Tentamen
ess115 Elektriska Nät och System, F2

Examinator: Ants R. Silberberg

24 augusti 2005 kl. 08.30-12.30 sal V

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Lösningar:	Anslås torsdagen den 25 augusti på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Anslås tisdagen den 6 september kl. 15 på institutionens anslagstavla, plan 5.
Granskning:	1: Onsdagen den 7 sept. kl. 12.30 - 13.30 , rum 5430. 2: Torsdagen den 8 sept. kl. 13.00 - 14.00 , rum 5430.
Bedömning:	En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Physics Handbook
- Sammanfattning Kretselektronik (A4-häfte)

Betygsgränser (6 uppgifter om vardera 3 poäng).

Poäng	0-7.5	8-11.5	12-14.5	15-18
Betyg	U	3	4	5

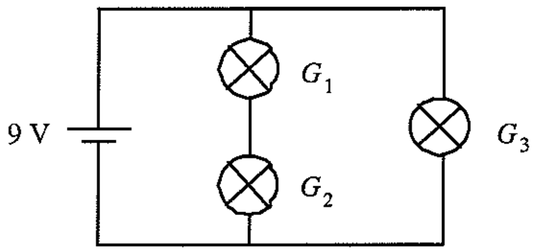
OBS! Skriv namn och personnummer på varje sida. Lycka till!

1. Tre glödlampor G_1, G_2 och G_3 är kopplade till ett 9 V batteri enligt kretsen i figur 1 nedan. Effektutvecklingen i varje glödlampa är olika och är 15 W för G_1, 10 W för G_2 och 20 W för G_3. Antag att en glödlampa elektriskt sett uppför sig som en resistans. Beräkna

   a) den ström som batteriet levererar

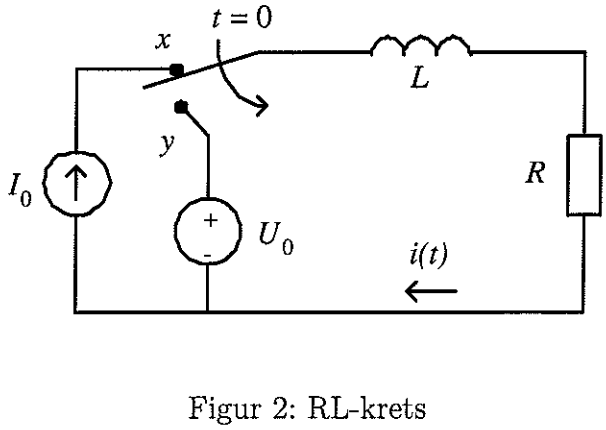
   b) strömmen genom varje glödlampa

   c) den ekvivalenta resistansen hos glödlampa G_2



Figur 1: Krets med tre glödlampor

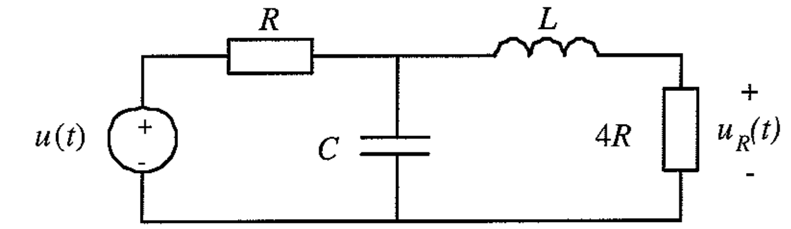
2. Brytaren i kretsen i figur 2 har varit i position x under en mycket lång tid. Vid tidpunkten $t = 0$ flyttas brytaren mycket snabbt från position x till position y . Beräkna strömmen $i(t)$ för $t = L/R$ samt då $t \to \infty$. Vad krävs för att $i(t)|_{t=0} < i(t)|_{t=\infty}$?
   Spänningen U_0 är konstant liksom strömmen I_0.



Figur 2: RL-krets

3. Betrakta växelströmsnätet i figur 3 nedan och beräkna spänningen $u_R(t)$. Antag sinusformat stationärtillstånd.

$$u(t) = 5.0\cos(\omega t)\ \text{V} \qquad R = 20.0\ \Omega \qquad C = 0.20\ \mu\text{F}$$
$$\omega = 1.0 \cdot 10^5\ \text{rad/s} \qquad L = 0.40\ \text{mH}$$



Figur 3: Växelströmsnät

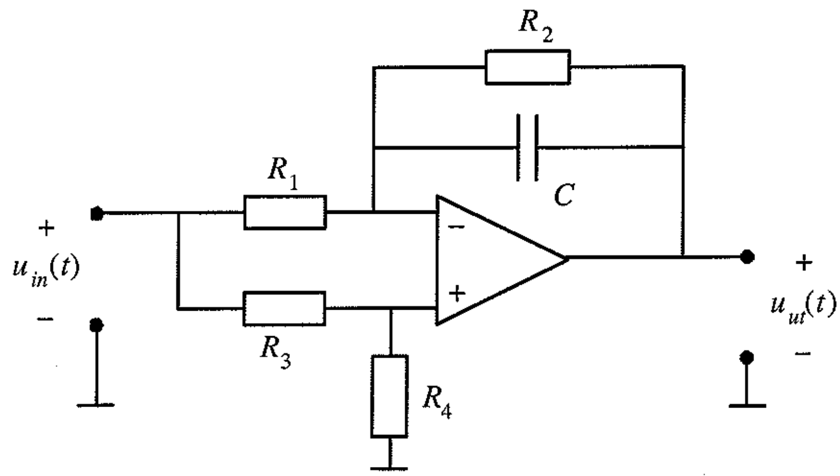
4. En generell första ordningens förstärkare visas i figur 4.

   a) Beräkna förstärkarens överföringsfunktion $H(s)$.

   b) Vilket villkor måste vara uppfyllt för att förstärkaren skall realisera ett högpassfilter?

   c) Vilket villkor måste vara uppfyllt för att förstärkaren skall realisera ett lågpassfilter?

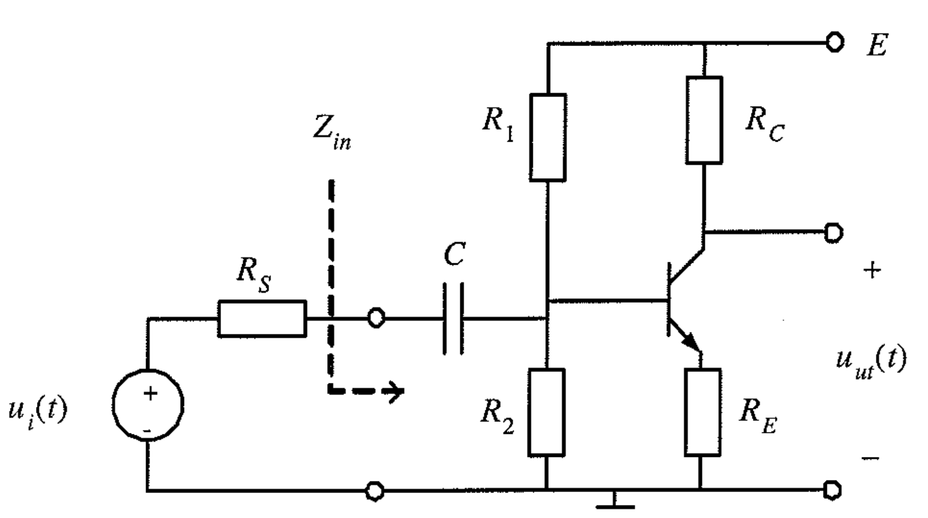
   Antag ideal operationsförstärkare.



Figur 4: Förstärkare

5. Beräkna förstärkningen $\frac{u_{ut}}{u_i}$ i transistorkretsen i figur 5 nedan. Beräkna även förstärkarens inimpedans Z_{in} som den är markerad i figuren. För transistorn gäller: h_{ie}=1.0 kΩ och h_{fe}=200. Övriga transistorparametrar kan försummas. Vid aktuella signalfrekvenser är dessutom $\frac{1}{\omega C} \approx 0$.

$R_S = 50\ \Omega$	$R_1 = 15\ \text{k}\Omega$	$R_2 = 3.3\ \text{k}\Omega$
$R_C = 2.2\ \text{k}\Omega$	$R_E = 220\ \Omega$	

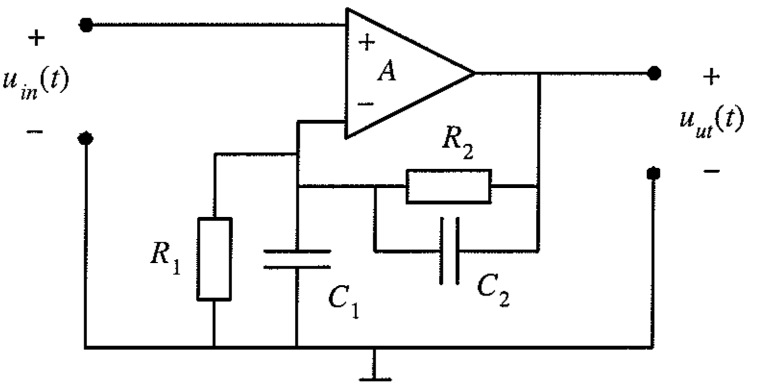


Figur 5: Transistorförstärkare

6. En förstärkare A återkopplas enligt figur 6. Beräkna R_1 och C_1 så att den totala förstärkningen $\frac{u_{ut}}{u_{in}}$ vid låga frekvenser blir 100 ggr samt att den återkopplade förstärkaren blir stabil med en fasmarginal på 45°. För förstärkaren A gäller att:

$$A = \frac{10^4}{(1 + \frac{s}{10^3})^2}$$
$$Z_{in} = \infty$$
$$Z_{ut} = 0$$

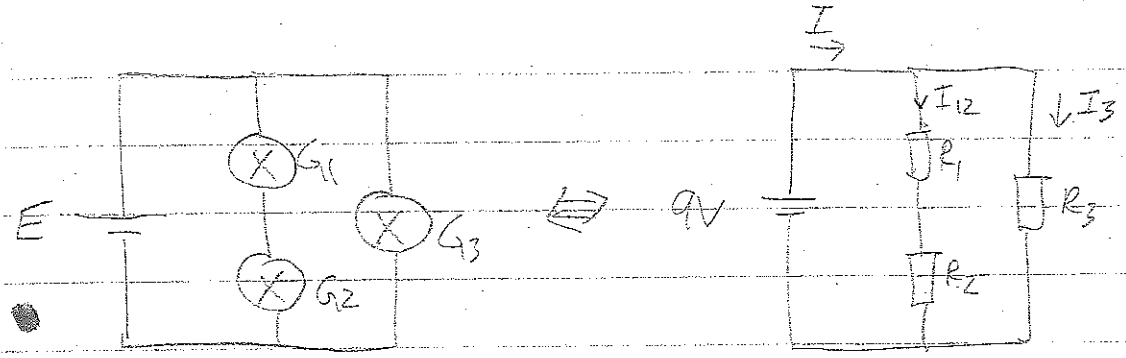
För övrigt är $R_2 = 100$ kΩ, $C_1 < C_2 = 10$ nF.



Figur 6: Återkopplad förstärkare

El nät o system F2
ess115
050824

1/



$I = I_{12} + I_3$

Total förbrukad effekt $15 + 10 + 20 = 45\ W$

Denna effekt avges (levereras) av batteriet

$P = 9 \cdot I = 45 \Rightarrow I = \frac{45}{9} = 5\ A$

Effekt i R_3: $P_3 = 9 \cdot I_3 = 20\ W$

$\Rightarrow I_3 = \frac{20}{9}\ A$

$I_{12} = I - I_3 = 5 - \frac{20}{9} = \frac{45-20}{9} = \frac{25}{9}\ A$

Effekt i R_2: $P_2 = R_2 \cdot (I_{12})^2 = 10\ W$

$R_2 = \frac{P_2}{(I_{12})^2} = \frac{10}{\left(\frac{25}{9}\right)^2} = \frac{\overset{2}{\cancel{10}} \cdot 81}{\underset{5}{\cancel{25}} \cdot 25} = \frac{162}{125} \approx 1{,}3\ \Omega$

Svar: a) $I = 5A$

b) $I_{12} = \frac{25}{9} \approx 2{,}78\ A$ (G_1 och G_2)

$I_3 = 20/9 \approx 2{,}22\ A$ (G_3)

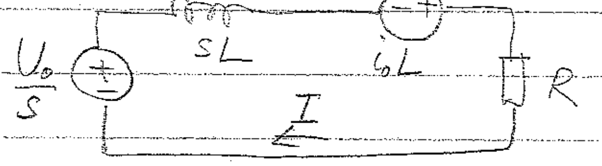
c) $R_2 \approx 1{,}3\ \Omega$

Lätt lösning hänger kvar!

ess115
050824

2. $t<0$ Beg. ström genom induktans $i_0 = I_0$

$t \geq 0$ Laplacetransf. nätet



KVL: $-\frac{U_0}{s} + IsL - i_0 L + IR = 0$

$$I = \frac{\frac{U_0}{s} + i_0 L}{R + sL} = U_0 \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{R+sL} \right] + \frac{i_0 L}{R+sL}$$

PBU:

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{R+sL} = \frac{A}{s} + \frac{B}{R+sL} = \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{R} \\ B = -\frac{L}{R} \end{array} \right\} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{s} - \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{R+sL}$$

och $I(s) = \frac{U_0}{R} \cdot \frac{1}{s} - \frac{U_0 L}{R} \cdot \frac{1}{R+sL} + \frac{i_0 L}{R+sL} = \{ i_0 = I_0 \} =$

$$= \frac{U_0}{R} \cdot \frac{1}{s} + \left(I_0 - \frac{U_0}{R} \right) \cdot \frac{1}{s + \frac{R}{L}}$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \left[\frac{U_0}{R} + \left(I_0 - \frac{U_0}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} \right] u(t) \quad \text{A}$$

$$i(t)\Big|_{t=0} = I_0$$

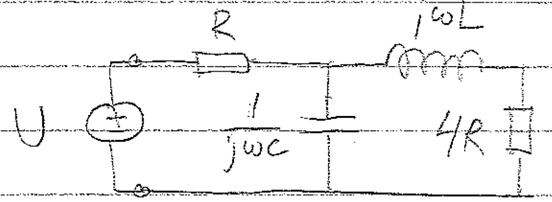
$$i(t)\Big|_{t=\frac{L}{R}} = \frac{U_0}{R} + \left(I_0 - \frac{U_0}{R} \right) \frac{1}{e} \quad \text{A}$$

$$i(t)\Big|_{t \to \infty} = \frac{U_0}{R}$$

$$i(t)\Big|_{t=0} < i(t)\Big|_{t=\infty} \quad \text{om} \quad I_0 < \frac{U_0}{R}$$

ess 115
050824

3. $j\omega$-transformera nätet



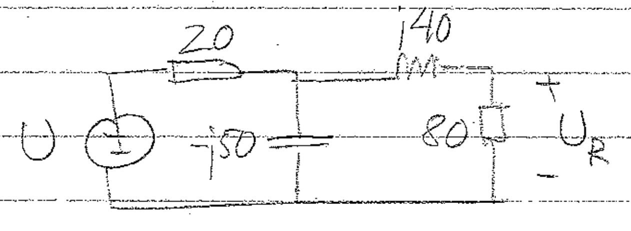
$u(t) = 5{,}0 \cos(\omega t)$

$U = 5\angle 0^\circ$, $\omega = 10^5$ 1/s

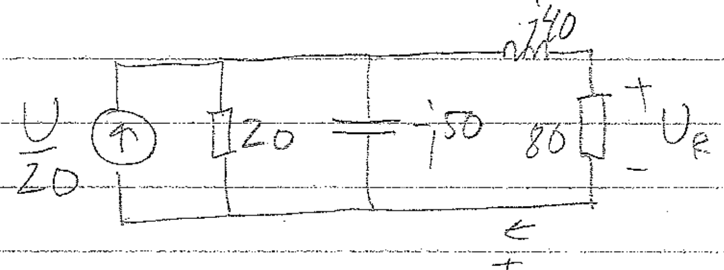
$R = 20{,}0\ \Omega$

$L = 0{,}40\ mH \Rightarrow \omega L = 40$

$C = 0{,}20\ \mu F \Rightarrow 1/\omega C = 50$



Thevenin → Norton



Strömdelning (med admittanser)

$$I_R = \frac{U}{20} \cdot \frac{\frac{1}{80+j40}}{\frac{1}{20} - \frac{1}{j50} + \frac{1}{80+j40}} = \frac{U}{20} \cdot \frac{1}{(80+j40)\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{j50}\right) + 1} =$$

$$= \frac{U}{20} \cdot \frac{1}{\left(4 + j\frac{8}{5} + j2 - \frac{4}{5} + 1\right)} = \frac{U}{20} \cdot \frac{1}{\left(\frac{21}{5} + j\frac{18}{5}\right)} =$$

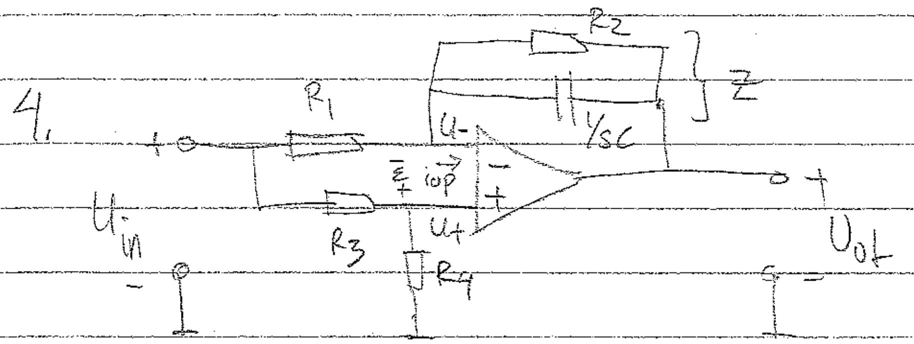
$$= \frac{U}{4} \cdot \frac{1}{(21+j18)} \quad \{U = 5\}$$

$$U_R = I_R \, 4R = \frac{5 \cdot 80}{4} \cdot \frac{1}{\underbrace{(21+j18)}_{27{,}66\angle 40{,}6^\circ}} \approx 3{,}61 \angle -40{,}6^\circ$$

$$\Rightarrow u_R(t) = 3{,}61 \cos(\omega t - 40{,}6^\circ)\ V \quad \{\omega = 1{,}0 \cdot 10^5\ r/s\}$$

ess115 050824

4.



Ideal op först

$i_{op} = 0$

Neg. återk. $\Rightarrow \varepsilon = 0$

$$Z = R_2 \parallel \frac{1}{sC} = \frac{R_2 \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{R_2}{1 + sR_2C}$$

$$U_+ = U_- \quad \text{ty } \varepsilon = 0$$

$$U_+ = U_{in} \frac{R_4}{R_3 + R_4} = U_-$$

$$\frac{U_{in} - U_-}{R_1} + \frac{U_{ut} - U_-}{Z} = 0; \quad \frac{U_{ut}}{Z} = -\frac{U_{in}}{R_1} + U_- \left\{ \frac{1}{Z} + \frac{1}{R_1} \right\}$$

$$\frac{U_{ut}}{Z} = -\frac{U_{in}}{R_1} + U_{in} \left[\frac{R_4}{R_3 + R_4} \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{R_1} \right) \right]$$

a/

$$\frac{U_{ut}}{U_{in}} = -\frac{Z}{R_1} + \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left(1 + \frac{Z}{R_1} \right) = -\frac{Z}{R_1} \left(1 - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) + \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$= -\frac{Z}{R_1} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} + \frac{R_4}{R_3 + R_4} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left(1 - \frac{Z R_3}{R_1 R_4} \right) =$$

$$= \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left(1 - \frac{R_3}{R_1 R_4} \left(\frac{R_2}{1 + sR_2C} \right) \right) =$$

$$= \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left[\frac{R_1 R_4 (1 + sR_2C) - R_2 R_3}{R_1 R_4 (1 + sR_2C)} \right] =$$

$$= \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \frac{1 + sR_2C - \frac{R_2 R_3}{R_1 R_4}}{1 + sR_2C} = H(s)$$

/ Forts 4

ess 115
050824

b) Högpassfilter Täljarpolynom $a+bs$
med $a=0$
(endast 's' term)

$$1-\frac{R_2 R_3}{R_1 R_4}=0$$

Svar: $R_1 R_4 = R_2 R_3$

$$\Rightarrow H(s)=\frac{R_4}{R_3+R_4}\cdot\frac{sR_2C}{1+sR_2C}=\frac{R_4}{R_3+R_4}\cdot\frac{s}{s+\frac{1}{R_2C}}$$

c) Lågpassfilter: Endast konstant term i täljaren

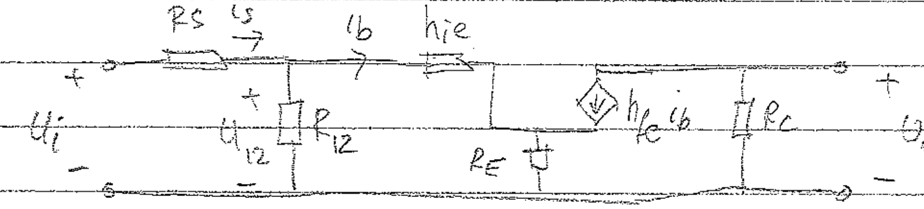
$$H(s)=\frac{\left[\frac{R_4}{R_3+R_4}+\frac{R_4\cdot sR_2C}{R_3+R_4}-\frac{R_4R_2R_3}{(R_2+R_3)R_1R_4}\right]}{1+sR_2C}$$

Låt $R_3\to\infty$

$$H(s)\Big|_{R_3\to\infty}=-\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1+sR_2C}$$

Svar: $R_3\to\infty$

5. Småsignal schema $\quad R_{12} = R_1 \| R_2 = \frac{15 \cdot 3{,}3}{15+3{,}3} \approx 2{,}7\,k\Omega$



$$\begin{cases} U_{ut} = -h_{fe}\, i_b R_C & (1) \\ U_i = R_s i_s + i_b h_{ie} + (1+h_{fe}) i_b R_E & (2) \\ (i_s - i_b) R_{12} = i_b h_{ie} + (1+h_{fe}) i_b R_E & (3) \end{cases}$$

(3): $\quad i_s = \frac{1}{R_{12}} \left[i_b h_{ie} + (1+h_{fe}) i_b R_E + i_b R_{12} \right]$

$$\frac{U_{ut}}{U_i} = \frac{-h_{fe} i_b R_C}{\frac{R_S}{R_{12}}\left[i_b\left(h_{ie} + (1+h_{fe})R_E + R_{12}\right)\right] + i_b\left[h_{ie} + (1+h_{fe})R_E\right]} =$$

$$= \frac{-h_{fe} R_C}{\left[h_{ie} + (1+h_{fe})R_E\right]\left[\frac{R_S}{R_{12}} + \frac{R_S}{h_{ie}+(1+h_{fe})R_E} + 1\right]} \approx \dots = -9{,}5$$

Inimpedans $\quad R_{in} = \frac{U_{12}}{i_s}$

$$\begin{cases} U_{12} = (i_s - i_b) R_{12} \\ U_{12} = i_b \left[h_{ie} + (1+h_{fe}) R_E\right] \end{cases}$$

$$i_b = \frac{U_{12}}{h_{ie} + (1+h_{fe}) R_E}$$

$U_{12} + i_b R_{12} = i_s R_{12}$

$U_{12} + \frac{U_{12} \cdot R_{12}}{h_{ie} + (1+h_{fe}) R_E} = i_s R_{12}$

$$\frac{U_{12}}{i_s} = \frac{R_{12}}{1 + \frac{R_{12}}{h_{ie} + (1+h_{fe}) R_E}} =$$

$$= \frac{2{,}7 \cdot 10^3}{1 + \frac{2{,}7\cdot 10^3}{10^3 + 201 \cdot 220}} \approx 2{,}5 \cdot 10^3\ \Omega$$

ess115 / 050824

6. Vid låga frekvenser : $s = j\omega \big|_{\omega \to 0}$ $\qquad A = \dfrac{10^4}{\left(1+\frac{s}{10^3}\right)^2}$

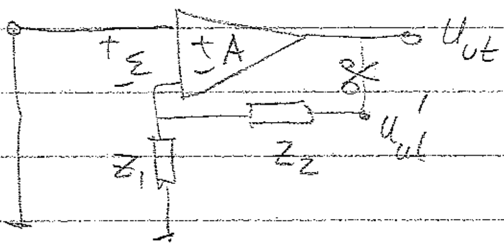
$\Rightarrow A(j\omega) \rightarrow 10^4$

$\dfrac{1}{j\omega C} \rightarrow 0$ {"avbrott"}

$\varepsilon \approx 0 \qquad U_{in} = U_{ut} \dfrac{R_1}{R_1+R_2} \; ; \; \dfrac{U_{ut}}{U_{in}} = 1 + \dfrac{R_2}{R_1} = 100$

$$R_1 = \frac{R_2}{99} = \frac{100}{99} = 1{,}01 \text{ k}\Omega$$

Beräkna slingförst (bryt upp vid utgång, nollst. ober. källa, $U_{in}=0$)



$Z_1 = R_1 \| \dfrac{1}{sC_1} = \dfrac{R_1}{1+sR_1C_1}$

$Z_2 = R_2 \| \dfrac{1}{sC_2} = \dfrac{R_2}{1+sR_2C_2}$

$$\begin{cases} U_{ut} = \varepsilon \cdot A \\ -\varepsilon = U_{ut}' \dfrac{Z_1}{Z_1+Z_2} \end{cases} \; ; \; T = \frac{U_{ut}}{U_{ut}'} = -A \frac{Z_1}{Z_1+Z_2} = -\beta F$$

$$\beta F = A \frac{\frac{R_1}{1+sR_1C_1}}{\frac{R_1}{1+sR_1C_1} + \frac{R_2}{1+sR_2C_2}} = A \frac{R_1(1+sR_2C_2)}{R_1(1+sR_2C_2)+R_2(1+sR_1C_1)} =$$

$$= A \frac{1+sR_2C_2}{1+sR_2C_2+\frac{R_2}{R_1}+sR_2C_1} = A \frac{1+sR_2C_2}{1+\frac{R_2}{R_1}+sR_2(C_1+C_2)} =$$

$$= A \frac{R_1}{R_1+R_2} \cdot \frac{1+sR_2C_2}{1+s\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}(C_1+C_2)} = \begin{cases} \omega_2 = \dfrac{1}{R_2C_2} \\ \omega_{12} = \dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)} \end{cases}$$

$$= \frac{10^4 R_1}{R_1+R_2} \cdot \frac{1+\frac{s}{\omega_2}}{\left(1+\frac{s}{10^4}\right)^2\left(1+\frac{s}{\omega_{12}}\right)}$$

e55115 / 050824

/ forts 6 $\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2} = \frac{1}{10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = 10^3$

Nollst. och en pol tar ut varandra

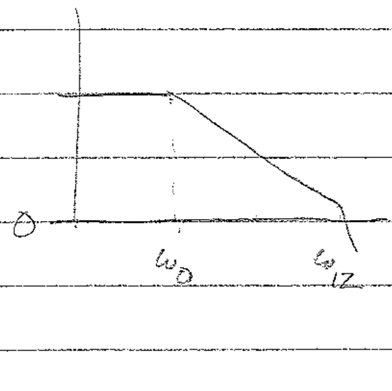
Vi har $\beta F = \frac{10^4 R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{12}}\right)}$

$\omega_0 = 10^3 = \frac{1}{R_2 C_2}$

$\omega_{12} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} \approx \frac{100}{R_2 (C_1 + C_2)} > \frac{100}{R_2 \cdot C_2} = 100\omega_0$

Polerna är väl separerade

45° fasmarginal



$\angle \beta F \big|_{\omega = \omega_{12}} = 45°$ {uppfyllt} och

$|\beta F|_{\omega = \omega_{12}} = 1$

$1 = \frac{10^4 R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{12}}{\omega_0}\right)^2}}_{\approx \frac{\omega_{12}}{\omega_0}} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{12}}{\omega_{12}}\right)^2}} = \frac{10^4 \cdot 1{,}01}{(1{,}01 + 100)} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_{12} \sqrt{2}}$

$\omega_{12} = \frac{10^4 \cdot 1{,}01 \cdot 10^3}{101{,}1 \cdot \sqrt{2}} \approx 70{,}64 \cdot 10^3$

$C_1 + C_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 \omega_{12}}$

$C_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 \omega_{12}} - C_2 = 4{,}2 \text{ nF}$