lösning




$f >> b$

$$I(\theta) = I(0)\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

där $\beta = \frac{kb}{2}\sin\theta =$

$= \frac{b\pi}{\lambda}\sin\theta$

$I(\theta)$ har minima för $\sin\beta = 0$ dvs $\beta = \pm\pi, \pm 2\pi$ osv

$I(\theta)$ har sekundärmax för $\beta = \tan\beta$. $\beta = \pm 1{,}4303\pi, \pm 2{,}4590\pi$

$y = f \cdot \tan\theta$ 1:a min: $\beta_{min} = \pi = \frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta_{min}$

$\Rightarrow \sin\theta_{min} = \underbrace{\frac{\lambda}{b}}_{<<1}$ $\sin\theta_{min} \approx \tan\theta_{min}$ eftersom $\lambda << b$

1:a sek. max $\beta_{max} = 1{,}4303\pi = \frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta_{max}$

$\Rightarrow \sin\theta_{max} = \frac{1{,}4303\lambda}{b} \approx \tan\theta_{max}$

$$y_{max} - y_{min} = f(\tan\theta_{max} - \tan\theta_{min}) =$$

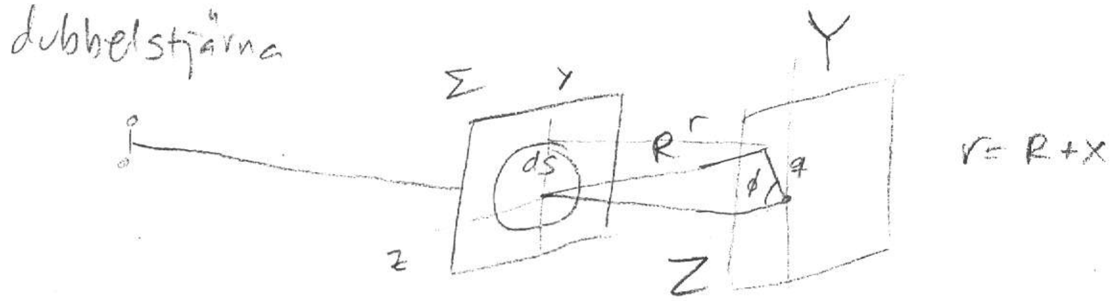
$$= \frac{f\lambda}{b}(1{,}4303 - 1) = 0{,}27 \text{ mm}$$

$\square$

## Ö61

Vad krävs för diameter på objektivlinsen hos ett teleskop för att upplösa komponenterna i en dubbelstjärna med det linjära avståndet $10^8$ km och belägna 10 ljusår från jorden? Antag $\lambda = 500$ nm.

### Lösning




Ytan dS består av sekundärkällor (enl. Huygens-Fresn. princ.) Fält från dS: $dE = \frac{\varepsilon_A}{r} e^{i(\omega t - kr)} dS$

Hur kan vi approx. $r$?

1) I amplitudens nämnare kan vi sätta $r = R$ (om planen långt från varandra)

2) $e^{-ikr} = e^{-\frac{i2\pi}{\lambda}(R+x)} = e^{-\frac{i2\pi}{\lambda}R}\, e^{-\frac{2\pi}{\lambda}x}$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+x} = \frac{1}{R\left(1+\frac{x}{R}\right)}$$

Vi har $r = \sqrt{X^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2} =$

$$= \sqrt{\underbrace{X^2+Y^2+Z^2}_{R^2} - 2(yY+zZ) + y^2+z^2} = R\sqrt{1-\frac{2(yY+zZ)}{R}} =$$

(försummer $\frac{y^2+z^2}{R^2}$)

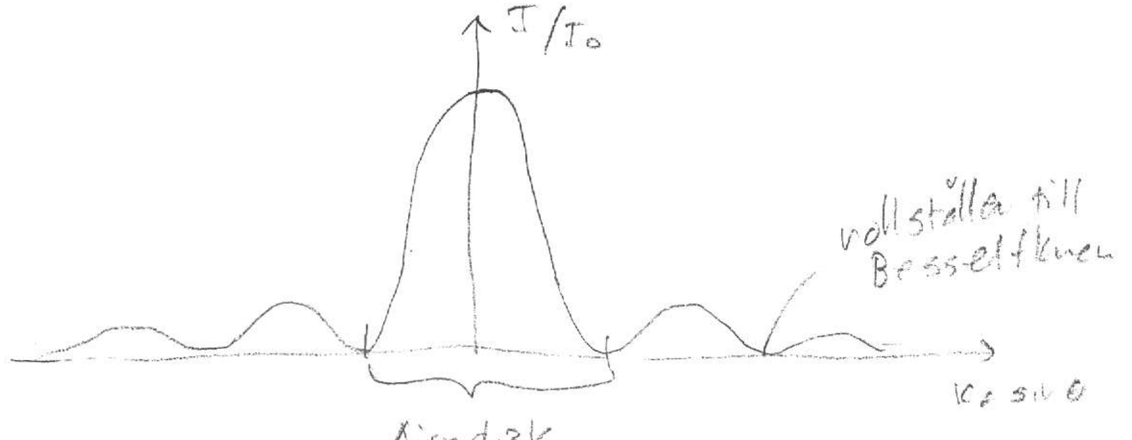
$$\approx R\left(1-\frac{yY+zZ}{R^2}\right) \Rightarrow dE = \frac{\varepsilon_A}{R} e^{i(\omega t-kR)}\, e^{ik\left(\frac{yY+zZ}{R}\right)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\varepsilon_A}{R} e^{i(\omega t-kR)} \iint_{\text{aperturen}} e^{ik\left(\frac{yY+zZ}{R}\right)}\, dS =$$

$$= \frac{\varepsilon_A e^{i(\omega t-kR)}}{R} \cdot 2\pi a^2 \cdot \frac{R}{kaq}\, J_1\left(\frac{kaq}{R}\right)$$

Besselfunktion
Bøsarrt...

$$I \propto EE^* \quad I = I_0\left(\frac{2J_1(kaq/R)}{kaq/R}\right)^2$$



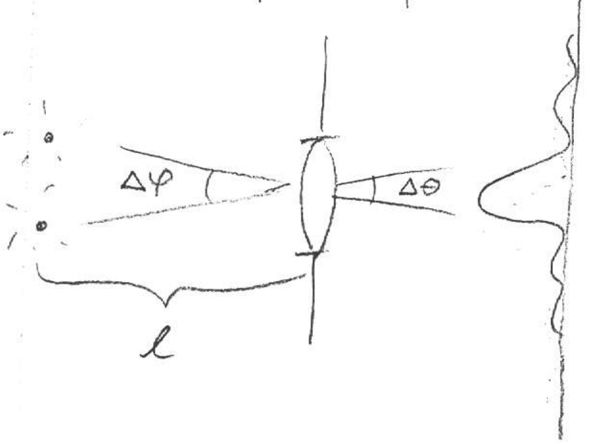
$I = 0 \quad J_1(k a q / R) = 0$

$\frac{q}{R} = \sin\theta$

$\Rightarrow \theta = \frac{3{,}83}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{a} = 1{,}22 \frac{\lambda}{D}$

("Här kunde man ha börjat om man kört till detta..." övn. ledare)

Vi sätter alltså en lins i aperturen för att fokusera dubbelstjärnan på en skärm.




Enl. Raileys kriterium är stjärnorna precis upplösta när max för den ena stjärnan hamna på 1:a min för den andra stjärnan

$\Delta\varphi = \Delta\theta \geq 1{,}22 \frac{\lambda}{D} \Rightarrow D = \frac{1{,}22\lambda}{\Delta\theta} = \frac{1{,}22\lambda}{\Delta\varphi} =$

$= \frac{1{,}22 \lambda \cdot \ell}{s} = 58 \text{ cm}$

avst. mellan stjärnorna

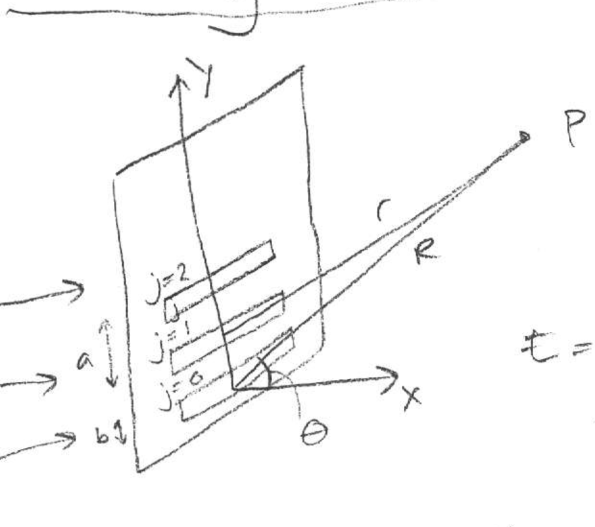
# ÖVNING 10

## Ö65

a) // ljus ($\lambda = 520$ resp. $550$ nm) infaller ⊥ mot ett plant transmissionsgitter (3500 ritsar/cm). Beräkna vinkelseparationen mellan de två strålarna i 3:e ordn. spektrum. Vilken är den högsta ordn. som innehåller båda?

b) Visa att villkoret för sk "missing orders" leder till att förhållandet mellan spaltavstånd och spaltvidd är ett rationellt tal. Vilka interferensordningar saknas då förhållandet är 2?

## Lösning




$$dE = \frac{\varepsilon_L}{\underbrace{r}_{\sim R}} e^{i(\omega t - k\overbrace{r}^{\sim R - z\sin\theta})} dz$$

$$E = \int_{-b/2}^{+b/2} \quad dz + \int_{a-b/2}^{a+b/2} \dots \, dz =$$

$$= \left\{ \text{var subst } \beta = \frac{kb}{2}\sin\theta \right\} = \quad I \propto EE^*$$

$$\Rightarrow I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$ Princip. max erhålls då $\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha} = N \Rightarrow$

$\alpha = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ $\quad \alpha = \frac{ka}{2}\sin\theta = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta = 0, \pm\pi \pm 2\pi$

$\Rightarrow a\sin\theta_m = m\lambda$ gitterekv.

$\lambda = 520$ nm: $\sin\theta_{3,520} = \frac{3\lambda}{a} = \frac{3\cdot 520\cdot 10^{-9}}{\dots} \Rightarrow \theta = 33.09°$

$\lambda = 550\,nm$ : pss $\theta_{3,550} = 35,27° \Rightarrow \Delta\theta = 2,18°$

Högsta ordning m?

$$\sin\theta_m = \frac{m\lambda}{a} \leq 1$$

$$m_{max} \leq \frac{a}{\lambda} = \frac{0{,}01/3500}{550 \cdot 10^{-9}} \qquad m_{max} = 5$$

b) Dubbelspalt $I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 =$

$$= I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = 4I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \cos^2\alpha$$

Missing orders = interferensmaximum mellan de två spalterna ($\cos^2\alpha = 1$) sammanfaller med diffraktionsminima för en spalt $\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 = 0 \Rightarrow$ $\alpha = m\pi$, $\beta = n\pi,\ n \neq 0$ $\quad m, n \in \mathbb{Z}$

$$\alpha = \frac{ka}{2}\sin\theta = m\pi \Rightarrow a = \frac{2m\pi}{k\sin\theta}$$

$$\beta = \frac{kb}{2}\sin\theta = n\pi \Rightarrow b = \frac{2n\pi}{k\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

ett rationellt tal!

Förhållande = 2 : $\frac{a}{b} = 2 = \frac{m}{n} \Rightarrow m = 2n \quad \alpha = 2n\pi$

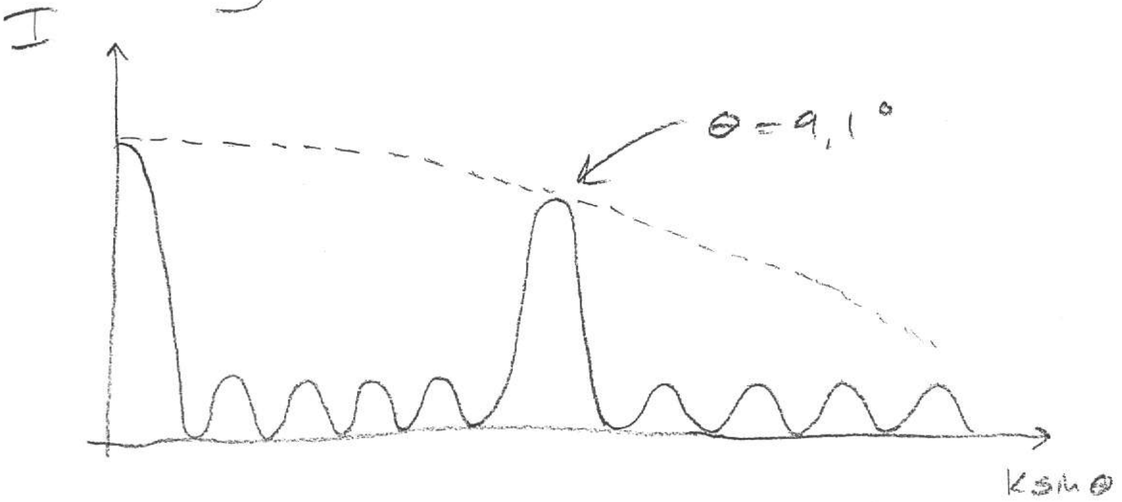
dvs de jämna interferensordningarna försvinner.

$\square$

# Ö67

Bestäm den fkn som beskriver interferensmönstret i nedanstående figur. Mönstret erhölls då ett objekt belystes med monokromatiskt ($\lambda = 632{,}8$ nm) // ljus under normalinfall. $\theta$ = vinkeln som den transmitterade strålen bildar relativt objektets mittpktsnormal.

## Lösning




Det ser ut att handla om ett diffraktionsmönster från ett multipelt gitter. Välbekant formel: $I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$

$\beta = \frac{kb}{2}\sin\theta$, $\alpha = \frac{ka}{2}\sin\theta$

Interferensen mellan olika spalter ger upphov till den snabba variationen $\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$

max $\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = N^2$ då $\alpha = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$

Första principalmax $\alpha = \frac{ka}{2}\sin\theta = \pi \Rightarrow a = \frac{\lambda}{\sin\theta} = 4\,\mu m$

Min då $\sin N\alpha = 0 \Rightarrow N\alpha = \pm\pi, \pm 2\pi$

N-1 st min mellan principalmax

$N-1=5 \Rightarrow N=6$

Envelopen (streckade linjen i fig.) är den överlagrade effekten av diffraktionen på en enstaka spalt, dvs att spalten har en bredd b.

$$\frac{\sin\beta}{\beta}=0 \Rightarrow \beta = \pm\pi, \pm 2\pi \ldots$$

$$\frac{kb}{2}\sin\theta = \pm\pi, \pm 2\pi \text{ för minima}$$

Tydligen är det en kass bild i ÖH. Övningsledarens hembrända bild visar dock tydligt att envelopen har sitt första min (=0) vid det fjärde principalmax.

$$\left.\begin{array}{ll} 1\text{:a min} & \frac{kb}{2}\sin\theta = \pi \\ 4\text{:e max} & \frac{ka}{2}\sin\theta = 4\pi \end{array}\right\} \Rightarrow b = \frac{a}{4} = 1\,\mu m$$

$\square$

# H 10.17

Vi har ett mönster och ska tala om vad det är för apertur.

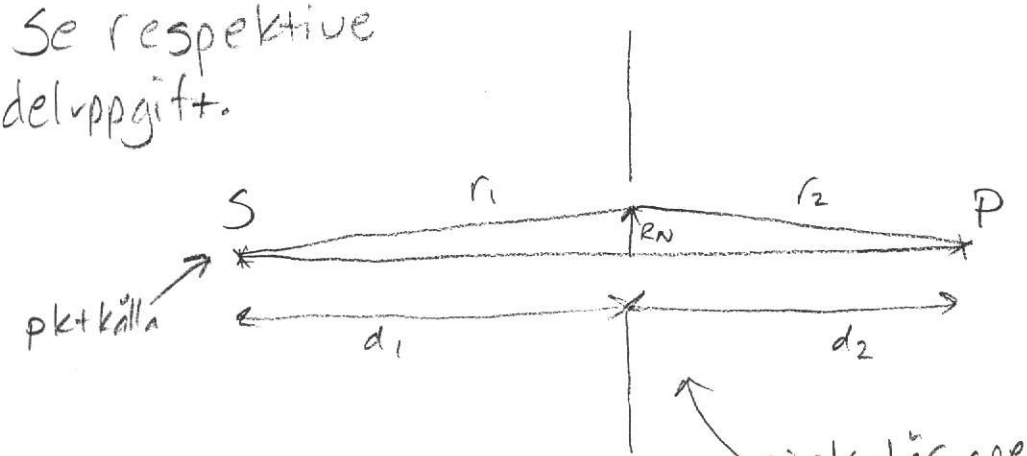
## Lösning

Ett centralmax. Två första principalmax. Två min mellan maxen $\Rightarrow$ Tre rekt. hål.

$\square$

# Ö73

Se respektive delruppgift.




## Lösning

a) Beräkna radier $R_N$ för cirklar inom aperturen, sådana att $(r_1+r_2)-(d_1+d_2)=\frac{N\lambda}{2}$.

OKtj:

$$r_1-d_1=\sqrt{R_N^2+d_1^2}-d_1=d_1\sqrt{1+\frac{R_N^2}{d_1^2}}-d_1=$$

$$=/\text{Antag } R_N \ll d_1/=d_1\left(1+\frac{R_N^2}{2d_1^2}\right)-d_1=\frac{R_N^2}{2d_1}$$

$$r_2-d_2=\ldots=\frac{R_N^2}{2d_2}$$

$$\Rightarrow r_1+r_2-(d_1+d_2)=(r_1-d_1)+(r_2-d_2)=$$

$$=\frac{R_N^2}{2d_1}+\frac{R_N^2}{2d_2}=\frac{R_N^2}{2}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)=\frac{N\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow R_N^2=\frac{N\lambda}{\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}} \quad R_N=\sqrt{\phantom{xx}}$$

b) Beräkna storleken av de ytor (sk Fresnel-zoner) som avgränsas av två närliggande cirklar $R_N$ och $R_{N+1}$.

$\longrightarrow A_{N+1} = A_N = \pi R_{N+1}^2 - \pi R_N^2 = \dfrac{\pi (N+1)\lambda}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}} - \dfrac{\pi N \lambda}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}} =$

$= \dfrac{\pi \lambda}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}} = \pi R_1^2 = A_1$

c) Varje zon inom aperturen kan betraktas som en sek. källa: Två intilliggande zoner emitterar i genomsnitt koherent ljus som når pkten P 180° ur fas. Härled ett uttryck för den optiska störningen och intensiteten i P.

$\longrightarrow \mathcal{E}_s$ källstyrkan vid S. Huygen-Fresnels princip: sekundära vågor från pkt källor på $A_N$. Dessa bör ha en källstyrka prop. mot fältet i $A_N \Rightarrow \mathcal{E}_N \propto \dfrac{\mathcal{E}_s}{r_1}$

$\Rightarrow$ amplituden vid P $|E_N(p)| \propto \dfrac{\mathcal{E}_s}{r_1 r_2}$

$r_1 \approx d_1 \left(1 + \dfrac{R_N^2}{2d_1}\right) \Rightarrow r_1 r_2 \approx d_1 d_2 \left(1 + \dfrac{R_N^2}{2}\left(\dfrac{1}{d_1^2} + \dfrac{1}{d_2^2}\right)\right)$

$= \ldots = d_1 d_2 \left(1 + \underline{N\lambda}\, \mathcal{O}\left(\frac{1}{d}\right)\right) \Rightarrow$ ungefär konstant amplitud då $N\lambda \ll d$.

ordo

Antar att fälten från $A_1 \ldots A_N$ är lika stora till sin amplitud. Fasförskjutning 180° mellan intilliggande zoner ger då: $|E_{tot}(p)| = |E_1| - |E_2| + |E_3| - |E_4| + \ldots |E_N|$

$= \dfrac{|E_1|}{2} + \dfrac{|E_1|}{2} - \dfrac{|E_2|}{2} - \dfrac{|E_2|}{2} + \dfrac{|E_3|}{2} + \dfrac{|E_3|}{2} \ldots \underset{N\ udda}{\pm} \left(\dfrac{|E_N|}{2} - \dfrac{|E_{N-1}|}{2}\right) \mp \dfrac{|E_N|}{2}$

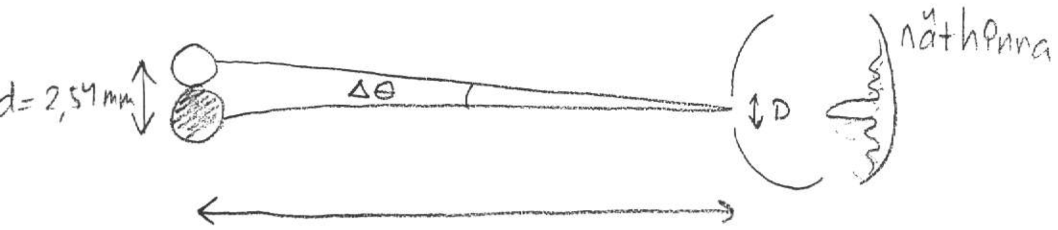
$= \dfrac{|E_1|}{2} \underset{udda}{\pm} \dfrac{|E_N|}{2} \Rightarrow I_{tot} = \dfrac{K}{4}\left(|E_1| \mp |E_N|\right)^2$

$|E_{tot}| = |E_1| \Rightarrow I = K|E_1|^2$ $\square$

# H 10.27

En tavla består av jättemånga små pkter. (avstånd = $= \frac{1}{10}$ inch $= 0{,}1 \cdot 2{,}54$ cm). Hur långt från tavlan ska man stå för att få en bra blandning? Dvs en icke-upplöst bild.

## Lösning




Lord Rayleighs kriterium för upplösbarhet

$$\Delta\Theta = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D} \qquad \frac{d}{l} \approx \Delta\Theta \Rightarrow l = \frac{dD}{1{,}22\,\lambda} =$$

$$= (\text{sätt exempelvis } D = 4\text{ mm},\ \lambda = 600\text{ nm}) = 14\text{ m}$$

Rätt långt. Pga ögats konstruktion har man dock inte riktigt den upplösningen. Den fysiska upplösningsförmågan ligger ungefär på $\frac{d}{l} = \frac{1}{1000}$

$\Rightarrow = 1000\,d = 100$ inches $\approx 2{,}5$ m.

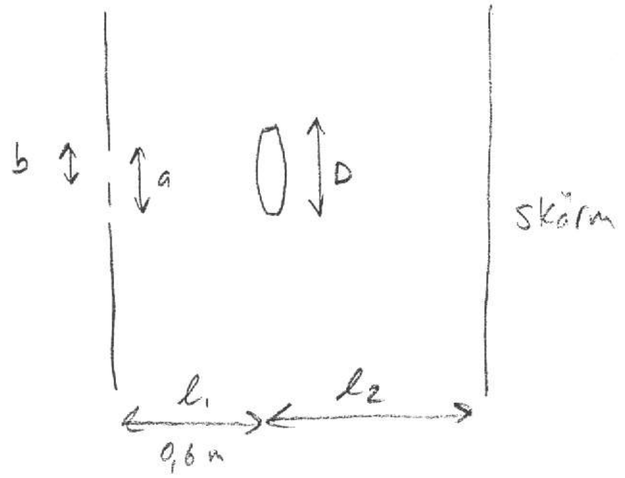
□

# ÖVNING 11 LÖSNINGAR

## Ö69

$b = 0{,}05$ mm

$a = 1$ mm




$D = 1$ cm

$f = 50$ cm

a) Huygens Fresnels princip: Varje spalt (hål) innehåller spridningskällor som ger upphov till sfäriska sekundärvågor. Pga linsen så kommer parallella strålar att konvergera i ett plan på avståndet f bakom linsen ($f = 50$ cm). Detta är Fraunhoferdiffraktionsmönstret av de två hålen.

b) Gauss linsformel $\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}$ $\quad s_o = l_1 = 0{,}6$ m

$$s_i = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s_o}} = \frac{1}{\frac{1}{0{,}5} - \frac{1}{0{,}6}} \text{ m} = 3 \text{ m}$$

Dvs skärmen står på avståndet $s_i$ från linsen.

$\Rightarrow$ Vi får en bild av hålen på skärmen.

Förstoring: $M_T = -\frac{s_i}{s_o} = -\frac{300}{6} = -5$

$\Rightarrow$ "Bilddiameter" $= 5 \cdot b = 0{,}25$ mm

"Bildhålsavstånd" $= 5 \cdot a = 5$ mm

OBS! Linsens diameter är bara 1 cm. Skärmen kommer därför också innehålla ljus som inte fokuseras i linsen $\Rightarrow$ Bilden blir suddig pga diffraktion

## Ö75

He-Ne laser. $\lambda = 633\,nm$. Koherenslängden $\Delta l_c = 5\,km$

$\Delta l_c = c \cdot \Delta t_c$ (koherenstiden)

$\Delta t_c = \frac{\Delta l_c}{c}$ Spektralvidd $= \frac{1}{\Delta t_c} = \frac{c}{\Delta l_c} =$

$= \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^3}\,Hz = 0{,}6 \cdot 10^5\,Hz = 60\,KHz$

$\Delta t = h\Delta\nu = h\,\Delta\left(\frac{c}{\lambda}\right) = -\frac{hc\,\Delta\lambda}{\lambda^2}$

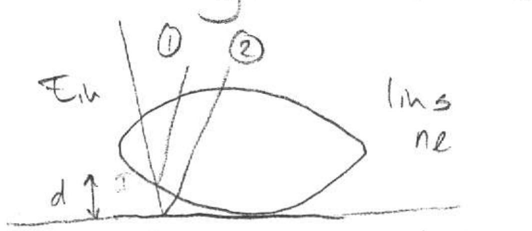
$\Rightarrow |\Delta\lambda| = \frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu = \frac{(633 \cdot 10^{-9})^2}{3 \cdot 10^8} \cdot 60 \cdot 10^3 =$

$= 8 \cdot 10^{-17}\,m = 8 \cdot 10^{-8}\,nm$

$\square$

## Ö79

Newtonringar! $\lambda = 500 \pm 10\,nm$ $n_l = 1{,}6$ $n_g = 1{,}4$




Visibiliteten

$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$

Börja med fälten

①: $E_1 = E_{in} r_1$

②: $E_2 = E_{in} t_I r_{II} t_I' e^{i\delta}$ $\delta = 2 \cdot d \cdot k$

Reflektions och transm. koeff. enl. Fresnels ekv. (normalfall)

$$r = \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t} \qquad t = \frac{2n_i}{n_i + n_t}$$

OBS att $n_i$ och $n_t$ är olika i de olika skikten

linsluft

$$r_I = \frac{1{,}6 - 1}{2{,}6} = 0{,}231 \qquad t_I = \frac{2 \cdot 1{,}6}{2{,}6} = 1{,}231$$

$$r_{II} = \frac{1 - 1{,}4}{2{,}4} = -0{,}167 \qquad t_I' = \frac{2 \cdot 1}{2{,}6} = 0{,}769$$

Inget extra π-skifte, ty det ingår redan i negativ reflektionsamplitud

Om vägskillnaden är mindre än koherenslängden kan vi få interferens. Litet d - interferens mellan ① & ② pga fas-skift som uppkommer av luftgapet. Tjock lins ⇒ reflektion i linsens yta inkoherent med ① & ②

$$E_1 = 0{,}231 \cdot E_{in}$$

$$E_2 = 1{,}231 \cdot (-0{,}167) \cdot 0{,}769 \cdot e^{i\delta} \cdot E_{in} = 0{,}158\, e^{i(\delta+\pi)} E_{in}$$

Max intensitet då $E_1$ & $E_2$ är i fas. $(\delta + \pi) = 2m\pi$

$$I_{max} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \left( |E_1| + |E_2| \right)^2$$

Min. intensitet då $E_1$, $E_2$ är ur fas. $(\delta + \pi) = 2\pi m + \pi$

$$I_{min} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \left( |E_1| - |E_2| \right)^2$$

$$V = \frac{\frac{\varepsilon_0 c}{2} E_{in}^2 \left( (0{,}231 + 0{,}158)^2 - (0{,}231 - 0{,}158)^2 \right)}{\frac{\varepsilon_0 c}{2} E_{in}^2 \left( (0{,}231 + 0{,}158)^2 + (0{,}231 - 0{,}158)^2 \right)}$$

$$\Rightarrow V = 0{,}932$$

Vad händer när vi lyfter på linsen?


En ring som uppkommit vid avståndet d (innan lyft) mellan glas och lins måste flytta sig in mot centrum när vi lyfter linsen för att hitta rätt avstånd d.

Vågtågens längd (koherenslängden) gör att vi får en gräns för när vågtågen inte längre kan interferera med varandra. Gräns: $2d < \Delta l_c$ för interferens (sedan försvinner ringarna).

$$\Delta l_c = c\Delta t_c = c \cdot \frac{1}{\Delta \nu_c} \qquad \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \Delta\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

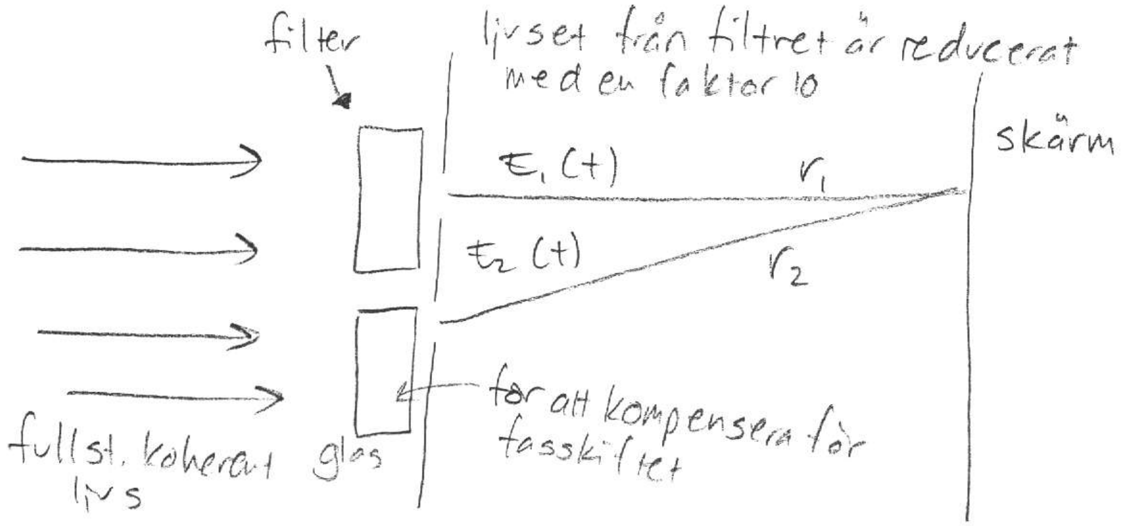
$$\Rightarrow \Delta l_c = \frac{c}{\frac{c}{\lambda}\cdot\Delta\lambda} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda - \Delta\lambda \\ \lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda \end{array} \qquad \Delta\lambda = 10\ nm$$

$$\Rightarrow \Delta l_c = \frac{(500\cdot 10^{-9})^2}{10\cdot 10^{-9}} = 25\ \mu m$$

Man måste vara stadig på handen.

# H 12.13

Vi tar en titt på Youngs experiment.




Visibilitet $\nu = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$

Generella interferenslagen för delvis koherent ljus

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\, \mathrm{Re}\{\tilde{\gamma}_{12}\}$$ ← tar hand om koherensen på något vis.

där $\tilde{\gamma}_{12}$ är den <u>komplexa</u> koherensgraden.

Skriv $\tilde{\gamma}_{12} = |\tilde{\gamma}_{12}| e^{i\phi_{12}}$ För den komplexa koherensgraden gäller:

$|\tilde{\gamma}_{12}| = 1$ – för koherent ljus

$|\tilde{\gamma}_{12}| = 0$ – för inkoherent ljus

$0 < |\tilde{\gamma}_{12}| < 1$ – delvis koherent ljus

Kan skriva $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\, |\tilde{\gamma}_{12}| \cos\phi_{12}$

$I_{max}$ då $\cos\theta_{12} = 1$ $\quad I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,|\tilde{\gamma}_{12}|$

$I_{min}$ då $\cos\theta_{12} = -1$ $\quad I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}\,|\tilde{\gamma}_{12}|$

$$\frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}\,|\tilde{\gamma}_{12}|}{2I_1 + 2I_2} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}\,|\tilde{\gamma}_{12}|}{I_1 + I_2}$$

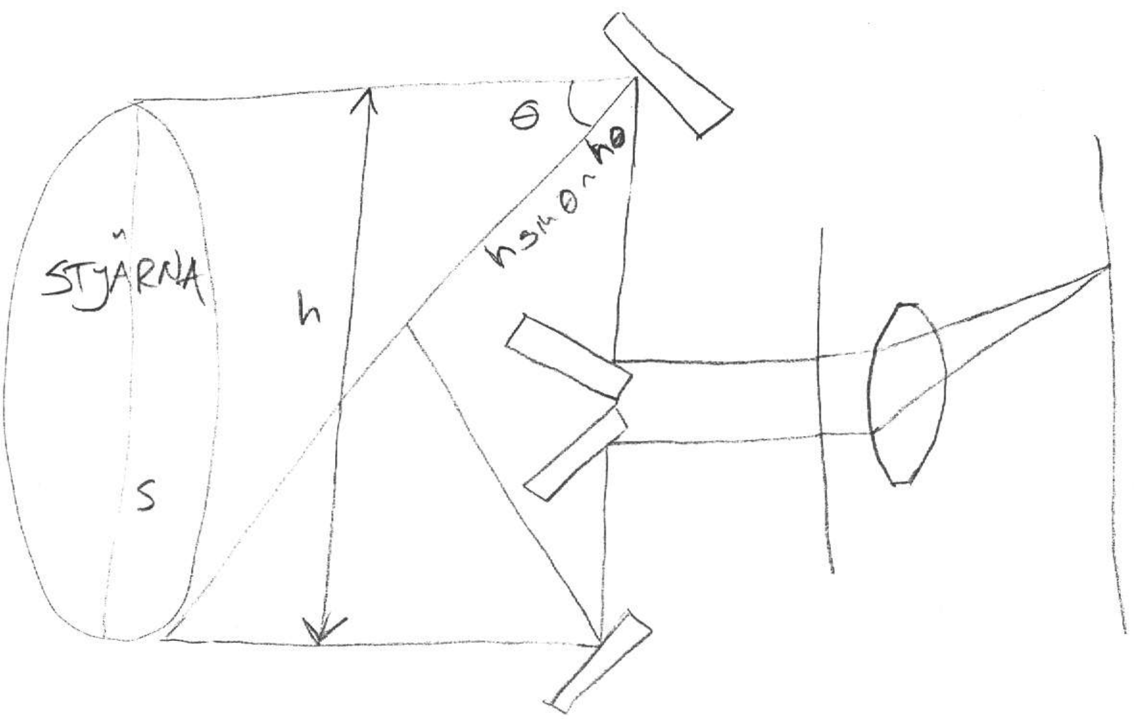
Følter: $I_1 = I \quad I_2 = 10I$

$$V = \frac{2\sqrt{I \cdot 10I}}{11I}|\gamma_{12}| = /\ |\gamma_{12}| = 1\ / = \frac{2\sqrt{10}}{11} = 0{,}57$$

ty fullst. koherent.

$\square$

## Ö76




Stjärna med diameter S antas bestå av en cirkulär distribution av pkt källor. Intensitetsdistributionen (och därmed visibiliteten) kommer att beskrivas av en första ordningens Besselfunktion (det har vi tydligen sagt ngn annan gång).

$$V = 2\left|\frac{J_1(\pi h\theta/\lambda_0)}{\pi h\theta/\lambda_0}\right|$$ som har första nollställe för argumentet $= \frac{\pi h\theta}{\lambda_0} = 3{,}83$

# ÖVNING 11 UPPGIFTER (LÖSNINGARNA KOMMER SENARE)

## Ö69

En skärm belyses med // monokrom. ljus. $\lambda = 600$ nm. I skärmen finns två små ($\phi = 0{,}05$ mm) hål, 1 mm från varandra. En konvex lins med 1 cm diam. och 50 cm fokallängd placeras 60 cm från hålen. Vad ser man

a) 50 cm bakom linsen?

b) 300 cm — " — ?

## Ö75

Ljuset från en laser är extremt koherent. För en viss He-Ne laser ($\lambda = 633$ nm) är koherenslängden 5 km. Vad är spektralvidden (i nm & Hz)?

## Ö79

Newtonringar observeras i reflekterat ljus från en lins, som ligger på en glasplatta. Kvasimonokr. ljus infaller $\perp$ mot glasytorna $n_{lins} = 1{,}6$ & $n_g = 1{,}4$. Beräkna visibiliteten för fransorna i centrum av interf.-mönstret. Vad händer då linsen lyftes? Hur högt kan linsen lyftas utan att interferensmönstret försvinner helt

H 12,13

Vi har Youngs experiment, fast ett av hålen är täckt med ett filter som minskar irradiansen med en faktor 10, och det andra hålet är täckt med glas, så att inget relativt fasskift uppstår. Beräkna visibiliteten under antagande av fullständig koherens.

Ö76

I ett försök med Michelsons stjärninterferometer finner man att interferensfransarna försvinner när separationen (D) mellan speglarna är > 6 m. Best. stjärnans $\phi$, om dess avstånd till jorden är 50 ljusår och $\lambda = 486$ nm.

Ö66

De diffrakterade strålarna från ett specialgitter är lika intensiva (I = 1) som den centrala strålen. Vinkeln mellan centrala och första diffr. strålen är 4°. Best intensiteter och riktningar för alla strålar upp till 8° i det diffraktionsmönster som uppstår när var 5:e ritsi det ursprungliga gittret blockeras.

Visibiliteten = 0 innebär att fransarna har försvunnit.

$$h = \frac{1{,}22\lambda_0}{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{1{,}22\lambda_0}{h} = 9{,}882\cdot10^{-8} \text{ rad}$$

(vi vet när fransarna försvinner)

$$\frac{s}{l} \approx \theta \Rightarrow s = l\cdot\theta = 4{,}67\cdot10^{10} \text{ m}$$

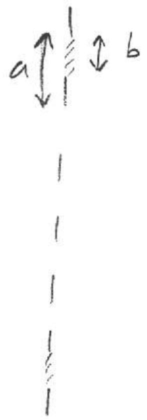
□

Ö466

Betrakta först oblockerat gitter:

$$a\sin\theta_m = m\lambda$$

$$m=1 \Rightarrow \theta = 4° \Rightarrow \frac{d}{a} = \sin 4°$$




Ett gitter med spaltavstånd 5a har max för

$$5a\sin\theta_{5m} = m\lambda$$

fel

$$\sin\theta_{5m} = \frac{m\lambda}{5\cdot a} \Rightarrow \theta_5 = 0,\ 0{,}8,\ 1{,}6,\ 2{,}4,\ 3{,}2,\ 4,\ 4{,}8,\ 5{,}6,\ 6{,}4,\ 7{,}2 \text{ osv...}$$

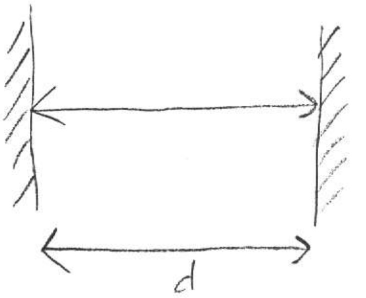
När vi blockerar var femte spalt kommer vi att få toppar vid dessa vinklar. Intensiteten $\propto N^2 \Rightarrow$ Intensitet $(1/5)^2 = 0{,}04$ där vi inte tidigare hade max. Att vi får toppar kan förklaras med en massa ord.

□ ÖRGHL...

# H 13.26

En He-Ne laser har en Dopplerbreddad bandbredd på ≈ 1,4 GHz vid 632,8 nm. Bestäm maximala kavitetslängden för "single-axial mode operation" (n = 1). Gör en skiss av "transition linewidth" och "corresponding cavity modes."

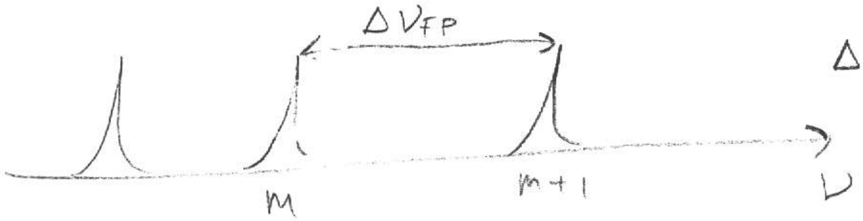
<u>OKEJ:</u>




Fabry Perot!

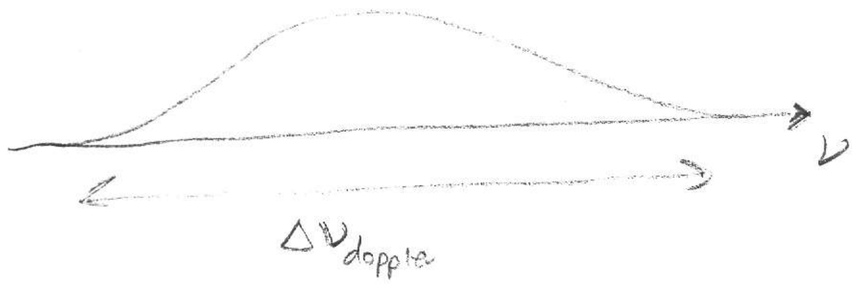
Resonans $2d = m\lambda$

$$\lambda = \frac{2d}{m} \qquad \lambda = \frac{c}{\nu} \qquad \nu_{FP^*} = \frac{cm}{2d}$$




$\Delta\nu_{FP} = \frac{c}{2d}$

Dopplerbreddning




För single mode kräver vi att avståndet mellan moderna ($\Delta\nu_{FP}$) ska va större än dopplerbredden. Dvs $\Delta\nu_{FP} > \Delta\nu_{doppler}$

$$\frac{c}{2d} > \Delta\nu_{doppler} \Rightarrow d < \frac{c}{2\Delta\nu_{doppler}} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 1{,}4 \cdot 10^9} = 0{,}107 \text{ m}$$

*Folkpartiet

Där ser man. □