Tentamen
ess115 Elektriska Nät och System, F2

Examinator: Ants R. Silberberg

25 augusti 2008 kl. 14.00-18.00 sal V

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Lösningar:	Anslås tisdagen den 26 augusti på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Anslås måndagen den 8 september kl. 15 på institutionens anslagstavla, plan 5.
Granskning:	Onsdag 10 sept. kl. 13.15 - 15.00 , rum 5430.
Bedömning:	En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Physics Handbook
- Sammanfattning Kretselektronik (A4-häfte)

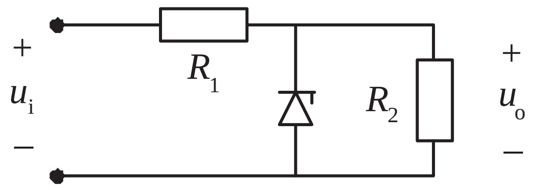
Betygsgränser (6 uppgifter om vardera 3 poäng).

Poäng	0-7.5	8-11.5	12-14.5	15-18
Betyg	U	3	4	5

OBS! Skriv namn och personnummer på varje sida. Lycka till!

1. Studera zenerdiodkretsen i figur 1. Mellan vilka värden kan inspänningen u_i variera om kravet är att utspänningen u_o skall vara stabiliserad ($u_o = E_z$). Strömmen genom zenerdioden får ej överstiga 50 mA. För zenerdioden gäller: $E_z = 6.2$ V och $r_z = 0$ Ω.

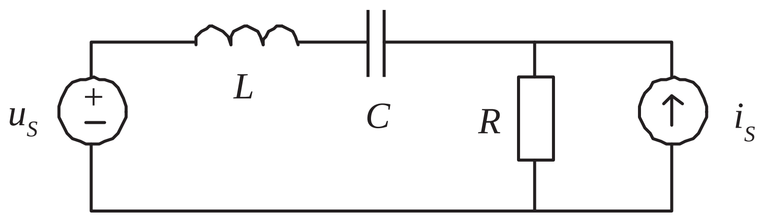
   $R_1 = 100\ \Omega, \qquad R_2 = 200\ \Omega$



Figur 1: Spänningsstabilisator

2. Beräkna medeleffekten som utvecklas i alla kretselement (R, L och C) i kretsen i figur 2. Beräkna även den medeleffekt som levereras från (eller till) de två källorna (strömkällan och spänningskällan). Antag sinusformat stationärtillstånd.

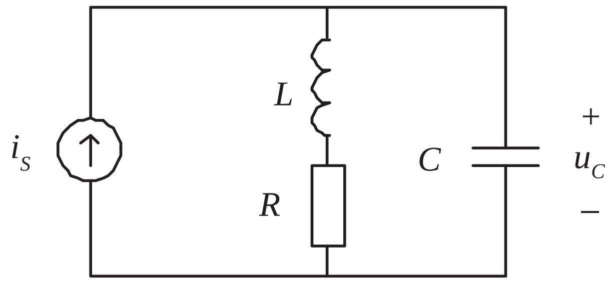
$$R = 1.0\ \Omega \qquad C = 100\ \mu\text{F}$$
$$L = 0.10\ \text{mH} \qquad \omega = 10 \cdot 10^3\ \text{r/s}$$
$$i_S(t) = 2.0\cos(\omega t + 30^\circ)\ \text{mA}$$
$$u_S(t) = 10\cos(\omega t)\ \text{V}$$



Figur 2: AC-krets

3. Studera kretsen i figur 3. Vid vilken vinkelfrekvens ω är strömmen i_s och spänningen u_C i fas? Beräkna även spänningen u_C vid denna vinkelfrekvens. Antag sinusformat stationärtillstånd.

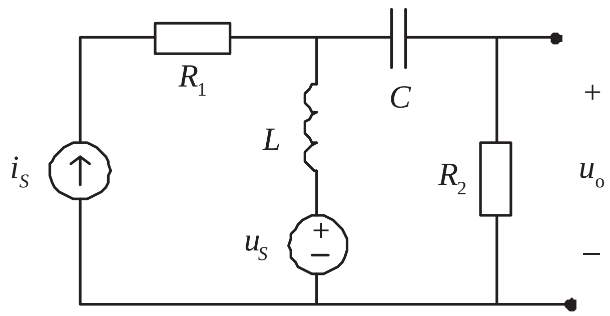
$$R = 50\ \Omega \qquad L = 50\ \text{mH}$$
$$C = 5.0\ \mu\text{F} \qquad i_s = 5.0\cos(\omega t)\ \ \text{A}$$



Figur 3: AC-krets

4. Beräkna spänningen $u_o(t)$ som ligger över R_2 i kretsen i figur 4. Nätet saknar begynnelseenergi. $\theta(t)$ betecknar ett enhetssteg.

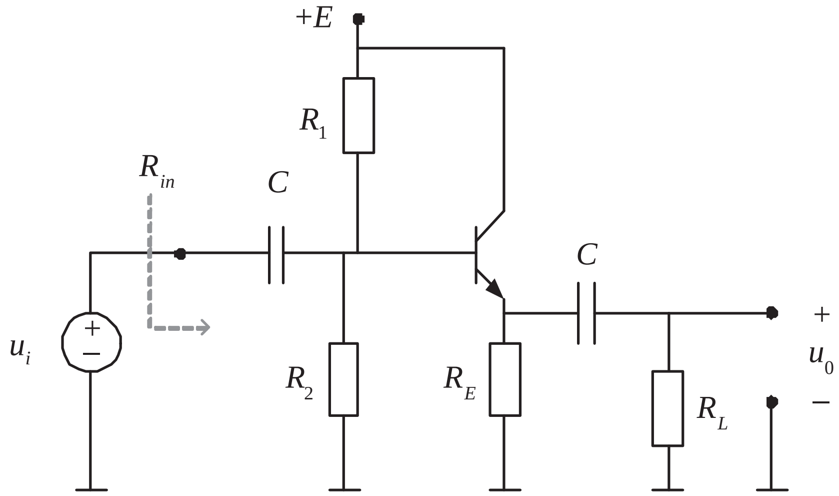
$$R_1 = 3.0\ \Omega \qquad R_2 = 2.0\ \Omega$$
$$C = 1.0\ \text{F} \qquad L = 1.0\ \text{H}$$
$$i_S(t) = 4.0 \cdot \theta(t)\ \text{A} \qquad u_S(t) = 12 \cdot \theta(t)\ \text{V}$$



Figur 4: RLC-nät

5. Beräkna spänningsförstärkningen u_0/u_i samt inresistansen R_{in} hos transistorförstärkaren i figur 5.
För transistorns gäller: h_{fe} =100, h_{ie} = 550 Ω, $E_o = U_{BE}$ = 0.7 V. Övriga transistorparametrar kan försummas. Reaktansen från kapacitanserna, $X_C = \frac{1}{\omega C}$, kan försummas vid aktuella signalfrekvenser.

$R_1 = 10$ kΩ	$R_2 = 6.8$ kΩ	$R_E = 680$ Ω
$R_L = 50$ Ω		$E = 10$ V.



Figur 5: Transistorkrets

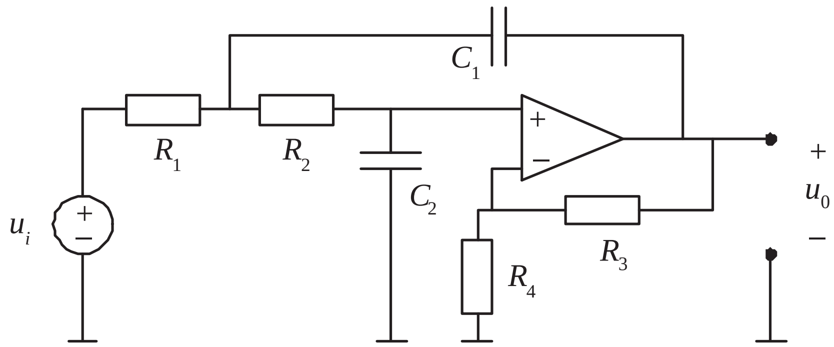
6. Operationsförstärkarkretsen i figur 6 kallas för ett Sellen-Key filter.

   a) Beräkna överföringsfunktionen u_0/u_i.

   b) Låt $R_1 = R_2$ och $C_1 = C_2$. Beräkna kvoten R_3/R_4 så att förstärkarens stegsvar blir kritiskt dämpat (maximalt snabbt utan översväng).

   c) Låt $R_1 = R_2$ och $C_1 = C_2$. Beräkna kvoten R_3/R_4 så att förstärkaren realiserar ett Butterworth lågpassfilter av andra ordningen.

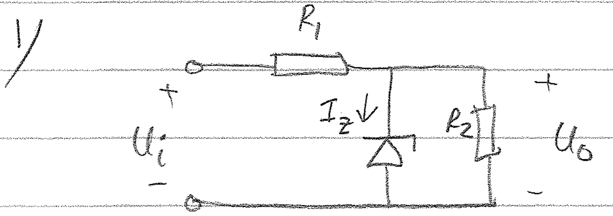
   Antag ideal operationsförstärkare.



Figur 6: Sellen-Key förstärkarsteg

Elektriska Nät och System
ess 115 080825

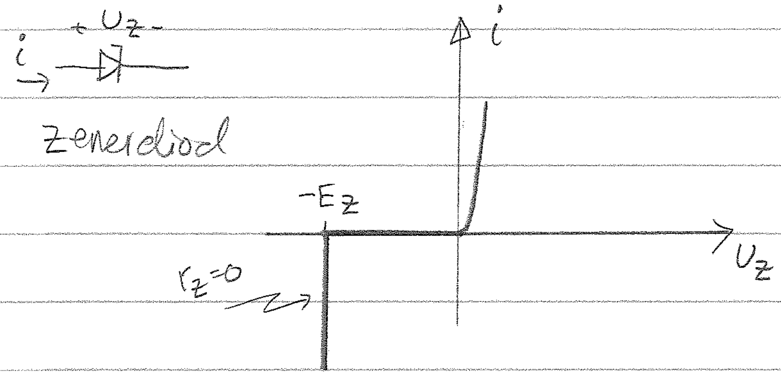
1)



$R_1 = 100\ \Omega$

$R_2 = 200\ \Omega$

$E_z = 6.2$



□ $U_{i_{min}}$: , Då $I_z = 0$ och $U_0 = E_z$

Spänningsdela $$U_0 = E_z = U_{i_{min}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} =$$

$$U_{i\,min} = E_z \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2} = E_z \cdot \frac{100 + 200}{200} = 6{,}2 \cdot \frac{3}{2} = 9{,}3 \text{ V}$$

□ $U_{i_{max}}$ Då $I_z = I_{zmax}$, $U_0 = E_z$

$$U_{i_{max}} = R_1 \underbrace{\left(I_{zmax} + \frac{E_z}{R_2} \right)}_{\text{ström gnm } R_1} + U_0 =$$

$$= 100\left(0{,}050 + \frac{6{,}2}{200}\right) + 6{,}2 = 14{,}3 \text{ V}$$

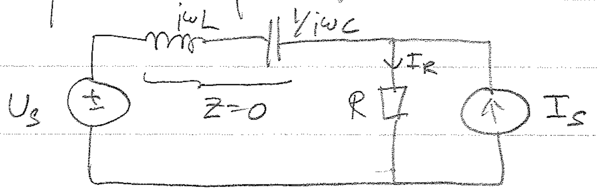
Svar: $9{,}3 \le U_i \le 14{,}3$ V

2/

ess115

080825

$j\omega$ - transformera



$R = 1\ \Omega$

$\omega = 10 \cdot 10^3$ r/s

$\omega L = 10^4 \cdot 0{,}10 \cdot 10^{-3} = 1$

$\omega C = 10^4 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 1$

$j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j - j = 0$

$U_s = 10\angle 0^\circ$ V

$I_s = 2\angle 30^\circ$ mA $= 2 \cdot 10^{-3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2}\right)$

Komplex effekt $S = P + jQ = \frac{1}{2} U I^*$

Medeleffekt $P = \mathrm{Re}\{S\}$

- Resistans $S_R = \frac{1}{2} U_s I_R^* = \frac{1}{2} U_s \frac{U_s^*}{R} = \frac{1}{2} \frac{|U_s|^2}{R}$

  $P_R = \mathrm{Re}\{S_R\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|U_s|^2}{R} = 50$ W

- Strömkälla $S_I = \frac{1}{2} U_s (-I_s)^* = \frac{1}{2}(-U_s)|I_s|\angle -30^\circ$

  Om $|I_s| = 2$A: $P_I = \mathrm{Re}\{S_I\} = -\frac{10}{2} 2\cos(-30^\circ) \approx -8{,}66$ W

  Om $|I_s| = 2$ mA $P_I = -8{,}66$ mW

- Sp. källa $S_U = \frac{1}{2} U_s (I_s - I_R)^* = \frac{1}{2} U_s \left(I_s - \frac{U_s}{R}\right)^*$

  Om $|I_s| = 2$A $S_U = 5(\sqrt{3} + j - 10)^* = 5(-10 + \sqrt{3} - j)$

  $P_U = \mathrm{Re}\{S_U\} = -5(10 - \sqrt{3}) \approx -41{,}34$ W

  Om $|I_s| = 2$mA $S_U = 5\left((\sqrt{3} + j)10^{-3} - 10\right)^*$

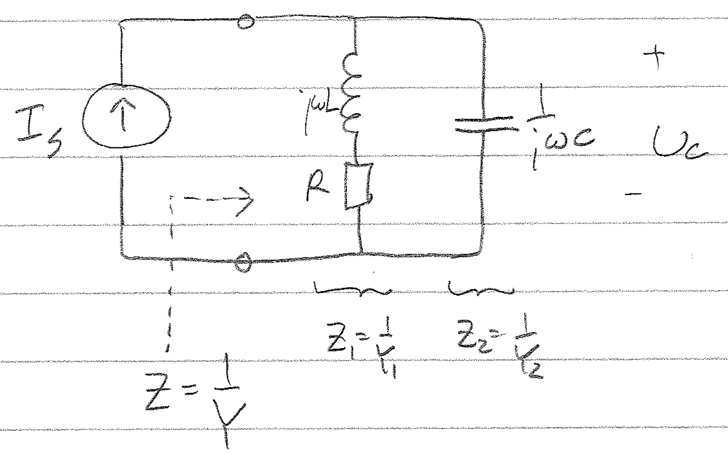
  $P_U = \mathrm{Re}\{S_U\} = 5(-10 + \sqrt{3} \cdot 10^{-3}) \approx -49{,}99$ W

- Medeleffekt i L och C = 0 (endast reaktiv effekt)

ess115
080825

3) $j\omega$ - transformera

$R = 50\ \Omega$
$L = 50\ mH$
$C = 5{,}0\ \mu F$
$i_s(t) = 5{,}0\cos(\omega t)$
$I_s = 5{,}0 \angle 0°$



Parallellkopplade admittanser $Y = Y_1 + Y_2 = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C$

$$Y = \frac{R - j\omega L}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} + j\omega C = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C =$$

$$= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)$$

$\mathrm{Im}\{Y\} = 0 \Rightarrow \quad R^2 + (\omega L)^2 = \frac{L}{C} \quad ; \quad \omega^2 L^2 = \frac{L}{C} - R^2$

$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2$ och $\omega = \omega_r = (\pm)\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}$

$\omega_r = \sqrt{3} \cdot 10^3 \approx 1732$ r/s

Vid resonans $Y = Y_r = \{\omega = \omega_r\} = \frac{R}{R^2 + (\omega_r L)^2} = \frac{1}{Z_r}$

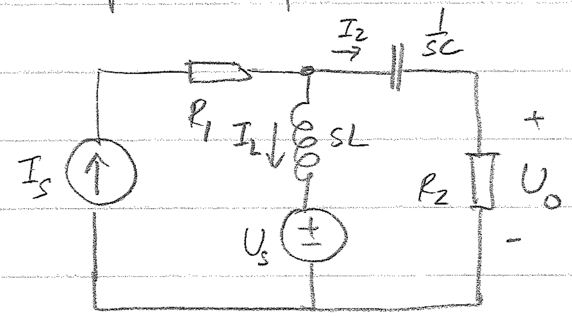
$$Z_r = \frac{R^2 + (\omega_r L)^2}{R} = 200\ \Omega$$

$$U_C = I_s \cdot Z_r = 5 \cdot 200 = 1{,}0 \cdot 10^3\ V$$

Svar: $\omega_r = \sqrt{3} \cdot 10^3$ r/s , $u_C(t) = 1{,}0\cos(\omega t)$ kV

ess 115
080825

4) Laplacetransf. nätet



$i_s(t) = 4{,}0 \cdot \theta(t)$ A

$I_s = \frac{4}{s}$

$u_s(t) = 12{,}0\, \theta(t)$ V

$U_s = \frac{12}{s}$

$R_1 = 3\,\Omega,\ R_2 = 2\,\Omega,\ L = 1{,}0\,\text{H},\ C = 1{,}0\,\text{F}$

$$\begin{cases} I_2 = \frac{U_0}{R_2} \\ I_s = I_L + I_2 \quad \Rightarrow \quad I_L = I_s - I_2 = I_s - \frac{U_0}{R_2} \\ I_L \cdot sL + U_s = I_2 \cdot \frac{1}{sC} + U_0 \end{cases}$$

$$\left(I_s - \frac{U_0}{R_2}\right) sL + U_s = \frac{U_0}{R_2} \cdot \frac{1}{sC} + U_0$$

$$sLI_s + U_s = U_0\left(\frac{1}{sR_2C} + 1 + s\frac{L}{R_2}\right)$$

$$s \cdot 1 \cdot \frac{4}{s} + \frac{12}{s} = U_0\left(\frac{1}{s2 \cdot 1} + 1 + s\frac{1}{2}\right)$$

$$4s + 12 = U_0\left(\frac{1}{2} + s + \frac{s^2}{2}\right) = \frac{U_0}{2}\left(s^2 + 2s + 1\right)$$

$$U_0 = 8\frac{s+3}{(s+1)^2} = 8 \cdot \left(\frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2}\right)$$

$s+3 = A(s+1) + B$ $\quad s^1$: $1 = A$ $\quad A = 1$

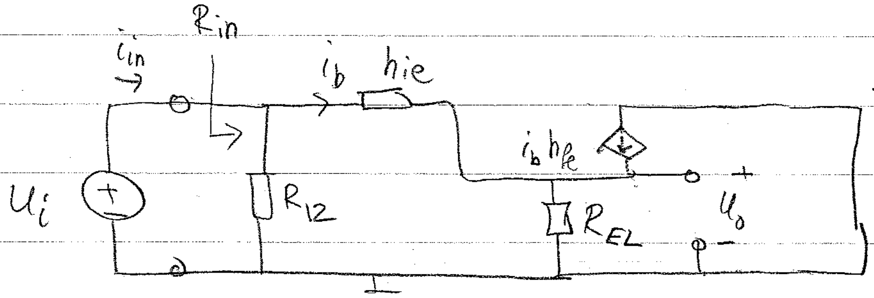
s^0: $3 = A + B$ $\quad B = 2$

$$U_0 = \frac{8}{s+1} + \frac{16}{(s+1)^2}$$ Inv. Laplacetransf.

$$u_0(t) = \left(8e^{-t} + 16te^{-t}\right)\theta(t) = 8e^{-t}(1+2t)\,\theta(t) \quad \text{V}$$

ess 115
080825

5/ Småsignalschema



$R_{12} = R_1 // R_2$

$R_{EL} = R_E // R_L$

$h_{fe} = 100$

$h_{ie} = 550\,\Omega$

–||– ≙ kortslutn.

$$\begin{cases} u_i = i_b h_{ie} + i_b(1+h_{fe})R_{EL} \\ u_0 = i_b(1+h_{fe})R_{EL} \end{cases}$$

$$R_{EL} = \frac{680 \cdot 50}{680+50} \approx 46{,}6\,\Omega$$

$$\frac{u_0}{u_i} = \frac{(1+h_{fe})R_{EL}}{h_{ie}+(1+h_{fe})R_{EL}} = \frac{1}{1+\frac{h_{ie}}{(1+h_{fe})R_{EL}}} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{550}{101 \cdot 46{,}6}} \approx 0{,}90$$

$$R_{in} = \frac{u_i}{i_{in}}$$

$$\begin{cases} i_{in} = i_b + \frac{u_i}{R_{12}} \\ u_i = i_b h_{ie} + i_b(1+h_{fe})R_{EL} \end{cases}$$

$$i_b = \frac{u_i}{h_{ie}+(1+h_{fe})R_{EL}}$$

$$i_{in} = \frac{u_i}{h_{ie}+(1+h_{fe})R_{EL}} + \frac{u_i}{R_{12}}$$

$$\frac{i_{in}}{u_i} = \frac{1}{h_{ie}+(1+h_{fe})R_{EL}} + \frac{1}{R_{12}} =$$

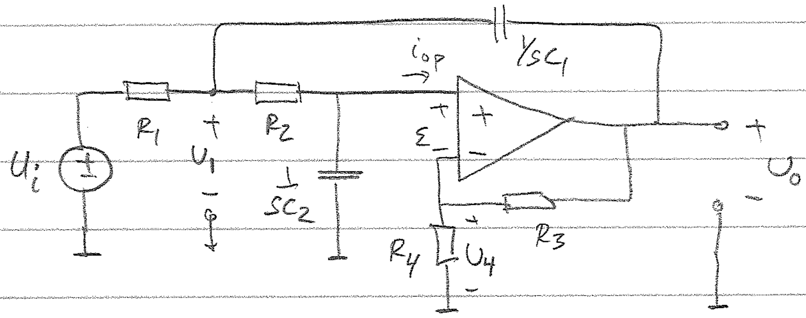
$$= \frac{1}{550+(101)46{,}6} + \frac{1}{4{,}05 \cdot 10^3} =$$

$$= \frac{1}{2{,}29 \cdot 10^3} = \frac{1}{R_{in}}$$

$$R_{in} = 2{,}29\,k\Omega$$

ess115
080825

6.)



Ideal op-först. Neg. återkoppl $\Rightarrow$ $\varepsilon = 0$, $i_{op} = 0$

$$\begin{cases} U_4 = U_0 \dfrac{R_4}{R_3+R_4} & (1) \\[2ex] \dfrac{U_i - U_1}{R_1} + \dfrac{U_0 - U_1}{1/sC_1} - \dfrac{U_4}{1/sC_2} = 0 & (2) \\[2ex] U_4 = U_1 \dfrac{1/sC_2}{R_2 + 1/sC_2} & (3) \end{cases}$$

a/

(1), (3) $\quad U_0 \dfrac{R_4}{R_3+R_4} = U_1 \dfrac{1}{1+sR_2C_2} \Rightarrow U_1 = \dfrac{R_4}{R_3+R_4} \cdot (1+sR_2C_2) \cdot U_0$

(2) $\quad \dfrac{U_i}{R_1} = U_1\left(\dfrac{1}{R_1} + sC_1\right) + U_4 sC_2 - U_0 sC_1$

$$U_i = U_1(1+sR_1C_1) + U_4 sR_1C_2 - U_0 sR_1C_1$$

$$U_i = \frac{R_4}{R_3+R_4}(1+sR_2C_2)(1+sR_1C_1)U_0 + U_0 \frac{R_4}{R_3+R_4} \cdot sR_1C_2 - U_0 sR_1C_1$$

$$U_i \frac{R_3+R_4}{R_4} = \left((1+sR_1C_1)(1+sR_2C_2) + sR_1C_2 - s\frac{R_1(R_3+R_4)}{R_4} \cdot C_1\right)U_0$$

$$\frac{U_0}{U_i} = \frac{1 + \frac{R_3}{R_4}}{1 + s\underbrace{\left(R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2 - \frac{R_1(R_3+R_4)}{R_4}C_1\right)}_{R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2 - \frac{R_1R_3}{R_4} - R_1C_1} + s^2R_1R_2C_1C_2}$$

ess115
080825

Uppg 6

$$\frac{U_0}{U_i} = \frac{1 + \frac{R_3}{R_4}}{1 + s\left(R_1C_2 + R_2C_2 - \frac{R_1R_3}{R_4}C_1\right) + s^2R_1R_2C_1C_2}$$

b) $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$

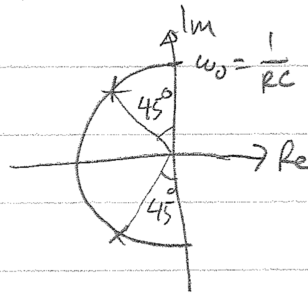
$$\frac{U_0}{U_i} = \frac{1 + \frac{R_3}{R_4}}{s^2R^2C^2 + sRC\left(2 - \frac{R_3}{R_4}\right) + 1} =$$

$$= \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) \cdot \frac{1/R^2C^2}{s^2 + s\frac{1}{RC}\left(2 - \frac{R_3}{R_4}\right) + \frac{1}{(RC)^2}}$$

Kritiskt dämpad $\Rightarrow$ Dubbel pol $\Rightarrow R_3/R_4 = 0$

$$\frac{U_0}{U_i} = \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) \cdot \frac{1/R^2C^2}{s^2 + s\frac{2}{RC} + \frac{1}{RC^2}} = \frac{\left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right)\frac{1}{R^2C^2}}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)^2}$$

c) Låt $\alpha = 2 - \frac{R_3}{R_4}$



Butterworthfilter LP, 2:a ordn

Studera nämnaren $\left(\frac{1}{RC} = \omega_0\right)$

$s^2 + s\alpha\omega_0 + \omega_0^2 = 0$

$$s_{1,2} = -\frac{\alpha}{2}\omega_0 \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\omega_0\right)^2 - \omega_0^2} = -\frac{\alpha}{2}\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}$$

$|Re| = |Im|$ $\quad \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}$; $\frac{\alpha^2}{4} = 1 - \frac{\alpha^2}{4}$

$1 = \frac{2\alpha^2}{4}$ $\quad \alpha^2 = 2$ $\quad \alpha = \sqrt{2}$

ess115
080825

11 forts 6

Notera $\alpha = \sqrt{2}$ (ej $= -\sqrt{2}$) ty pol måste ligga i vänstra halvplanet, Krav för stabilitet!

$$\alpha = 2 - \frac{R_3}{R_4}$$

$$\frac{R_3}{R_4} = 2 - \alpha = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586$$