

# ESS115-Elektriska nät och system 2010

## Föreläsningsanteckningar & övningar

Föreläsare: Ants Silberg  
Antecknare: Simon Vajedi

LVI

Elektriska nät och system

med Ants Silberberg

[ESS 115]



2010-10-25  
Måndag

## Ström

Mängd elektrisk laddning som, per tidsenhet, passerar en tvärsnittsytta i en ledare.

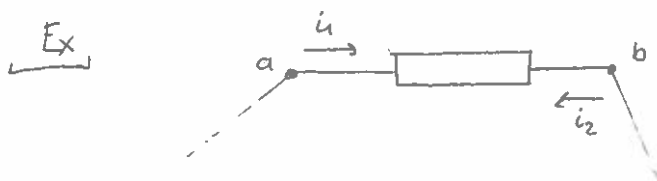
$$i = \frac{dq}{dt} \quad q, \text{ elektrisk laddning}$$

Ström, per definition, betecknar flödet av positiva laddningar.

Teckna en ström med

\* ett värde (variabel)

\* riktning (referens)



Här är  $i_1 = -i_2$

$i_1$ : flöde av positiva laddningar från punkt a till b

$i_2$ : " " " " b till a

Om strömmen är konstant:

Likström  
DC (Direct Current)

Likström brukar betecknas med stor bokstav  $I, I_1, \dots$

Om strömmen varierar med tiden används ofta liten bokstav som beteckning  $i(t), i_1(t), \dots$

En sinusformad ström kallas

växelström  
AC (Alternating Current)

Samband mellan ström  $i$  och  $q$ :

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau + \int_0^t i(\tau) d\tau = q(0) + \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$q(0)$  = laddning vid  $t=0$  (beg. värde)

Enheter (SI-systemet)

Elektrisk ström: Ampere [A] (grundenhet)

Elektrisk laddning: Coulomb [C]  $1 \text{ C} = \text{As}$

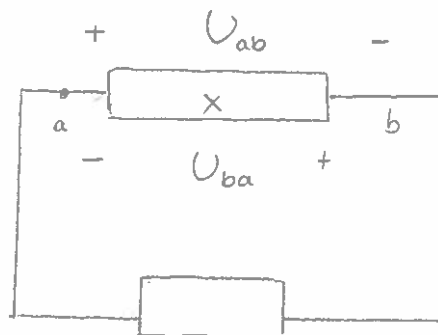
## Spänning

Den energi, per laddningsenhet, som krävs för att flytta laddning från en punkt i en krets till en annan är proportionellt mot en spänning.

En spänning tecknas med

- \* ett värde (variabel)
- \* polaritet (referens)

Ex



$$\text{Spänning } u = \frac{dw}{dq}$$

$W$ : energi i Joule

$q$ : laddning [C]

Vokabulär: ström igenom ett kretselement,  $i_{ab}$   
spänning över ett " " ,  $u_{ab}$

I vårt fall:  $u_{ab} = -u_{ba}$

Enhet (SI-systemet)

Elektrisk spänning: Volt [V]  $1V = 1 \frac{J}{As}$

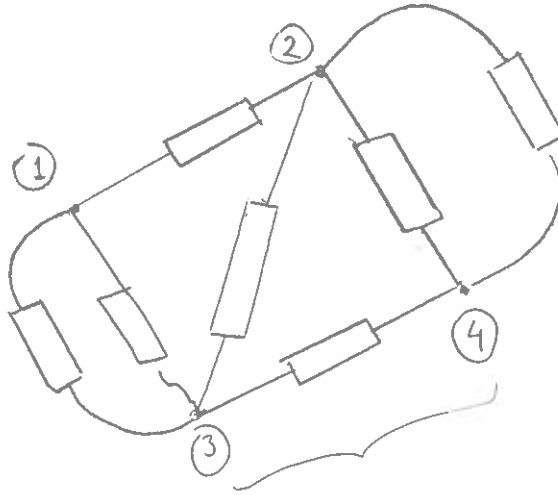
# Elektriska nät

Begrepp:

Nod:

Sammanbindningspunkt ① ② ③ ④

Kretselement



Maska: slinga som ej ansluter någon gren 0  
ansluter?

Gren  
kretselement  
anslutningsstrådar mellan  
två noder

Slinga: varje sluten väg

Anslutningsstrådar anses vara ideala (resistanslösa)

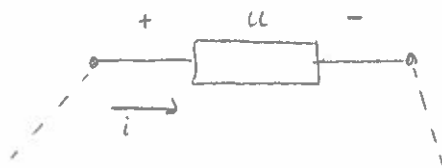


## Referensriktningar

Referensriktningar måste anges för spänningen och strömmar innan krets ekvationerna tecknas.

Referensriktningar kan väljas godtyckligt och oberoende av varandra.

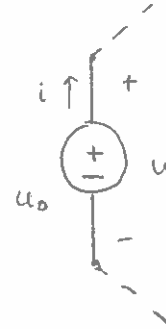
Det kan vara praktiskt att använda sik. samordnade referensriktningar  
"Strömmen går in vid plus-tecknet på spänningen  $u$ ."



## Kretselement

□ Oberoende spänningskälla

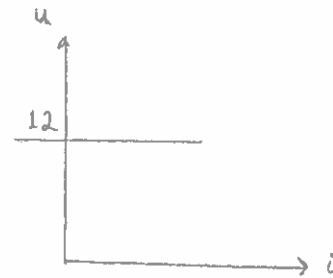
symbol:



Spänning  $u_0$ : oberoende av strömmen  $i$   
Strömmen  $i$ : beror på utseendet hos resten av kretsen (måste beräknas)

Exempel:

Om  $u_0 = 12 \text{ V}$  (konstant)



Nollställ ober. spänningskälla innebär att  $u_0 = 0$ .  
Vilket motsvarar kortslutning.

□ Beroende spänningskälla

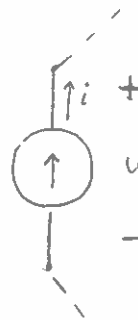
symbol:



$u_0$ : beroende av annan ström eller spänning i kretsen

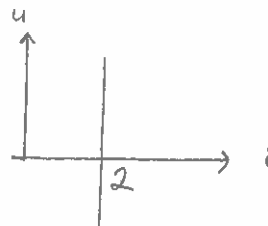
□ Oberoende strömkälla

symbol:



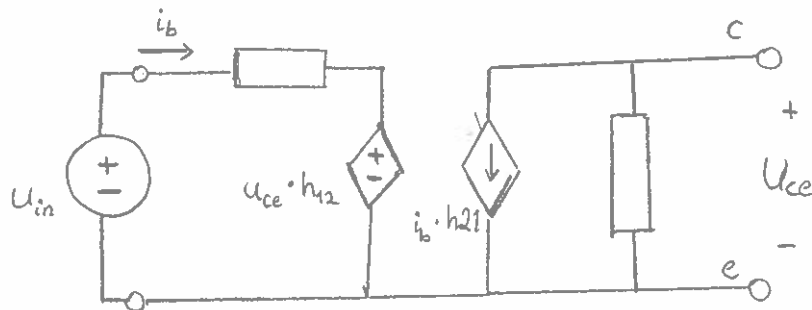
ström  $i_0$ : oberoende av spänning  $u$   
spänning  $u$ : beror på utseendet hos resten av kretsen (måste beräknas)

Ex: om  $i_0 = 2A$  (konstant)



Nollställd ober. strömkälla innebär  $i_0 = 0$ , vilket motsvarar ett avbrutt

Kretsexempel (modell av transistor):

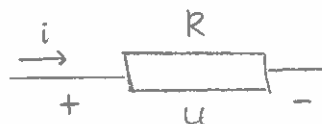


□ Resistens (ideal)

Vi studerar tidsinvarianta och linjära resistanser  
Relation mellan ström och spänning uppfyller Ohms lag

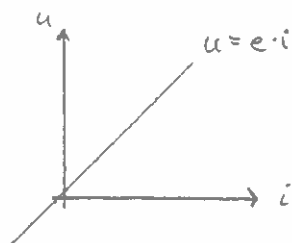
$$u = R \cdot i$$

symbol:



Notera ref. för  
ström och spänning

Karakteristik (R: en konstant)



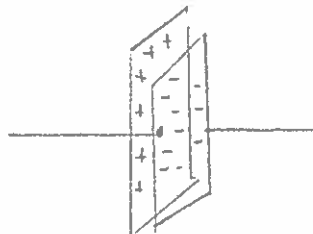
Enhet hos resistans: Ohm [ $\Omega$ ],  $1 \Omega = 1 \frac{V}{A}$   
Konduktans  $G = \frac{1}{R}$  Enhet: Siemens [S]  $1 S = 1 \frac{A}{V}$

□ Capacitans  $C$  (ideal)  
(Tidsinvariant, linjär)

Ett mått på ett kretslements förmåga att lagra energi i form av ett elektriskt fält.

Realiseras med hjälp av en kondensator.

Principiell uppbyggnad



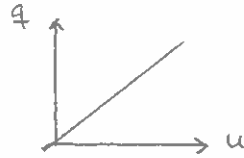
"plattor med dielektrikum emellan"

$$C = \frac{\epsilon \cdot A}{d}$$

A: area  
d: avstånd mellan plattor  
 $\epsilon$ : dielektricitetskonstant

Enhet hos  $C$ : Farad [F]  $1 F = 1 \frac{C}{V}$   
↑  
(Notera: C används här i två olika betydelser)

Samband:  $q = C \cdot u$



Eftersom  $i = \frac{dq}{dt}$ :

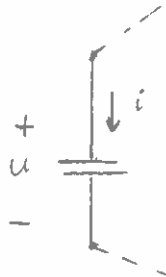
$$\frac{dq}{dt} = i = C \cdot \frac{du}{dt}$$

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

Strömmen är proportionell mot spänningens tidsderivata.  
Om  $u$  är konstant blir  $i = 0$ .

I DC-fallet: kapacitanser betraktas som avbrott

symbol:



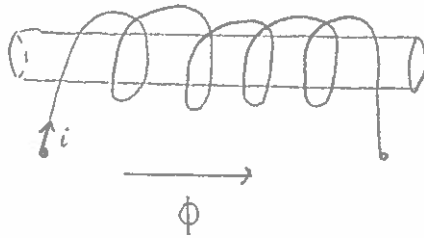
□ Induktans,  $L$  (ideal)

(Tidsinvariant, linjär)

ett mått på ett kretslements förmåga att lagra energi  
i form av ett magnetiskt fält.

Realiseras med hjälp av en spole.

## Principiell uppbyggnad

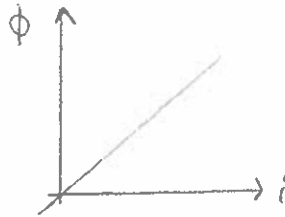


$$L = f(N, d, A, \dots)$$

antal lindningsvarv  $\nearrow$   $N$   
 diameter  $\nearrow$   $d$   
 area  $\nearrow$   $A$

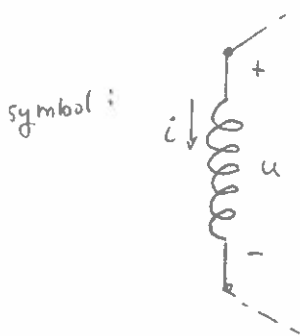
Samband: ( $\Phi$ : magnetiskt flöde)

$$\Phi = L \cdot i$$



Enhet hos induktans:

Henry [H]  $1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$



Vi önskar samband mellan  $u$  och  $i$ . Enligt Faradays induktionslag gäller  $u = \frac{d\Phi}{dt}$  ( $L$  är en konst.)

$$\frac{d\Phi}{dt} = u = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Spänningen är prop. mot strömmens tidsderivata.  
Om  $i(t)$  är konstant  $\Rightarrow u = 0$

I DC-fallet betraktas en induktans som en kortslutning.

I denna kurs behandlas endast kretsar och kretselement som är

- \* linjära (superpositionsprincipen gäller)

- \* tidsinvarianta

- \* icke distribuerade, samt kretsarna har koncentrerade komponenter (lumped circuits)

dvs. våglängden hos sinussignalen i våra kretsar är mycket större än kretsens dimensioner.

Ex. kraftnätet frekvens  $f = 50 \text{ Hz}$   
 $x = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{50} \approx 600 \text{ mil}$



## Kirchhoffs strömlag

KCL (Kirchhoff's Current Law)

I varje nod är summan av alla grenströmmar noll vid alla tidpunkter.

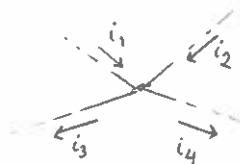
$$\sum_{\text{nod}} i_k = 0$$

OBS! Referensriktningen hos grenström  $i_k$  bestämmer dess tecken.

Alt. 1

	tecken	ref. riktning
$i_k$	+	ut från nod
	-	in mot nod

Ex.



$$-i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

Alt. 2: Man kan göra tvärtom också:  $i_1 + i_2 - i_3 - i_4 = 0$

## Kirchhoffs spänningslag

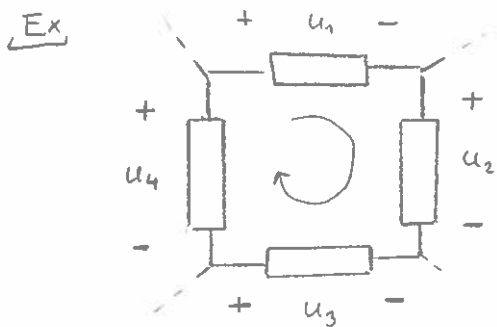
KVL (Kirchhoff's Voltage Law)

I varje slinga är summan av alla grenspänningar noll vid alla tidpunkter.

$$\sum_{\text{slinga}} u_k = 0$$

OBS! Referensriktning (polaritet) bestämmer tecknet på  $u_k$ .

Låt  $u_k$  vara positiv om vi stöter på plustecknet först då slingan genomlöps.



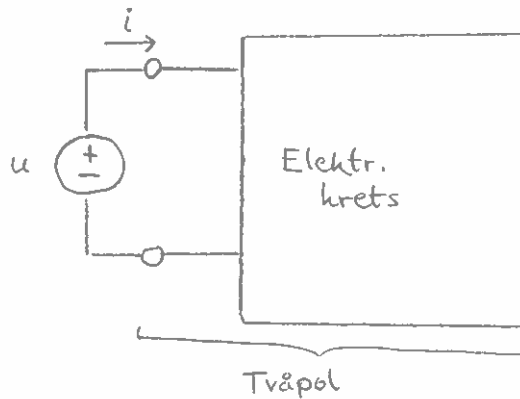
$$u_1 + u_2 - u_3 - u_4 = 0$$

Genomlöpsriktningen är godtycklig ( $-u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0$ )

## Effekt

Ögonblicksvärdet av den effekt som tvåpolen förbrukar definieras som

$$p = u \cdot i$$



$$\left\{ \text{ty } p = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = u \cdot i \right\}$$

↑ energi

OBS! Samordnade referensriktningar i figuren ("ström in vid plus")

Notera: Vi studerar tvåpolen.

Enhet för effekt: Watt [W]  $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$

Tolkning (med samordnade referensriktningar):

$p > 0$ : Tvåpolen förbrukar/upptager effekt

$p < 0$ : Tvåpolen levererar/avger effekt

## Energi

Energien  $W$  som tillförs en krets i tidsintervallet  $t_0 \leq t \leq t_1$

$$W = \int_{t_0}^{t_1} p(\tau) d\tau$$

Enhet för energi: Joule [J]  $1 \text{ J} = 1 \text{ Ws} = 1 \text{ Nm}$

lörd män

## Likströmskretsar (DC-kretsar)

2010-10-26  
Tisdag

Vi behöver endast studera källor och resistanser ty

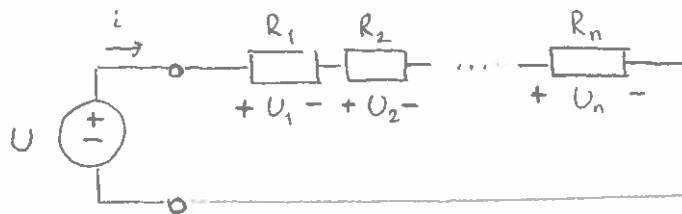
induktans  $\rightarrow$  kortslutning  
kapacitans  $\rightarrow$  avbrott

Beräkningsmetoder, utgå ifrån.

- \* KCL, Kirchhoffs strömlag
- \* KVL — " — spänningslag
- \* Ohms lag

## > Reducering av DC-kretsar

### o Seriekoppling av resistanser

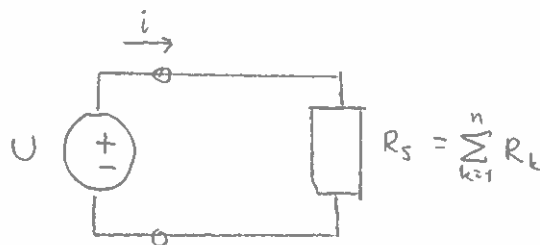


$$\text{KVL: } -U + U_1 + U_2 + \dots + U_n = 0$$

$$u_k = i R_k = i \cdot R_k, \quad k=1, 2, \dots, n$$

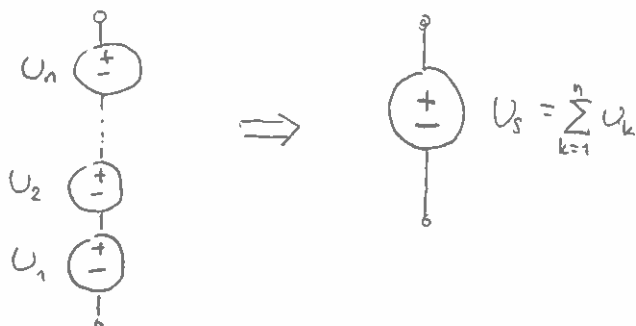
$$U = i \underbrace{(R_1 + R_2 + \dots + R_n)}_{R_s} = i \cdot R_s$$

Reducerad krets:

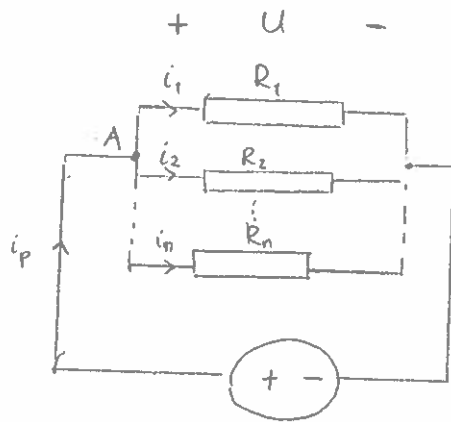


Notera: samma ström genom alla resistanser!

### o Seriekoppling av spänningskällor



- o Parallellkoppling av resistanser



$$i_p = i_1 + i_2 + \dots + i_n \quad (\text{KCL})$$

$$U = R_1 \cdot i_1 = R_k \cdot i_k; \quad k=1, 2, \dots, n$$

$$R_k = \frac{1}{G_k} \quad (G_k \text{ konduktans})$$

$$i_k = \frac{U}{R_k} = U \cdot G_k$$

$$i_p = U(G_1 + G_2 + \dots + G_n) = U \sum_{k=1}^n G_k = U G_p$$

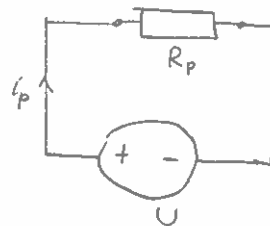
$$U = \frac{i_p}{G_p} = \frac{i_p}{\sum_{k=1}^n G_k} = i_p \cdot R_p$$

$$G_p = \frac{1}{R_p} = \sum_{k=1}^n G_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

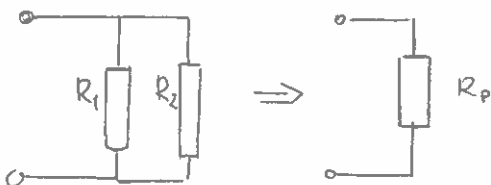
Ekvivalent ersättningsresistans,  $R_p$ , fås genom

$$\boxed{\frac{1}{R_p} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}$$

Vi får:



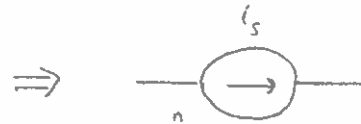
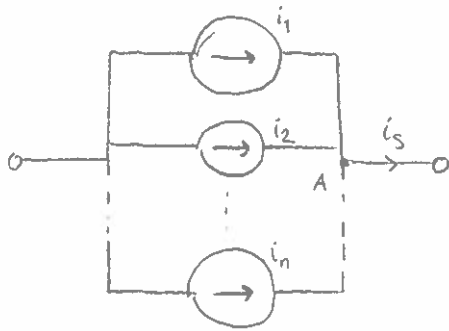
För  $n=2$ :



$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

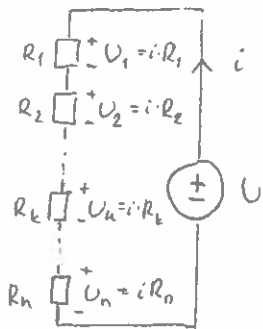
- o Parallellkoppling av strömkällor



$$i_S = \sum_{k=1}^n i_k$$

Fås genom KCL i nod A

### Spänningsdelning



Notera: samma ström genom alla resistanser

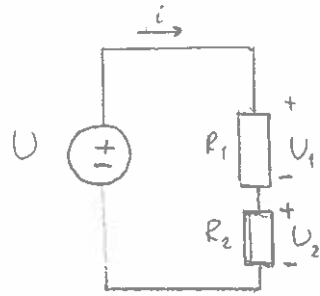
KVL + Ohms lag

$$U = i(R_1 + R_2 + \dots + R_k + \dots + R_n)$$

$$i = \frac{U}{\sum_{j=1}^n R_j}$$

$$U_k = i R_k = U \frac{R_k}{\sum_{j=1}^n R_j}$$

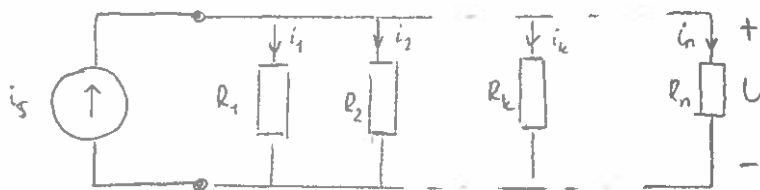
För  $n=2$ :



$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

### Strömdelning



$$R_k = \frac{1}{G_k}$$

$$\begin{array}{l} \text{KCL:} \\ \Omega\text{-lag} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} i_s = i_1 + i_2 + \dots + i_n \\ i_k = \frac{U}{R_k} = U \cdot G_k, \quad k=1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

$$i_s = U(G_1 + G_2 + \dots + G_n) = U \sum_{j=1}^n G_j$$

$\frac{i_k}{G_k} \nearrow$

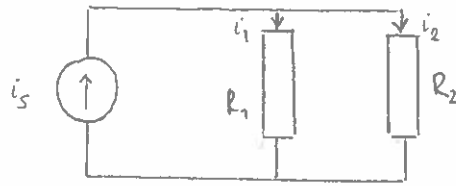
$$i_s = \frac{i_k}{G_k} \cdot \sum_{j=1}^n G_j$$

$$i_k = i_s \cdot \frac{G_k}{\sum_{j=1}^n G_j}$$

Notera: Samma spänning över alla resistanser  $R_k$ .



$n=2$



$$G_1 = \frac{1}{R_1}$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2}$$

$$i_1 = i_s \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2} = i_s \cdot \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = i_s \cdot \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} = i_s \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

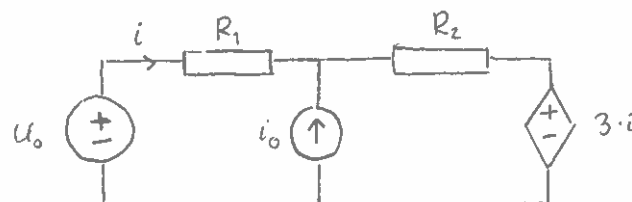
p.s.s. fås  $i_2 = i_s \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

### Superposition

I ett linjärt nät med oberoende källor kan varje grenspänning/grenström beräknas genom att summera bidragen från varje enskild oberoende källa då övriga oberoende källor nollställs.

Om nätet innehåller beroende källor behålls dessa aktiva och tas med i beräkningarna på vanligt sätt.

Exempel:



sök strömmen  $i$ .

Givet:  $i_0 = 7 \text{ A}$

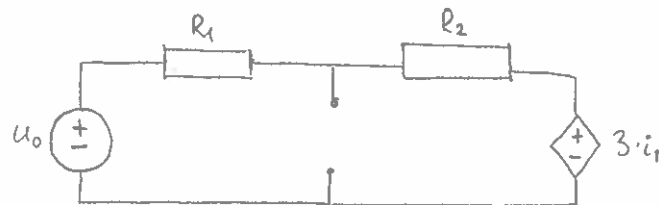
$$R_1 = 3 \Omega$$

$$u_0 = 24 \text{ V}$$

$$R_2 = 2 \Omega$$

Använd superposition

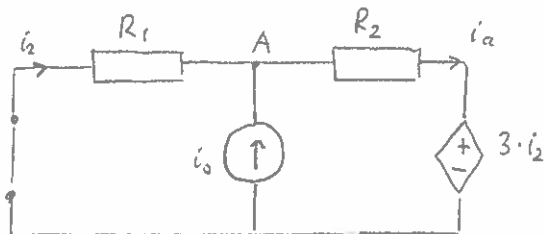
- ① Nollställ strömkällan ( $i_0 = 0$ )  
Sök bidrag från  $u_0$ .



$$\text{KVL: } -u_0 + i_1 R_1 + i_1 R_2 + 3i_1 = 0$$

$$i_1 (R_1 + R_2 + 3) = u_0 \Rightarrow i_1 = \frac{u_0}{R_1 + R_2 + 3} = \frac{24}{3+2+3} = 3 \text{ A}$$

- ② Noll(ställ) spänningskällan ( $u_0 = 0$ )  
Sök bidrag från  $i_0$ .



$$\text{KCL}_A: i_a = i_0 + i_2$$

$$\text{KVL: } i_2 R_1 + (i_0 + i_2) R_2 + 3i_2 = 0$$

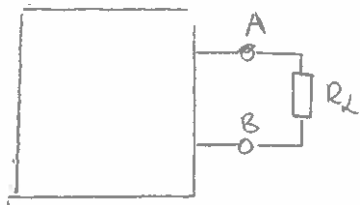
$$i_2 (R_1 + R_2 + 3) = -i_0 R_2$$

$$i_2 = -i_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2 + 3} = \dots = -\frac{7}{4} \text{ A}$$

Slutresultat: Summera bidragen

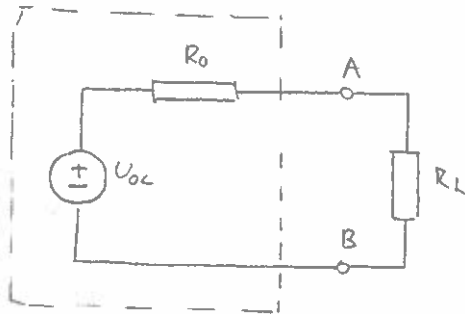
$$i = i_1 + i_2 = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4} \text{ A}$$

## Ekvivalenta tvåpoler

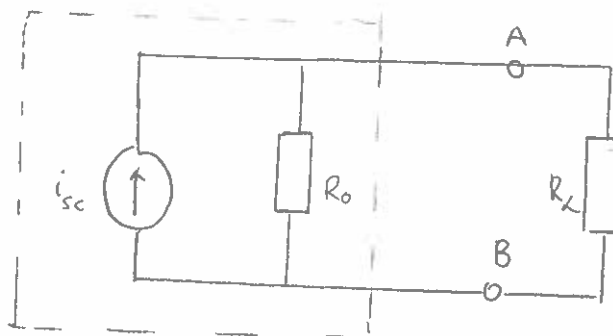


En godtycklig tvåpol  
uppbyggd av oberoende och  
beroende källor samt  
resistanser kan representeras  
av en ekvivalent tvåpol  
enligt...

### Thevenins ekv. tvåpol



### Nortons ekvivalenta tvåpol



$U_{oc}$ : Tomgångsspänning över polerna A-B. ( $R_L = \infty$ )  
(oc: open circuit)

$i_{sc}$ : Kortslutningsström genom A-B ( $R_L = 0$ )  
(sc: short circuit)

$R_0$ : Tvåpolens inresistans sedd från punkterna A-B  
med oberoende källor nollställda.

Samband:

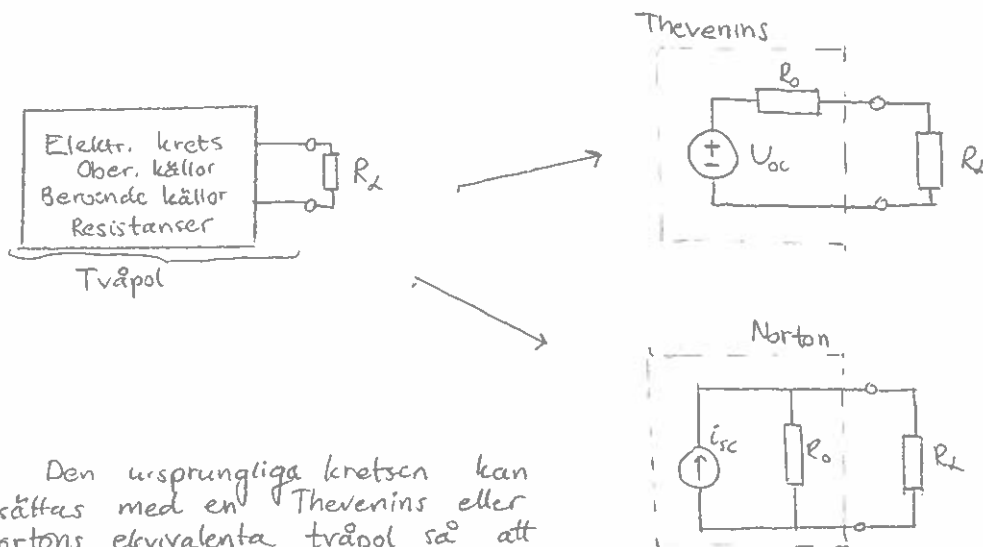
Kortslut Thevenins tvåpol:  $i_{sc} = \frac{U_{oc}}{R_0}$

Tomg. sp. i Nortons tvåpol:  $U_{AB} = U_{oc} = i_{sc} \cdot R_0$

/end tss

### Ekvivalenta tvåpoler

2010-10-27  
Onsdag



Den ursprungliga kretsen kan ersättas med en Thevenins eller Nortons ekvivalenta tvåpol så att dess inverkan utåt på den övriga kretsen blir helt ekvivalent.

Då måste tomgångsspänningen  $U_{oc}$  och kortslutsströmmen  $i_{sc}$  i de ekvivalenta kretsarna vara lika.

Samband:  $U_{oc} = R_0 \cdot i_{sc}$

Beräkningsgång <sup>välj</sup> ("2 av 3")

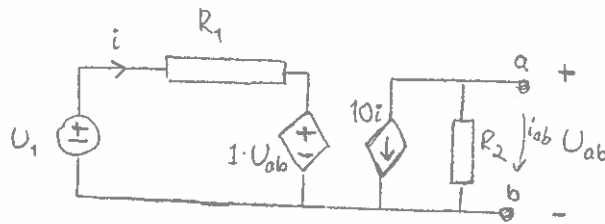
- \* Beräkna tomgångsspänning,  $U_{oc}$  (obelastad tvåpol,  $R_x = \infty$ )
- \* Kortslut vid polerna och beräkna kortslutningsströmmen,  $i_{sc}$
- \* Beräkna  $R_0$ , resistans sedd in från polerna med oberoende källor nollställda.

Exempel:

$$R_1 = 500 \, \Omega$$

$$R_2 = 25 \, \Omega$$

$$U_1 = 5 \, \text{V}$$



Sök Nortons ekvivalenta tvåpol m.a.p. polerna a och b.

□ Beräkna kortslutningsströmmen,  $i_{sc}$

$$i_{ab} = -10i \quad (\text{Ingen ström genom } R_2 \text{ ty } U_{ab} = 0)$$

$$\text{KvL: } -U_1 + iR_1 + U_{ab} = 0 \Rightarrow i = \frac{U_1}{R_1} = \frac{5}{500} = 0,01 \, \text{A} = 10 \, \text{mA}$$

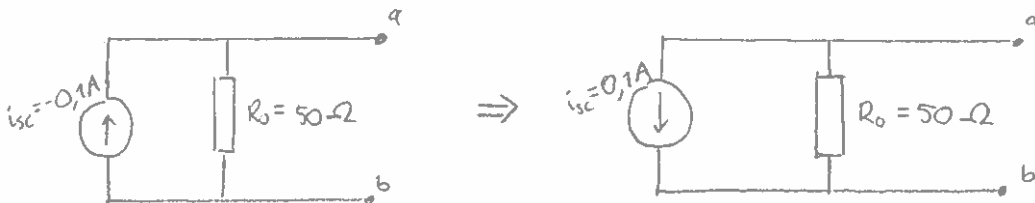
$$i_{ab} = i_{sc} = -10i = -0,1 \, \text{A}$$

□ Beräkna tomgångsspänning  $U_{ab} = U_{oc}$

$$\text{Ohms lag: } \begin{cases} U_{ab} = -10i \cdot R_2 \\ \text{KvL: } -U_1 + iR_1 + U_{ab} = 0 \end{cases}$$

$$i = -\frac{U_{ab}}{10R_2}, \quad -\frac{U_{ab}}{10R_2} \cdot R_1 + U_{ab} = U_1$$

$$U_{ab} = \frac{U_1}{1 - \frac{R_1}{10R_2}} = \dots = -5 \, \text{V} = U_{oc}, \quad R_0 = \frac{U_{oc}}{i_{sc}} = \frac{-5}{-0,1} \left[ \frac{\text{V}}{\text{A}} \right] = 50 \, \Omega$$



## AC-kretsar

Vi studerar sinusformad signal (ström och spänning).

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \phi)$$

$y(t)$  bestäms helt av param.  $Y_m, \omega, \phi$

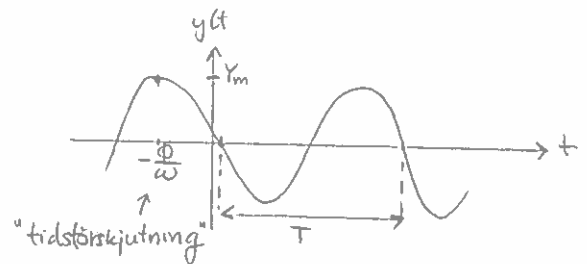
$y(t)$ : ögonblicksvärde vid tidpunkten  $t$

$Y_m$ : amplitud

$\omega$ : vinkelfrekvens r/s

$\phi$ : fasvinkel

$T$ : periodtid  $y(t) = y(t+T), \forall t$

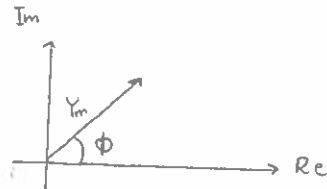


$$T = \frac{1}{f} ; T = \frac{2\pi}{\omega} ; 2\pi \cdot f = \omega$$

Signalen  $y(t)$  kan representeras av ett komplext tal, en visare

$$Y = Y_m e^{i\phi}$$

Grafiskt:



Förenklat skrivsätt

$$Y = Y_m \angle \phi = Y_m e^{i\phi}$$

Samband mellan  $y(t)$  och  $Y$ :

$$\begin{aligned} \underline{y(t)} &= \underline{\operatorname{Re}\{Y e^{i\omega t}\}} = \operatorname{Re}\{Y_m e^{i\phi} e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{Y_m e^{i(\phi + \omega t)}\} = \\ &= \operatorname{Re}\{Y_m \cos(\phi + \omega t) + i Y_m \sin(\omega t + \phi)\} = Y_m \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$



Elektriska växelströmskretsar kan beskrivas med ordinära linjära diff. ekvationer med reella och konstanta koefficienter.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

$y$  är sökt ström eller spänning.

$H_k$ : bestäms av ober. källor i kretsen

Summan av ett godtyckligt antal sinusformade signaler, alla med vinkel frekvensen  $\omega$ , och deras derivator av godtycklig ordning, är också en sinusformad signal med vinkel frekvensen  $\omega$ .

$v_L$ : är också en sinusformad signal

Lösningen "reduceras" till att finna amplitud och fas hos signalen  $y(t)$  [partikulärlösning, stationärlösning]

Använd  $j\omega$ -metoden!

2010-10-29  
Fredag

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\underline{y(t)} = \underline{\text{Re} \{ Y e^{j\omega t} \}}$$

Transformering av derivator:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \{ \text{Re} [ Y e^{j\omega t} ] \} = \text{Re} \{ Y j\omega e^{j\omega t} \}$$

$$y(t) \Leftrightarrow Y$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \Leftrightarrow j\omega Y$$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (j\omega)^n Y$$



Transformera diff.ekv.

$$[a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1j\omega + a_0]Y = X_m \angle \varphi$$

$$Y = \frac{X_m \angle \varphi}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1j\omega + a_0} = Y_m \angle \varphi \quad \text{vilket ger } y(t) = Y_m \cos(\omega t + \Phi)$$

j $\omega$ -metoden  
(växelströmskretsar)

Kretselement

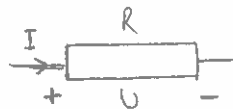


Ohms lag  $u(t) = R i(t)$   
Representera ström och spänning med komplexa visare

$$u(t) \Leftrightarrow U$$

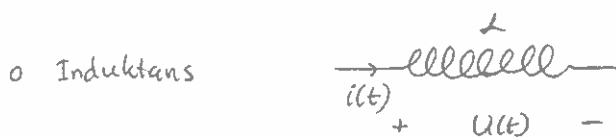
$$i(t) \Leftrightarrow I$$

Ekvationen  $U = R \cdot I$

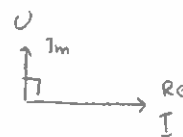
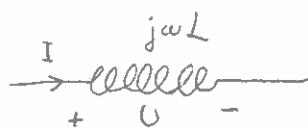


Ström och spänning  
ligger i fas

$$\vec{I} \rightarrow U \rightarrow \text{Re}$$

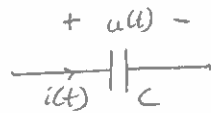


$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$  Med visarrepresentation  $U = j\omega L \cdot I$



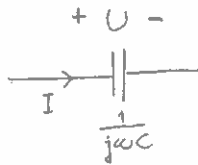
"Spänning 90°  
före strömmen"

o Kapacitans

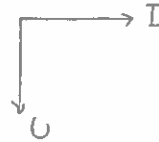


$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

Med visarrepr.  $I = Cj\omega U \Rightarrow U = \frac{1}{j\omega C} \cdot I$



Visardagram:



Ström ligger  $90^\circ$  före spänningen

Inför begreppet impedans (z) där  $U = Z \cdot I$  Ohms lag för växelström  
Dimension hos impedans: [Ohm]

### Källor

Alla källor är sinusformade med samma vinkelfrekvens  $\omega$ .

Ex  $u_o(t) = U_{om} \cos(\omega t + \Phi_1) \Rightarrow U_o = U_{om} \angle \Phi_1$   
 $i_o(t) = I_{om} \cos(\omega t + \Phi_2) \Rightarrow I_o = I_{om} \angle \Phi_2$

### Beräkningsmetod

Transformera nätet till komplex form. Analysera med samma metoder som för likströmsnät.

\* KVL

\* KCL

\* Ohms lag för växelström  $U = Z \cdot I$

## KVL och jw-metoden

För en sluten slinga i en krets

$$u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_n(t) = 0, \quad \forall t$$

Endast stationära sinusformade spänningar med samma vinkelrek.

$$U_{m1} \cos(\omega t + \theta_1) + U_{m2} \cos(\omega t + \theta_2) + \dots + U_{mn} \cos(\omega t + \theta_n) = 0$$

$$\operatorname{Re} \{ U_{m1} e^{j(\omega t + \theta_1)} \} + \dots + \operatorname{Re} \{ U_{mn} e^{j(\omega t + \theta_n)} \} = 0$$

$$\operatorname{Re} \{ [U_{m1} e^{j\theta_1} + \dots + U_{mn} e^{j\theta_n}] e^{j\omega t} \} = 0$$

$$\operatorname{Re} \{ \underbrace{[U_1 + U_2 + \dots + U_n]}_{=0} e^{j\omega t} \} = 0 \quad \forall t$$

Alltså måste

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = 0 \quad (\text{KVL med visarrepr.})$$

På motsvarande sätt visas KCL för jw-metoden

$$I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0 \quad \text{i en nod, där}$$

$$i_k(t) = I_{mk} \cos(\omega t + \phi_k) \quad \text{och} \quad i_k(t) \Leftrightarrow I_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

## Impedans $Z$

I likhet med Ohms lag för resistanser definierar vi impedans enligt

$$U = Z \cdot I$$

$$Z = \frac{U}{I}$$

$$U \Rightarrow u(t) \\ I \Rightarrow i(t)$$

$$U = U_m \angle \phi_u$$

$$I = I_m \angle \phi_i$$

$$Z = \frac{U_m \angle \phi_u}{I_m \angle \phi_i} = \frac{U_m}{I_m} \angle \phi_u - \phi_i$$

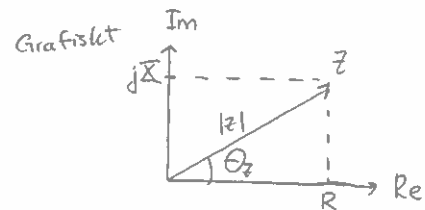
$$|Z| = \frac{U_m}{I_m}$$

$$\arg\{Z\} = \phi_u - \phi_i = \phi_Z$$

$Z$  transformeras inte tillbaka till tidsdomänen (saknar mening), endast ström och spänning.

$$Z = |Z| \angle \phi_Z = R + jX$$

$R$ : resistans  
 $X$ : reaktans



## Admittans $Y$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{|Z| \angle \phi_Z} = \frac{1}{|Z|} \angle -\phi_Z$$

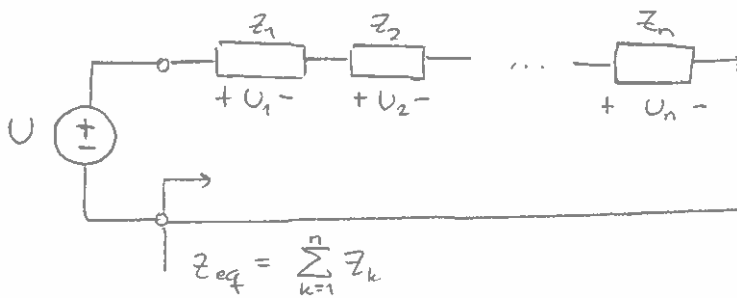
$$|Y| = \frac{1}{|Z|}$$

$$Y = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = G + jB$$

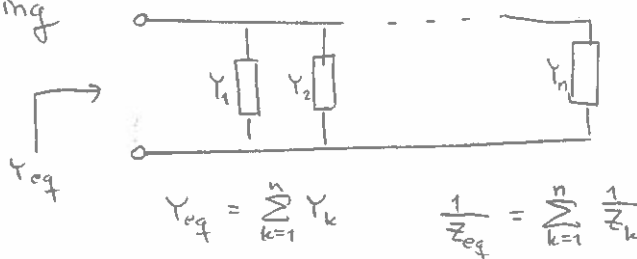
$G$ : konduktans  
 $B$ : susceptans

Dim  $[Y]$ : Siemens  $[S]$

## Seriökoppling av impedanser



## Parallellkoppling



Eftersom följande samband gäller för växelströmskretsar efter transformering enligt jw-metoden

$$KV\check{L}, KCL, U = ZI$$

kan följande metoder för DC-nät appliceras även på AC-nät med användning av jw-metoden:

Maskanalys

Nodanalys

Spänningsdelning

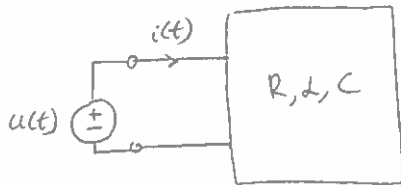
Strömdelning

Ekvivalenta tvåpoler (Norton, Thevenin)

Superposition

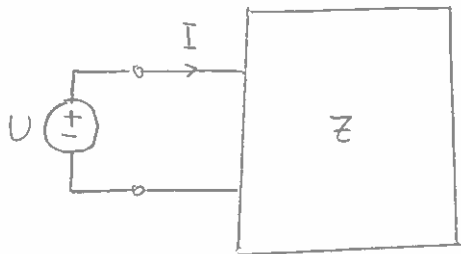
$\Delta$ -Y transformation

## Passiv tvåpol



En elektrisk krets uppbyggd av krets-elementen  $R$ ,  $L$  och  $C$ .

Transformera med  $j\omega$ -metoden.

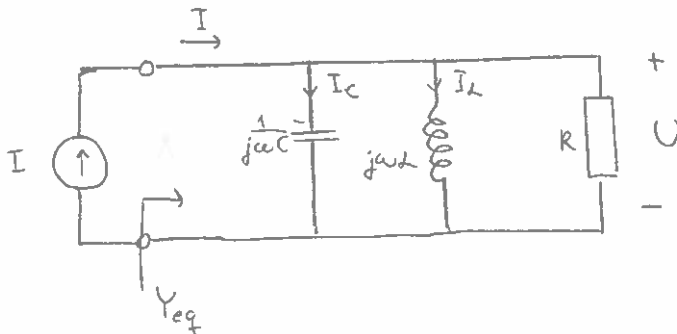


Impedans  $Z = \frac{U}{I}$

$Z = Z(j\omega)$ : Frekvensberoende

Egenskaperna hos en passiv tvåpol belyses ofta med  $|Z|$  och  $\arg\{Z\}$  som funktion av vinkelfrekvensen  $\omega$ .

## Resonanskretsar (parallell)



$$Y_{eq} = Y = \sum_{k=1}^n Y_k = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{R} = G$$

$$Y = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\operatorname{Re}\{Y\} = \text{konst.}$$

$$\operatorname{Im}\{Y\} = B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L}$$

$$B = 0 \text{ för } \omega = \omega_0$$

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Vi har resonans vid  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , dvs.  $\operatorname{Im}\{Y\} = 0$

Beräkna strömmar:

$$I_C = U \cdot j\omega C = \left\{ \omega = \omega_0 \right\} = jU \cdot \frac{C}{\sqrt{LC}} = jU\sqrt{\frac{C}{L}}$$

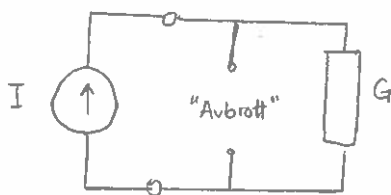
$$I_L = U \frac{1}{j\omega L} = \left\{ \omega = \omega_0 \right\} = -jU \frac{\sqrt{LC}}{L} = -jU\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Notera:  $I_C \neq 0$ ,  $I_L \neq 0$  och att  $I_C = -I_L$

$$\text{KCL: } I = \underbrace{I_C + I_L}_{=0} + I_R = I_R$$

$I_L$  och  $I_C$  kan vara betydligt större än  $I$ .  $I_L$  och  $I_C$  är lika stora till belopp men är ur fas med  $180^\circ$ .

Ekv. krets utifrån sett







ström  
DC, AC

Spänning

Elektriska nät  
nod, kretselement, maska, slinga, gren  
Referensriktningar

Kretselement  
oberoende spänningskälla  
beroende spänningskälla  
oberoende strömkälla  
resistens  
capacitans  
induktans

Kirchhoffs strömlag  
Kirchhoffs spänningslag

s. 14

Effekt  
tväpol  
Energi

Likströmskretsar  
seriekoppling, parallellkoppling  
Spänningsdelning, Strömdelning  
Superposition

s. 17

s. 20

Ekvivalenta tväpolar:  
Thevenin och Norton

s. 24

AC - kretsar  
jw-metoden

s. 30

Impedans  $Z$

s. 33

Passiv tväpol  
Resonanskretsar

Lv2

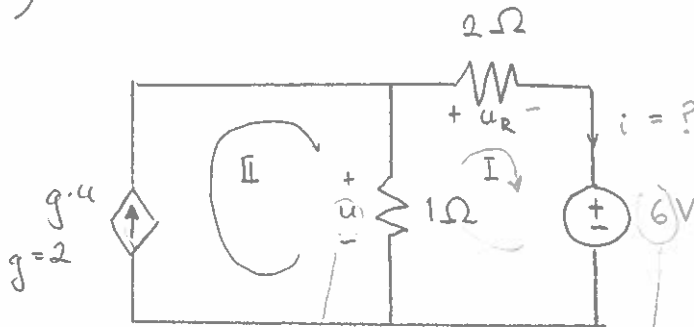
Elektriska nät och system

med Ants Silberberg  
Hamid

[ ESS 115 ]



2.2)

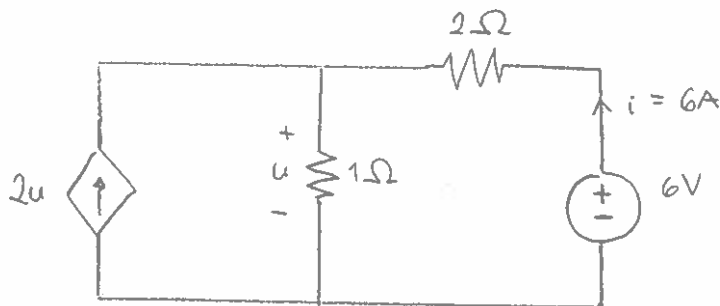


$$\text{I) } -u + 2i + 6 = 0 \quad \leftarrow \text{KVL}$$

$$\text{II) } u = 1 \cdot (2u - i) \quad \leftarrow \text{Ohm's law} \quad \rightarrow \quad \boxed{u = i}$$

$$-i + 2i = -6$$

$i = -6 \text{ A}$
$u = -6 \text{ V}$

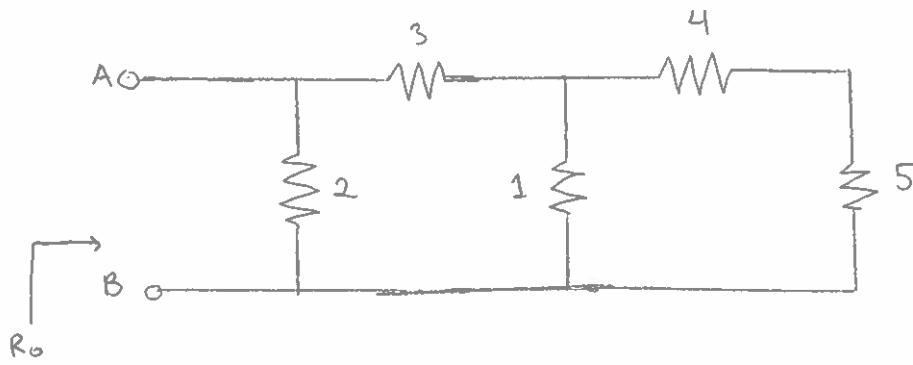


$$3.1) \quad P = V \cdot I \quad \text{reduced}$$

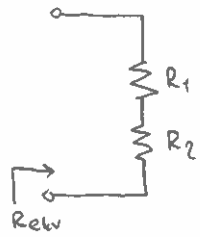
$$P = (-u) \cdot 2u = -2u^2 = -2(-6)^2 = -72 \text{ Watt}$$

Current source delivers 72 W to the circuit.

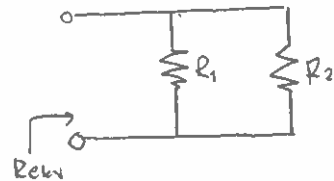
4.1)



Series



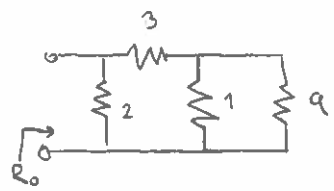
$$R_{ekv} = R_1 + R_2$$



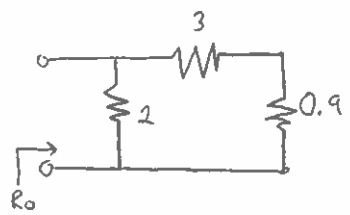
$$\frac{1}{R_{ekv}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

if  $R_1 \gg R_2 \Rightarrow R_{ekv} = R_2$

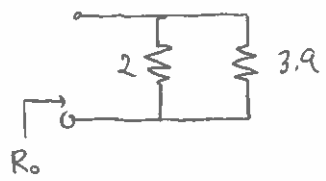
$$R_{ekv1} = 4 + 5 = 9$$



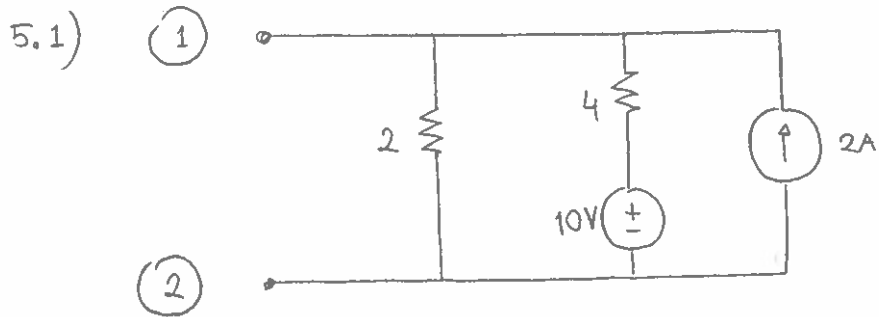
$$R_{ekv2} = \frac{1 \cdot 9}{1 + 9} = 0.9 \Omega$$



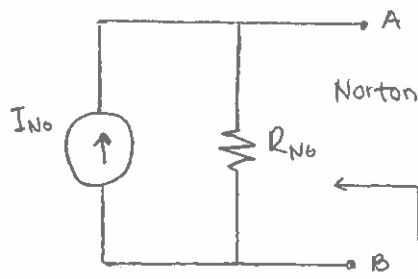
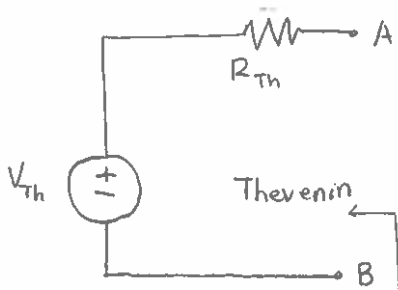
$$R_{ekv3} = 3 + 0.9 = 3.9 \Omega$$



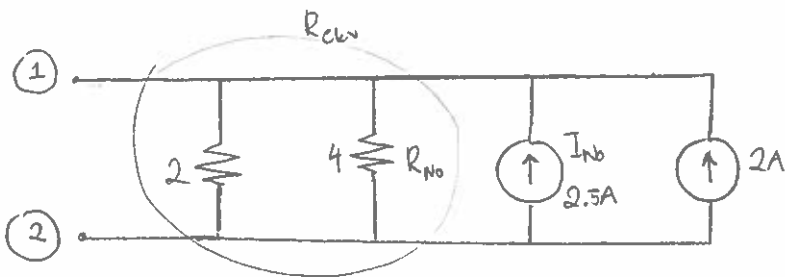
$$R_0 = \frac{2 \cdot 3.9}{2 + 3.9} = 1.32 \Omega$$



Determine Thevenin equivalent!

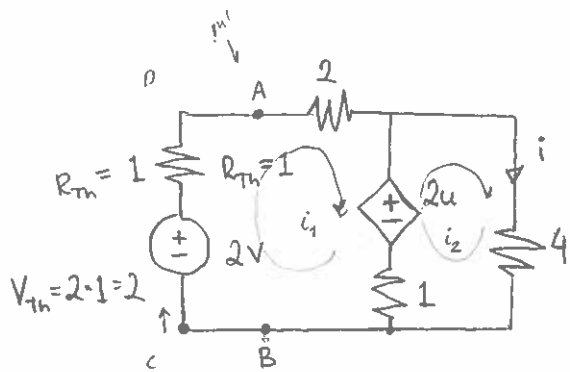
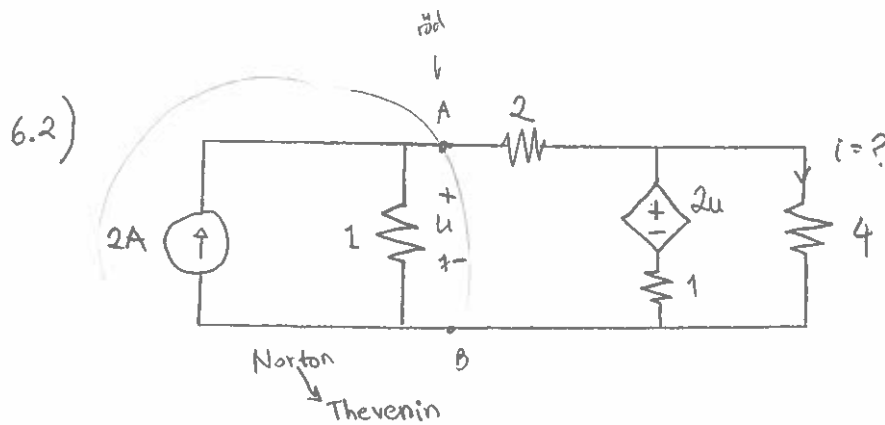
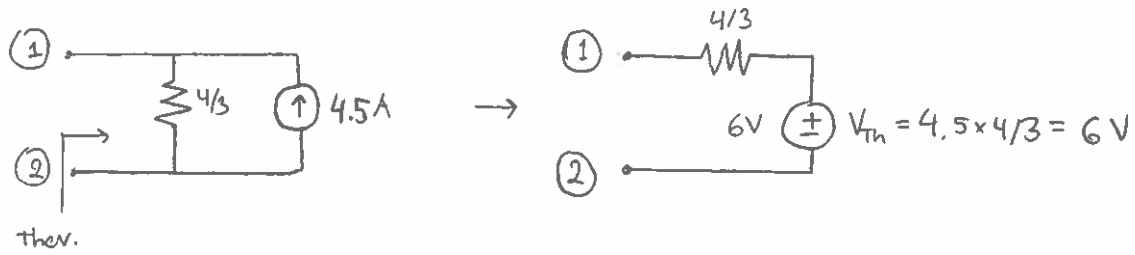


$$R_{Th} = R_{No} \quad V_{Th} = I_{No} \cdot R_{No} \quad I_{No} = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}$$



$$I_{No} = \frac{10}{4} = 2.5A$$

$$R_{No} = \frac{2 \cdot 4}{2+4} = \frac{4}{3} \Omega$$



$$\begin{cases} -2 + i_1 + 2i_1 + 2u + 1(i_1 - i_2) = 0 \\ 1(i_2 - i_1) - 2u + 4i_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4i_1 - i_2 = 2 - 2u \\ -i_1 + 5i_2 = 2u \end{cases}$$

APRO:  $-2 + i_1 + u = 0 \Rightarrow u = 2 - i_1$

$$\begin{cases} 4i_1 - i_2 = 2 - 4 + 2i_1 \\ -i_1 + 5i_2 = 4 - 2i_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2i_1 - i_2 = -2 \\ i_1 + 5i_2 = 4 \end{cases}$$

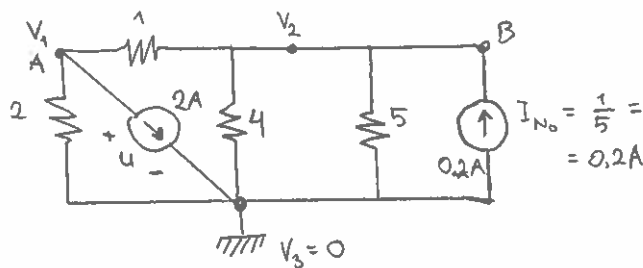
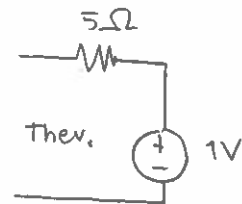
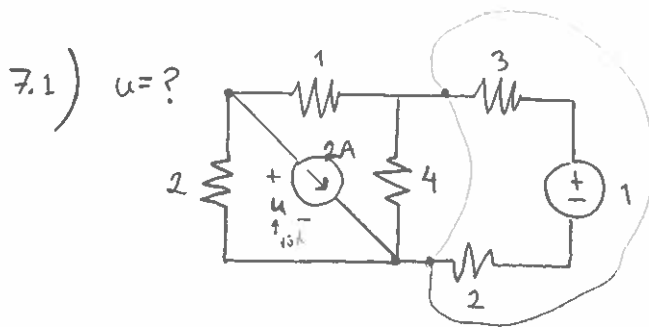
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}}_C$$

$$AB = C \Rightarrow B = CA^{-1} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\det A = 10 - (-1) = 11 \quad A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/11 & 1/11 \\ -1/11 & 2/11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/11 & 1/11 \\ -1/11 & 2/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10/11 + 4/11 \\ 2/11 + 8/11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.54 \text{ A} \\ 0.91 \text{ A} \end{bmatrix}$$

$$i = i_2 = 0.91 \text{ A}$$



$$\begin{cases} \frac{V_1 - 0}{2} + 2 + \frac{V_1 - V_2}{4} = 0 \quad (\text{KCL nod A}) \\ \frac{V_2 - V_1}{4} + \frac{V_2 - 0}{5} + \frac{V_2 - 0}{5} - 0.2 = 0 \quad (\text{B}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3/2 V_1 - V_2 = -2 \\ -V_1 + (1 + 1/4 + 1/5) V_2 = 0.2 \end{cases} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5 & -1 \\ -1 & 1.45 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

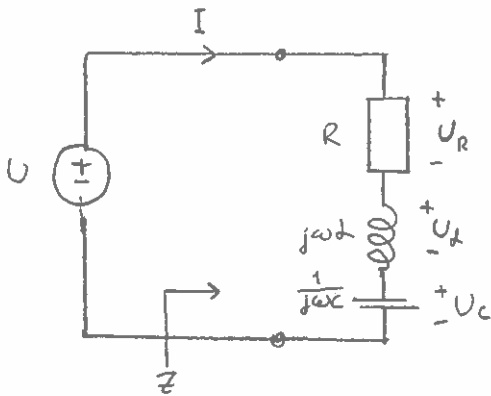
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.23 & 0.85 \\ 0.85 & 1.28 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.23 & 0.85 \\ 0.85 & 1.28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.29 \text{ V} \\ -1.46 \text{ V} \end{bmatrix}$$

$$u = V_1 \approx -2.30 \text{ V}$$



(med Ants)

## Serieresonanskrets



Impedans  $Z$

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \arg\{Z\} = \arctan \frac{X}{R}$$

Vid  $\omega = \omega_0$  sägs kretsen vara i resonans.

Def:  $\text{Im}\{Z\} = 0$  dvs.  $Z$  rent reellt

$$Z(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_0} = R \quad \text{och} \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\omega_0$ : resonansvinkelfrekvensen

$$U_L = I \cdot j\omega L = \left\{ \omega = \omega_0 \right\} = jI \frac{1}{\sqrt{LC}} = jI \sqrt{\frac{L}{C}}$$

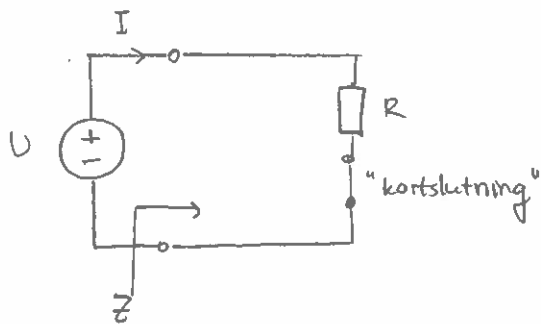
$$U_C = I \cdot \frac{1}{j\omega C} = \left\{ \omega = \omega_0 \right\} = -jI \frac{\sqrt{LC}}{C} = -jI \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Notera!  $U_L \neq 0$ ,  $U_C \neq 0$  samt  $U_L = -U_C$ ,  $U_L + U_C = 0$

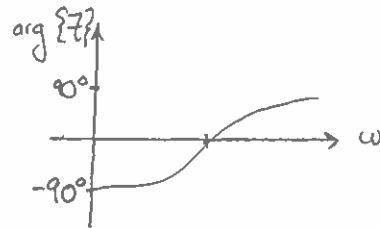
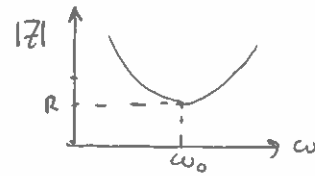
$U_L$  och  $U_C$  lika stora till belopp men ur fas med  $180^\circ$

$U_L$  och  $U_C$  kan vara betydligt större än  $U$ .

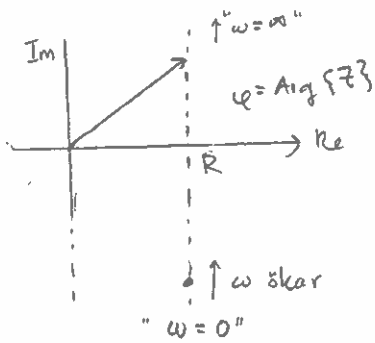
Ekvivalent krets (utifrån sett)



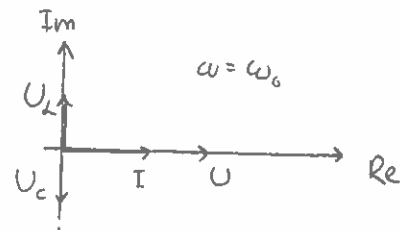
Grafisk beskrivning



Eller med visardiaqram



Vid resonansvinkelfrekvensen



Kvalitetsmått för resonanskretsar

"  $Q = 2\pi \cdot \frac{\text{lagrad energi}}{\text{energi förluster}}$  "

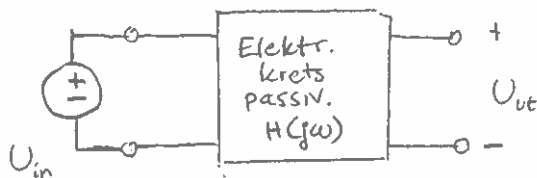
Läs på egen hand i Davidsson.

## Överföringsfunktion

Begreppet överföringsfunktion (frekvenssvar) används mycket.  
Beteckning  $H(j\omega)$

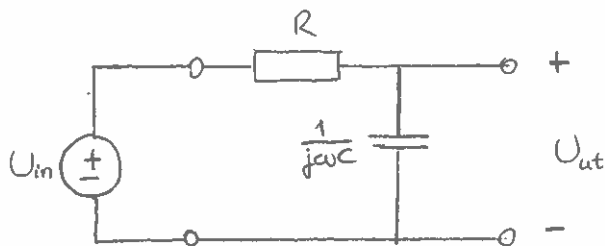
$$\text{Def: } H(j\omega) = \frac{\text{Utsignalens visare}}{\text{Insignalens visare}}$$

Om in- och utsignal är spänningar



$$H(j\omega) = \frac{U_{\text{ut}}}{U_{\text{in}}}$$

Exempel



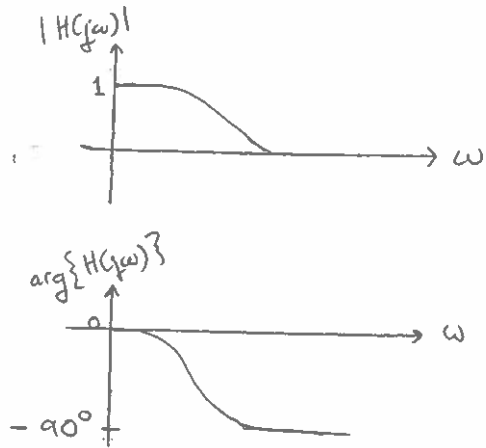
$$U_{\text{ut}} = U_{\text{in}} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{U_{\text{in}}}{1 + j\omega RC}$$

$$\frac{U_{ut}}{U_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = H(j\omega)$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

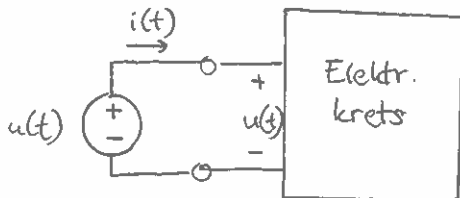
$$\arg\{H(j\omega)\} = -\arctan(\omega RC)$$

"Lågpassfilter"



## Växelströmseffekt

(stationära växelströmskretsar studeras)

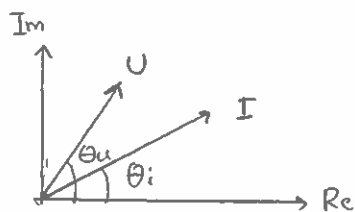


Notera: samordnade referensriktningar  
Kretsen mottager effekten  
 $p(t) = u(t) i(t)$  "ögonblicksvärde"

Vid sinusformad växelström

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_u) \quad V \Rightarrow U$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_i) \quad A \Rightarrow I$$



Låt strömmen utgöra riktfas (ref. fas = 0)  
 $i(t) = I_m \cos(\omega t)$  [Ström max för  $t=0$ ]  
 $u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_u - \theta_i)$

$$p(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \theta_u - \theta_i) \cos(\omega t) \quad \left[ \cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) \right]$$

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\theta_u - \theta_i) + \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \theta_u - \theta_i)$$

$$\left[ \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \right]$$

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\theta_u - \theta_i) + \frac{U_m I_m}{2} \cos(\theta_u - \theta_i) \cos(2\omega t) - \frac{U_m I_m}{2} \sin(\theta_u - \theta_i) \sin(2\omega t)$$

Skriv om som

$$p(t) = P + P \cos(2\omega t) - Q \sin(2\omega t)$$

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\theta_u - \theta_i) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Medeleffekt} \\ \text{Aktiv effekt} \end{array} \right.$$

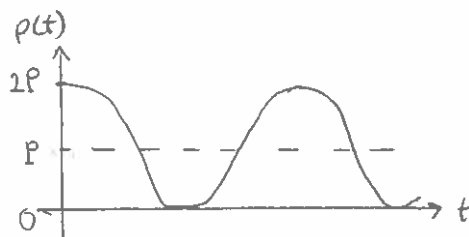
$$Q = \frac{1}{2} U_m I_m \sin(\theta_u - \theta_i) \quad \text{Reaktiv effekt}$$

### Momentan effekt

□ Resistiv krets:

ström och spänning ligger i fas:  $\theta_u - \theta_i = 0$

$$p(t) = P + P \cos(2\omega t)$$

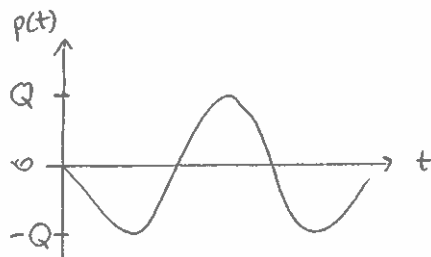


Tidsmedelvärde:  $P$

□ Rent induktivt krets

spänning ligger  $90^\circ$  före ström,  $\theta_u - \theta_i = 90^\circ$

$$p(t) = -Q \sin 2\omega t \quad (Q = \frac{1}{2} U_m I_m > 0)$$

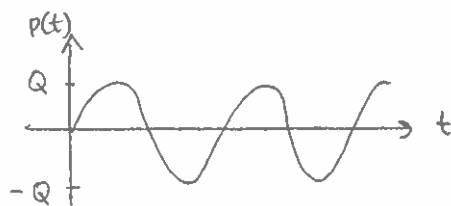


Tidsmedelvärde = 0

□ Rent kapacitiv krets

"ström ligger  $90^\circ$  före spänning"  $\theta_u - \theta_i = -90^\circ$

$$p(t) = -Q \sin(2\omega t) \quad (Q = -\frac{1}{2} U_m I_m < 0)$$



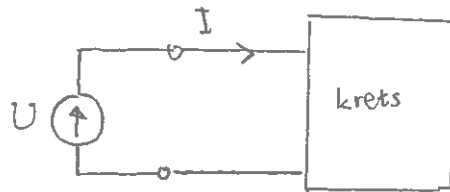
Tidsmedelvärde = 0

$\cos \varphi = \cos(\theta_u - \theta_i)$  : kallas effektfaktorn

## Komplex effekt S

(beräkning med jw-metoden)

$$S = P + jQ$$



$$\text{med } U = U_m \angle \theta_u$$

$$I = I_m \angle \theta_i$$

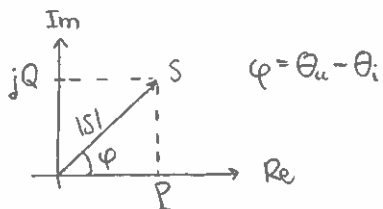
Vi kan beräkna komplex effekt som

$$S = \frac{1}{2} UI^* = \frac{1}{2} U_m \angle \theta_u I_m \angle -\theta_i = \frac{1}{2} U_m I_m \angle \theta_u - \theta_i =$$

$$= \frac{1}{2} U_m I_m e^{j(\theta_u - \theta_i)} = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\theta_u - \theta_i) + j \frac{1}{2} U_m I_m \sin(\theta_u - \theta_i) = P + jQ$$

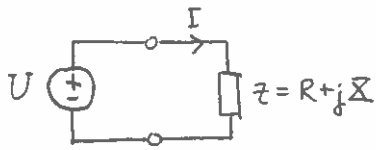
Dimensioner:  $S: [VA]$ ,  $P: [W]$ ,  $Q: [VA_r]$  ↙ reaktiv effekt

Effekt triangel



$$|S| = \frac{1}{2} U_m I_m : \text{synbar effekt}$$

Ex. För en passiv tvåpol



$$[ I^* = I\text{-konjugat} ]$$

$$S = \frac{1}{2} UI^* = \{ U = ZI \} = \frac{1}{2} Z I I^* = \frac{1}{2} Z |I|^2 = \frac{1}{2} (R + jX) |I|^2 = \\ = \frac{1}{2} R |I|^2 + j \frac{1}{2} X |I|^2 = P + jQ$$

eller

$$S = \frac{1}{2} UI^* = \left\{ I^* = \frac{U^*}{Z^*} \right\} = \frac{1}{2} U U^* \frac{1}{Z^*} \cdot \frac{Z}{Z} = \frac{1}{2} \frac{|U|^2}{|Z|^2} Z = \\ = \frac{1}{2} \frac{|U|^2}{|Z|^2} (R + jX) = P + jQ$$

/end mån

### Effektivvärde

2010-11-2  
Tisdag

Om effektivvärde används för ström och spänning försvinner " $\frac{1}{2}$ " i effektformlerna och "likhet" med DC-fallet erhålls.

För en ström  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha)$  fås effektivvärdet

$$I_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \dots = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ perioden}$$

Motsvarande för en spänning

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \beta) \quad \text{fås} \quad U_e = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$



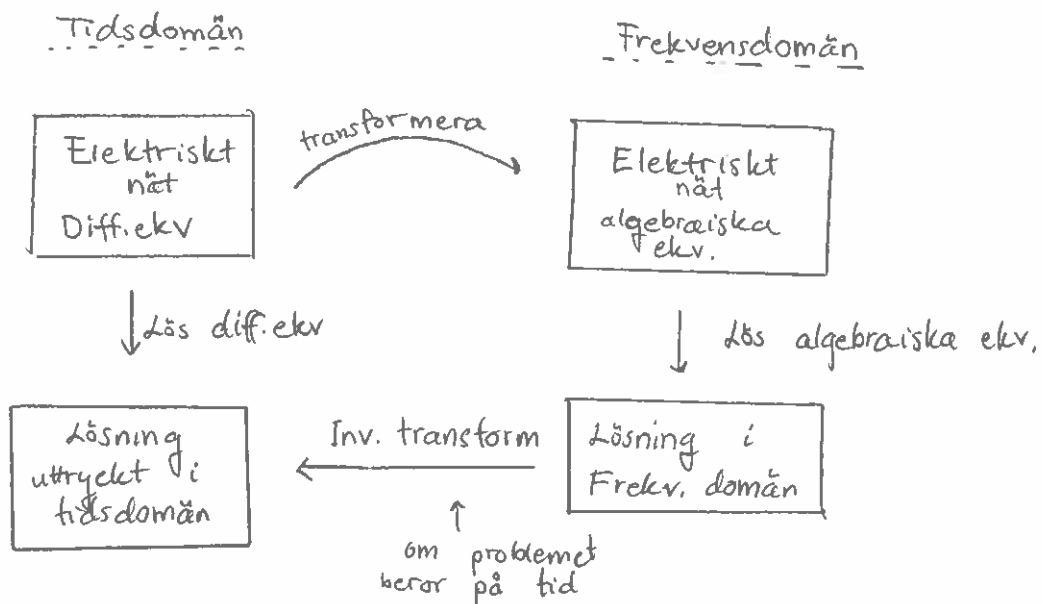
Effektformlerna (för en passiv tvåpol)

$$P = R I_e^2 \quad Q = \sum I_e^2$$

Allmänt:  $\frac{U_m I_m}{2}$  byts mot  $U_e I_e$ .

Vår mätspänning (220V) är ett effektivvärde.

## Transformmetoden



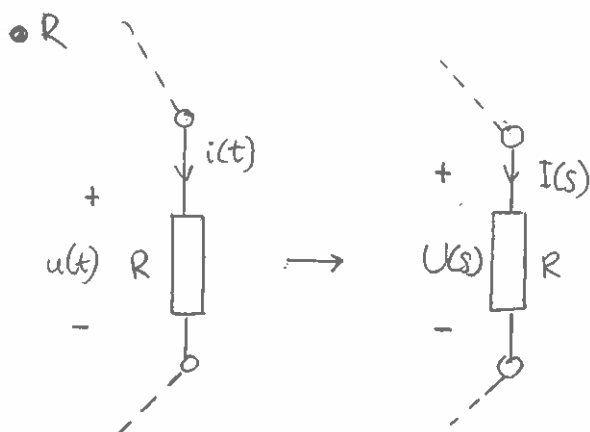
## Laplacetransform (enkelsidig)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s) \subset f(t)$$

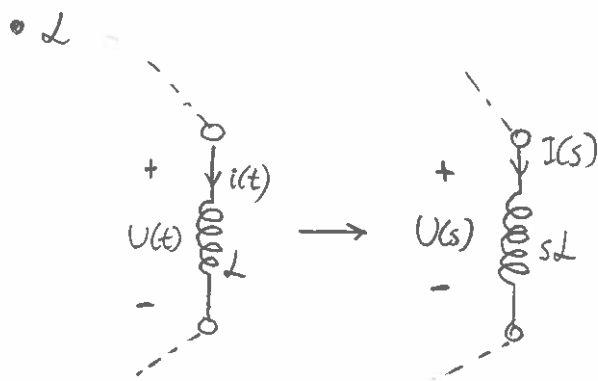
$$s = \sigma + j\omega \quad (\text{komplex frekvens variabel})$$

I likhet med  $j\omega$ -metoden transformerar vi kretsen direkt genom att transformera varje kretselement och källor för sig. Därefter startar beräkningarna. De beräkningsmetoder som använts för DC-nät och stationära AC-nät gäller även för Laplacetransf. nät.

## Nät utan begynnelseenergi



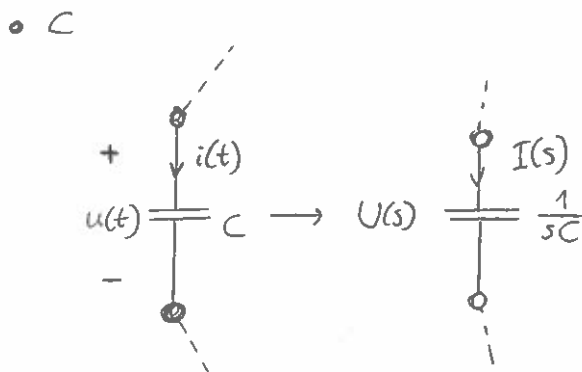
$$\begin{aligned} i(t) &\supset I(s) \\ u(t) &\supset U(s) \\ u(t) &= R \cdot i(t) \\ U(s) &= R \cdot I(s) \end{aligned}$$



$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow sI(s) - \underbrace{i(0)}_{=0 \text{ ty ingen beg. energi}}$$

$$U(s) = sL I(s)$$



$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

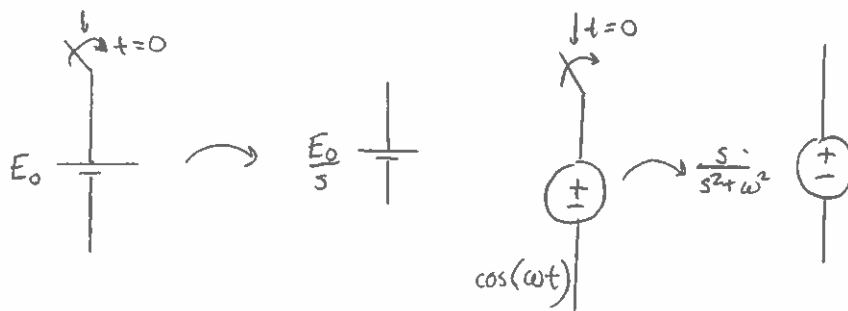
$$I(s) = C \left[ sU(s) - \underbrace{u(0)}_{=0 \text{ ty ingen beg. energi}} \right]$$

$$U(s) = \frac{1}{sC} \cdot I(s)$$

• Källor

Transformerar enligt "transformtabell"

Exempel

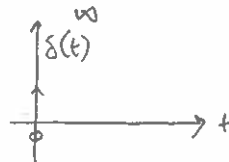


□ Några viktiga signal

\* Impuls  $\delta(t)$

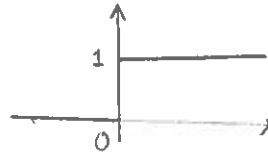
Beskrivning  $\delta(t) = 0, t \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



\* Enhetssteg,  $\theta(t)$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Vi låter  $\theta(t)$  vara odef. i  $t = 0$ .

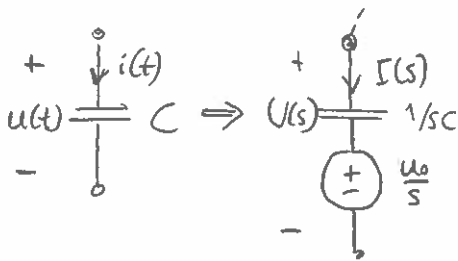
Samband  $\delta(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$   $\theta(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$

$$\delta(t) > 1, \theta(t) > \frac{1}{s}$$

## Nät med begynnelseenergi

I dessa har vi uppladdade kapacitanser och/eller strömförande induktanser vid  $t=0$ .

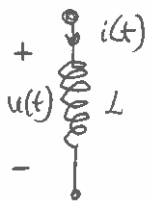
### o Kapacitans



$$u(t=0) = u_0 \quad (\text{beg. spänning})$$
$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau}_{u_0} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Laplace transformera:  $U(s) = \frac{u_0}{s} + \frac{1}{sC} I(s)$

### o Induktans



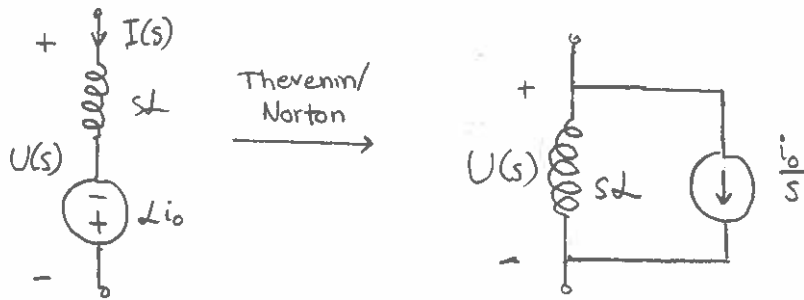
$$i(t=0) = i_0 \quad (\text{beg. ström})$$

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

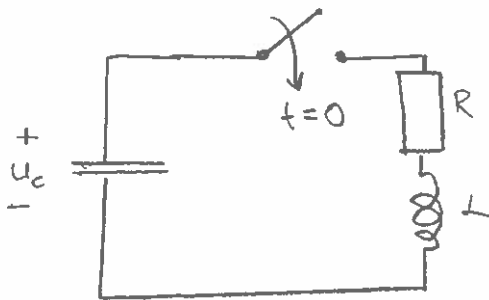
$$U(s) = L \left[ sI(s) - i_0 \right] =$$

$$= sL \cdot I(s) - Li_0$$

Vi får



Exempel



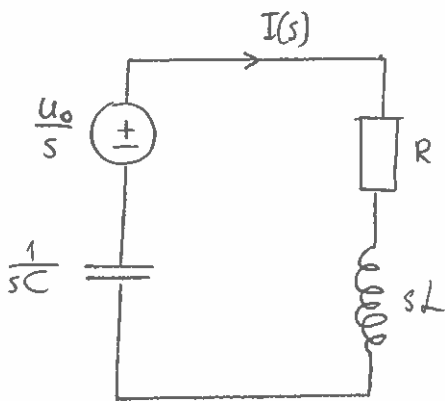
Kapacitansen har beg. spänning

$$u_c(t) \Big|_{t=0} = u_0 = 10 \text{ V}$$

Beräkna  $i(t)$

$$R = 10 \Omega, L = 1,0 \text{ mH}, C = 10 \mu\text{F}$$

Laplace transf. nätet ( $t > 0$ )



$$\text{KvL: } -\frac{u_0}{s} + I(s) \cdot R + sL \cdot I(s) + \frac{1}{sC} I(s) = 0$$

$$I(s) = \frac{\frac{u_0}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}} =$$

$$= \frac{u_0/L}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

Med numeriska värden:

$$I(s) = \frac{10^4}{s^2 + s \cdot 10^4 + 10^8}$$

Rötter till nämnarpolynom:  $s_{1,2} = -5000 \pm j8660$   
 Kvadratkomplettera

$$I(s) = \frac{10^4}{(s+5000)^2 - 5000^2 + 10^8} = \frac{10^4}{(s+5000)^2 + 75 \cdot 10^6} =$$

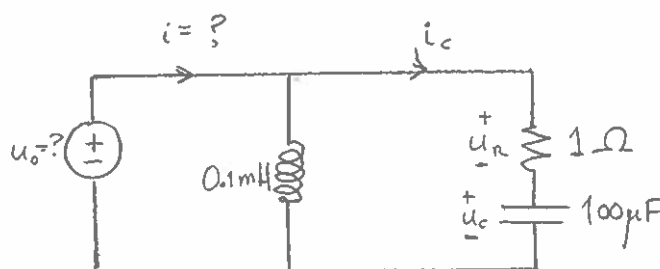
$$= \frac{10^4}{8660} \frac{8660}{(s+5000)^2 + (8660)^2} \quad \text{ser direkt: dämpad sinus}$$

Inv. Laplace

$$i(t) = 1,15 e^{-5000t} \sin(8660 \cdot t), \quad t > 0$$

/end tis

12.4)



Med Hamid

2010-11-3  
Onsdag

$$u_c = 5 \cos(10^4 t - 45^\circ) \text{ V} \quad \xrightarrow{\text{jw method}} \quad U_c = 5 \angle -45^\circ$$

$$\omega = 10^4 \text{ rad/s}$$

$$I_c = \frac{U_c}{jX_c} = \frac{U_c}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C \cdot U_c = j \cdot 10^4 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \angle -45^\circ = 5 \angle 45^\circ \text{ A}$$

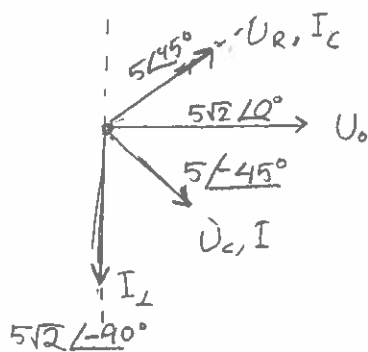
$$U_R = R \cdot I_c = 1 \cdot 5 \angle 45^\circ = 5 \angle 45^\circ \text{ V}$$

$$U_o = U_R + U_c = 5 \angle 45^\circ + 5 \angle -45^\circ = \frac{5}{\sqrt{2}}(1+j) + \frac{5}{\sqrt{2}}(1-j) = 5\sqrt{2} \angle 0^\circ \text{ V}$$

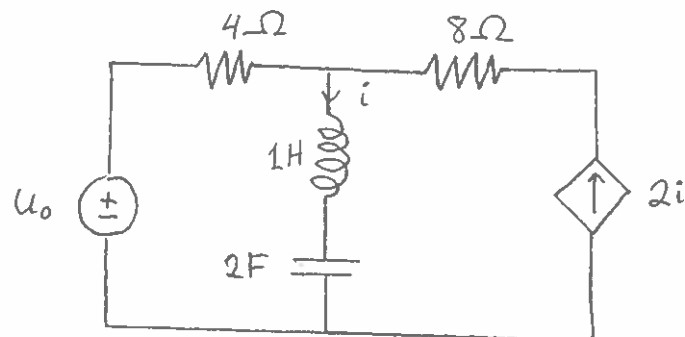
$$I_L = \frac{U_o}{j\omega L} = \frac{5\sqrt{2} \angle 0^\circ}{j \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}} = 5\sqrt{2} \angle -90^\circ \text{ A}$$

$$I = I_L + I_c = 5\sqrt{2} \angle -90^\circ + 5 \angle 45^\circ = -j5\sqrt{2} + \frac{5}{\sqrt{2}}(1+j) = \frac{5}{\sqrt{2}} - j2,7\sqrt{2} = 3,53 - j3,53 = 5 \angle -45^\circ \text{ A}$$

$$i = 5 \cos(10^4 t - 45^\circ) \text{ A}$$



12.8)

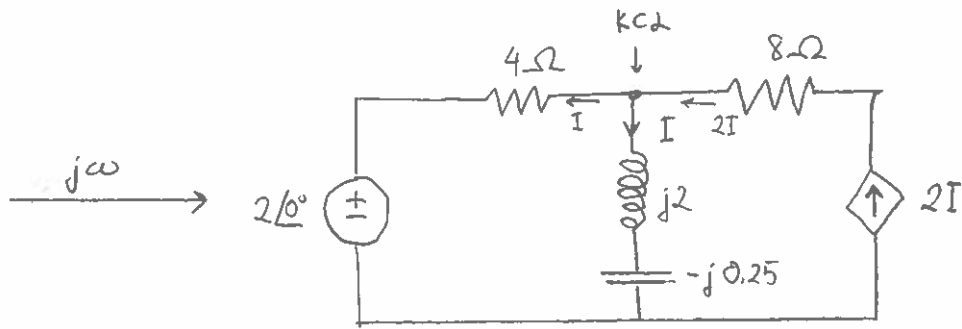


$$u_o = 2 \cos 2t \text{ V}$$

$$\omega = 2 \text{ rad/s}$$

$$i = ?$$





$$4(-I) + j2I - j0.25I - 2 = 0$$

$$(-4 + j1.75)I = 2 \angle 0^\circ \longrightarrow I = \frac{2 \angle 0^\circ}{-4 + j1.75}$$

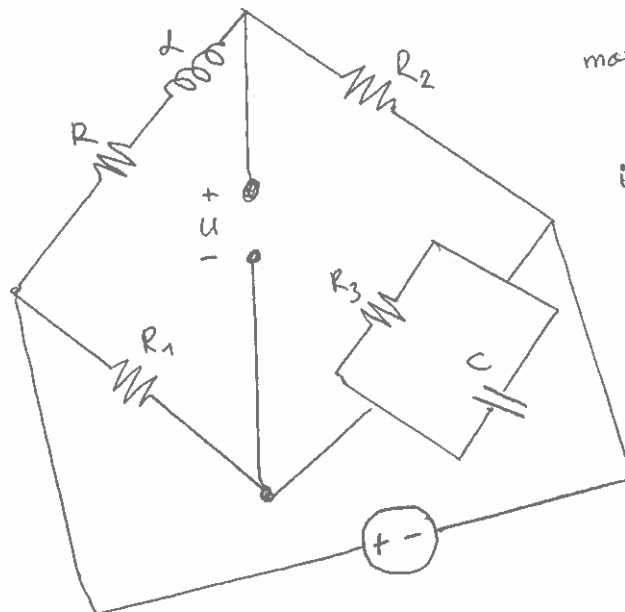
$$\Rightarrow I = \frac{-8 + 0}{16 + 3} + j \frac{0 - 3.5}{16 + 3} = -\frac{8}{19} - j \frac{3.5}{19} = -0.42 - j0.18$$

$$|I| = 0.46$$

$$\angle I = 24^\circ - 180^\circ = -156^\circ$$

$$i = 0.46 \cos(2t - 156^\circ) \text{ A}$$

12.9)



maska? four R's  
 bridge is  
 in balance  
 $u = 0$

$$R_1 = 16$$

$$R_2 = 100$$

$$R_3 = 1k$$

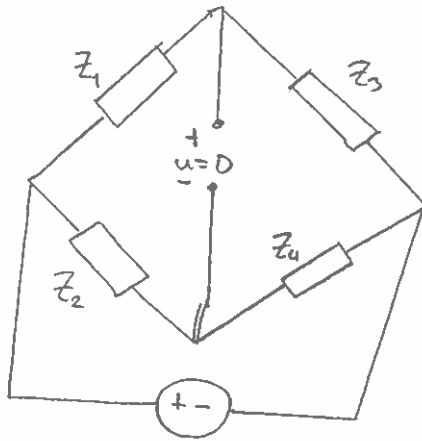
$$C = 2 \mu F$$

$$f = 1kHz$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$R = ?$$

$$L = ?$$



$$Z_1 \cdot Z_4 = Z_2 \cdot Z_3$$

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_4}$$

$$Z_1 = R + j\omega L$$

$$Z_2 = R_1$$

$$Z_3 = R_2$$

$$Z_4 = R_3 \parallel \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_4 = \frac{R_3 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_3 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{R_3}{j\omega C}}{\frac{1 + j\omega C R_3}{j\omega C}} = \frac{R_3}{1 + j\omega C R_3}$$

balance:  $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$

$$(R + j\omega L) \left( \frac{R_3}{1 + j\omega C R_3} \right) = R_1 R_2$$

$$\frac{R R_3 + j\omega L R_3}{1 + j\omega C R_3} = R_1 R_2$$

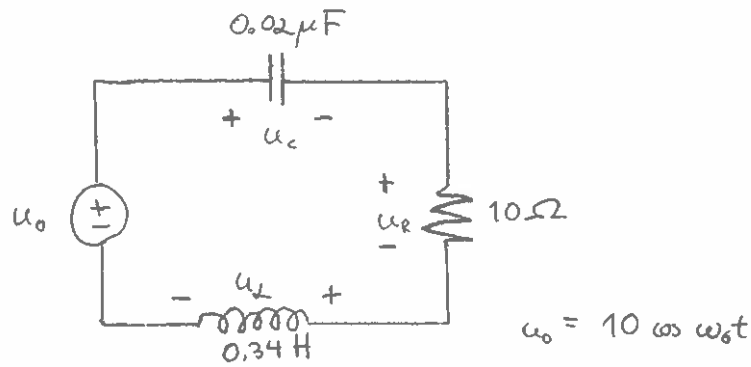
$$R R_3 + j\omega L R_3 = R_1 R_2 (1 + j\omega C R_3)$$

$$R R_3 + j\omega L R_3 = R_1 R_2 + j\omega C R_1 R_2 R_3$$

$$\begin{cases} R R_3 = R_1 R_2 \longrightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_3} = \frac{16 \cdot 100}{1000} = 1.6 \Omega \\ \omega L R_3 = \omega C R_1 R_2 R_3 \end{cases}$$

$$L = C R_1 R_2 = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 16 \cdot 100 = 0.032 \text{ H} = 32 \text{ mH}$$

13.2)



a) Resonance angular frequency

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.34 \times 0.02 \times 10^{-6}}} = 1.21 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

b) in resonance case:

$$I = \frac{U_0}{R} = \frac{10 \angle 0^\circ}{10} = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\text{Quality factor} = Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1.21 \cdot 10^4 \times 0.34}{10} \approx 412$$

$$U_c = -jQU_0 = -j412 \times 10 = 4120 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$U_R = U_0 = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$U_L = jQU_0 = 4120 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$c) \quad B = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1.21 \times 10^4}{412} = 29.4 \text{ rad/s}$$

$$d) \quad |I| = \frac{|U_0|}{\left| R + j\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0(C+\Delta C)}\right) \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|U_0|}{R}$$

$$\left| R + j\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0(C+\Delta C)}\right) \right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0(C+\Delta C)}\right)^2} = R \sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0(C+\Delta C)}\right)^2}$$

$$|I| = \frac{|U_0|}{R \sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0(C+\Delta C)}\right)^2}} = \frac{|U_0|}{\sqrt{2} R} \Rightarrow \underline{\underline{1 + \frac{1}{R^2} \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0(C+\Delta C)}\right)^2 = 2}}$$

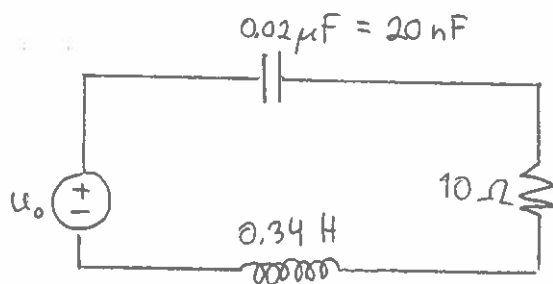
absolute  $\rightarrow \left| \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0(C+\Delta C)} \right| = R$

expand  $\frac{1}{\omega_0(C+\Delta C)} = \frac{1}{\omega_0 C \left(1 + \frac{\Delta C}{C}\right)} = \frac{1}{\omega_0 C} \left(1 - \frac{\Delta C}{C} + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 - \dots\right)$

In first approximation

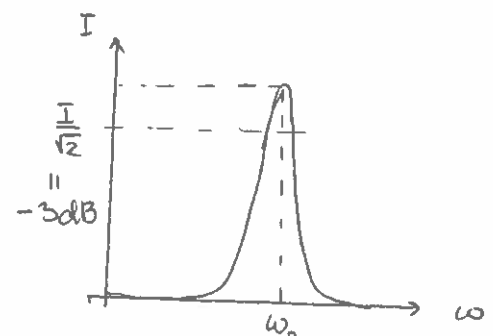
$$\left| \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0(C+\Delta C)} \right| = \left| \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} + \frac{\Delta C}{\omega_0 C^2} \right| \approx R$$

$$\Rightarrow \Delta C \approx \pm \omega_0 C^2 R = \pm 48 \times 10^{-12} \text{ F} = \pm 48 \text{ pF}$$



It will be more accurate if the  $\left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2$  term is also included

$$\Rightarrow \Delta C = \pm 48.4 \text{ pF}$$



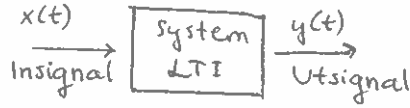
/end ons

(LTI - system)

Linjära, Tidsinvarianta system

2010-11-05  
Fredag

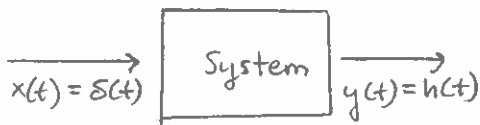
Blockschema



Beskrivning

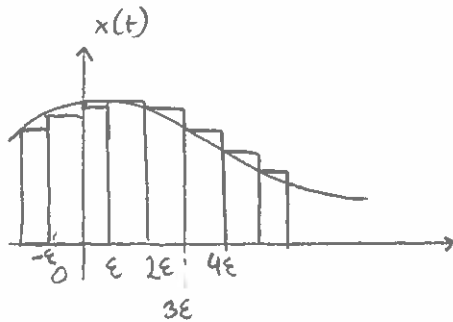
Insignal	Utsignal
$x_i(t)$	$y_i(t)$
$x_i(t-t_0)$	$y_i(t-t_0)$ Tidsinvariant
$a_i x_i(t)$	$a_i y_i(t)$ Amplitudskaln. (Homogent)
$x_1(t) + x_2(t)$	$y_1(t) + y_2(t)$ Additivt
$x(t) = \sum_i a_i x_i(t)$	$y(t) = \sum_i a_i y_i(t)$ Superposition

Låt oss beskriva ett system med dess impulssvar,  $h(t)$ .  
(Systemets utsignal då insignalen är en enhetsimpuls,  $\delta(t)$ )



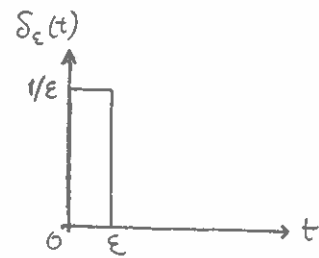
(Vi studerar här system utan begynnelseenergi)

Vad blir utsignalen för en godtycklig insignal,  $x(t)$ ?



Approximera en godtycklig insignal med hjälp av pulser,  $p_i$ .  
 En "enhetspuls" definieras vi som

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon, & 0 \leq t < \epsilon \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$



$x(t)$  approx. med en summa av pulser (skiftade och amplitudskalade).

$$\begin{aligned} p_0(t) &= \delta_\epsilon(t) x(0) \cdot \epsilon \\ p_1(t) &= \delta_\epsilon(t - \epsilon) x(\epsilon) \cdot \epsilon \\ p_2(t) &= \delta_\epsilon(t - 2\epsilon) x(2\epsilon) \cdot \epsilon \\ &\vdots \end{aligned}$$

Låt  $h_\epsilon(t)$  vara systemets utsignal ("pulssvar") för insignalen  $\delta_\epsilon(t)$ .

Insignal	Utsignal
$\delta_\epsilon(t)$	$h_\epsilon(t)$
$\delta(t - k\epsilon)$	$h_\epsilon(t - k\epsilon)$
$\delta_\epsilon(t - k\epsilon) \underbrace{x(k\epsilon)}_{\text{Ampl. skaln.}} \cdot \epsilon$	$h_\epsilon(t - k\epsilon) x(k\epsilon) \cdot \epsilon$
Approximativ insignal $x(t) \approx$	Approximativ utsignal $y(t) \approx$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t - k\epsilon) x(k\epsilon) \cdot \epsilon$	$\approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\epsilon(t - k\epsilon) x(k\epsilon) \cdot \epsilon$

Låt  $\epsilon \rightarrow 0$  och låt  $k\epsilon = \tau$

$$\delta_\epsilon(t) \rightarrow \delta(t)$$

$$h_\epsilon(t) \rightarrow h(t)$$

$\tau$  blir en kont. variabel,  $\epsilon$  byts mot  $d\tau$

Summan  $\rightarrow$  Integral

Vi får

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau) d\tau \quad \text{Faltningintegralen!}$$

Förkortat skrivsätt:  $y(t) = h(t) * x(t)$

Man kan visa (gmn. variabelsubst.) att

$$h(t) * x(t) = x(t) * h(t) \quad \text{och} \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau$$

För ett kausalt system gäller:

Utsignalen  $y(t)$  beror endast av samtida eller tidigare värden på insignalen  $x(t)$ . För ett kausalt system gäller

$$h(t) = 0, t < 0 \quad (\text{kan inte få svar innan insignal kommit!})$$

### Fattning

$$x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \cdot H(s)$$

kausalt system  $h(t) = 0, t < 0$ , vår signal:  $x(t) = 0, t < 0$

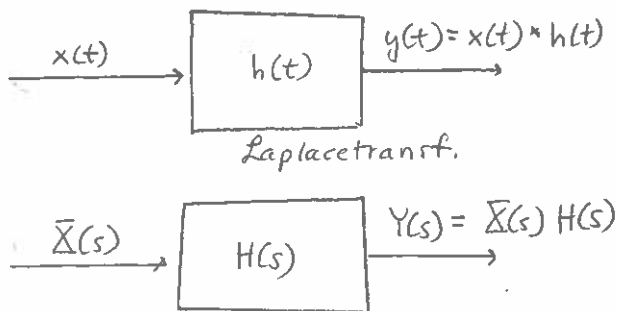
Laplace transf. Faltningintegralen

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left( \underbrace{\int_0^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau}_{x(t) * h(t)} \right) e^{-st} dt = \{ \text{byt. integ. ordn.} \} = \\ & = \int_0^{\infty} x(\tau) \int_0^{\infty} h(t-\tau) e^{-st} dt d\tau = \{ \text{Mult. med } 1 = e^{s\tau} e^{-s\tau} \} = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} x(\tau) \left( \underbrace{\int_0^{\infty} h(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt}_{H(s)} \right) e^{-s\tau} d\tau =$$

$$= H(s) \int_0^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s) \cdot \bar{X}(s)$$

Samband: Utsignal, Insignal hos LTI-system



Överföringsfunktion:  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

Vanlig form i ingenjörstillämpningar

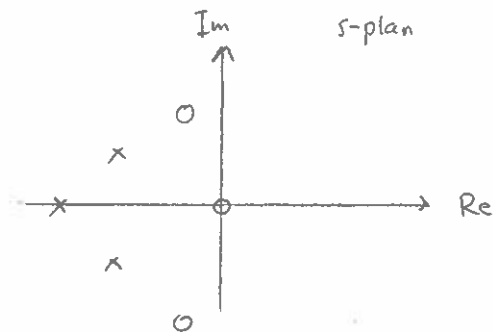
$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2) \dots (s-z_M)}{(s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_N)}$$

För våra elektriska kretsar  $M \leq N$  och koef.  $a_0, a_1, \dots, a_N, b_0, b_1, \dots, b_M$  är konst. och reella

$z_i$ : Nollställen (rötter till täljarpolynom) "o" ← ring i grafen  
 $p_i$ : Poler (rötter till nämnarpolynom) "x" ← kryss



Poler och nollställen placeras i s-planet och ger en "grafisk" beskrivning av systemet.



Med konstanten  $\frac{b_n}{a_n}$  beskriver grafen hela systemet.

### Kretsens (systemets) Frekvensegenskaper

Fås gnm.  $s = j\omega$

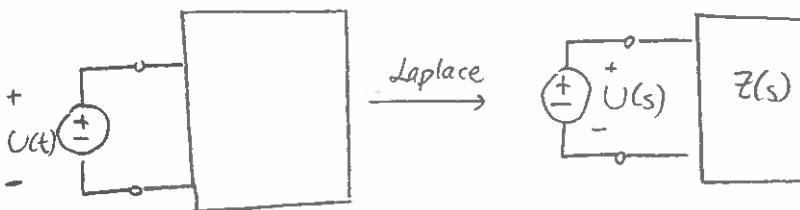
$$H(s) \Big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j \arg\{H(j\omega)\}}$$

Jämför  $j\omega$ -metoden där  $H(j\omega) = \frac{\text{"Utsignalens visare"}}{\text{"Insignalens visare"}}$

$|H(j\omega)|$  : Amplitudkaraktäristik

$\arg\{H(j\omega)\}$  : Faskaraktäristik

På motsvarande sätt kan impedansen för en positiv tvåpol beskrivas



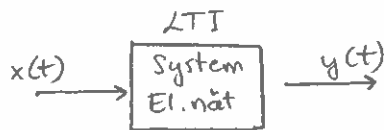
$$\text{Samband: } Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)}$$

## Motsvarande frekvensfunktion

$$Z(s) \Big|_{s=j\omega} = Z(j\omega) = |Z(j\omega)| e^{j \arg\{Z(j\omega)\}}$$

dämför resonanskretsar!

### Exempel



$$x(t) = 4 \cos(t) \Theta(t) \quad [\Theta(t): \text{stegfkt}]$$

$$y(t) = [4\sqrt{2} \cos(t-45^\circ) - 4e^{-t}] \Theta(t)$$

Beräkna nätets överföringsfunktion,  $H(s)$ , samt skissa nätets amplitudkaraktistik.

$$\underline{X}(s) = 4 \frac{s}{s^2+1}$$

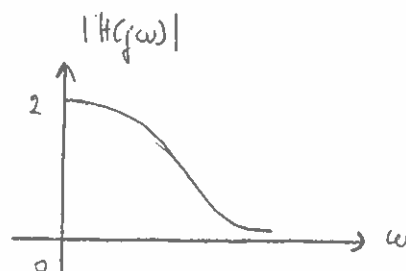
$$[\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta] \quad y(t) = 4 \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(t) - \sin(t)) e^{-t} \right] \Theta(t)$$

$$Y(s) = 4 \left[ \frac{s+1}{s^2+1} - \frac{1}{s+1} \right] = \dots = \frac{8s}{(s^2+1)(s+1)}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{\underline{X}(s)} = \frac{2}{s+1}$$

Amplitudkaraktistik:  $H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{2}{1+j\omega}$

$$|H(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{1+\omega^2}}$$



"Lågpass filter"

/end fre (Lv2)

## Exempel

Serie resonanskrets  
visardagram s. 42

Kvalitetsmätt för resonanskretsar

Överföringsfunktion  $H(j\omega)$  s. 44  
Växelströmseffekt

Momentan effekt  
resistiv krets  
rent induktiv krets  
rent kapacitiv krets

Komplex effekt  $S$  s. 48

Effektivvärde

Transformmetoden  
tidsdomän, frekvensdomän

Laplace transform s. 51  
Nät utan begynnelseenergi  
□ Några viktiga signal  
- Impuls  
- Enhetssteg  
Nät med begynnelseenergi

## Exempel

Linjära, Tidsinvarianta system (LTI) s. 62

Kretsens frekvensegenskaper s. 66  
 $s = j\omega$   
amplitudkaraktistik  
fas-karaktistik

Lv 3

Elektriska nät och system

med Ants Silberberg  
Hamid

[ESS 115]

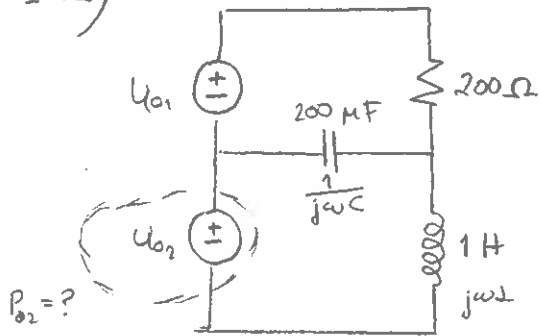
F2 lp2 2010



2010-11-8

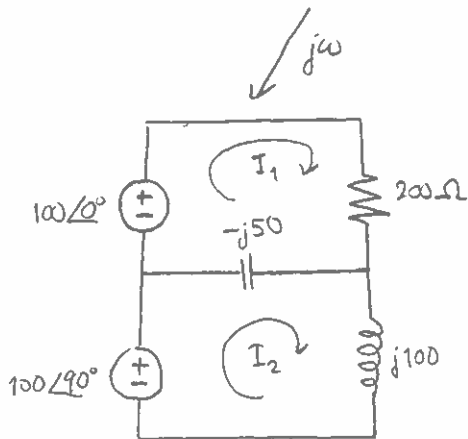
Måndag

14.2)



$$u_{o1} = 100 \cos 100t \text{ V}$$

$$u_{o2} = 100 \cos (100t + 90^\circ) \text{ V}$$



Active power

$$P_{o2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ U_{o2} I_2^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ j100 I_2^* \}$$

$$= 50 \operatorname{Re} \{ j I_2^* \}$$

$$\begin{cases} (200 - j50) I_1 + j50 I_2 = 100 \\ j50 I_1 + j50 I_2 = j100 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 200 - j50 & j50 \\ j50 & j50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ j100 \end{bmatrix}$$

note

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

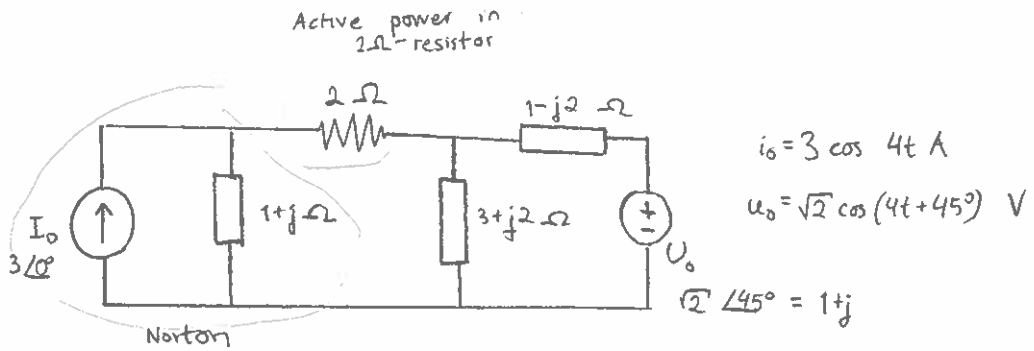
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 200 - j50 & 100 \\ j50 & j100 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 200 - j50 & j50 \\ j50 & j50 \end{vmatrix}} = \dots = \frac{3-j}{2-j} = \frac{7+j}{5}$$

$$I_2^* = \frac{7-j}{5}$$

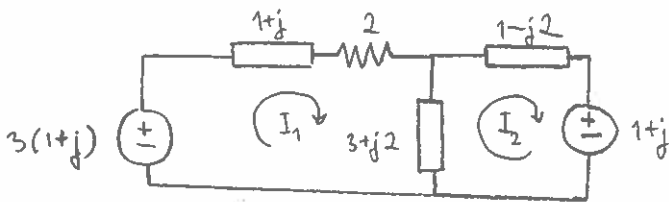
$$P_{o2} = 50 \operatorname{Re} \{ j I_2^* \} = 50 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{5} + j \frac{7}{5} \right\} = \underline{\underline{10 \text{ W}}}$$

delivers

14.4)



Norton → Thevenin  $V_{Th} = I_0 \cdot (1+j) = 3(1+j)$   $Z_{Th} = 1+j$



$$\begin{cases} -3(1+j) + (1+j)I_1 + 2I_1 + (3+j2)(I_1 - I_2) = 0 \\ (3+j2)(I_2 - I_1) + (1-j2)I_2 + (1+j) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (6+j3)I_1 - (3+j2)I_2 = 3+j3 \\ (-3-j2)I_1 + 4I_2 = -1-j \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 6+j3 & -3-j2 \\ -3-j2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+j3 \\ -1-j \end{bmatrix}$$

We want  $I_1$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3+j3 & -3-j2 \\ -1-j & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6+j3 & -3-j2 \\ -3-j2 & 4 \end{vmatrix}}$$

$$I_1 = \frac{11+j7}{19}$$

$$P_{2\Omega} = \frac{1}{2} R \cdot |I_1|^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \times |I_1|^2 = \left| \frac{11+j7}{19} \right|^2 = \left( \frac{11}{19} \right)^2 + \left( \frac{7}{19} \right)^2 = \underline{0.470 \text{ W}}$$

## Laplace transform

$$f(t) \longrightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

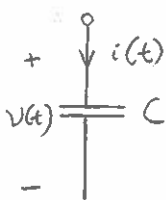
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$\frac{df(t)}{dt} \longrightarrow sF(s) - f(0)$$

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \longrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

$$f(t) = 1 \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s}$$

### Capacitor

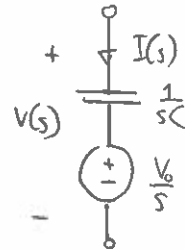


$$V_0 = V(0)$$

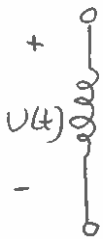
$$V(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$= V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$V(s) = \frac{V_0}{s} + \frac{1}{sC} I(s)$$



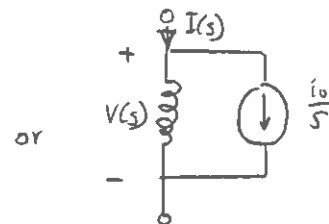
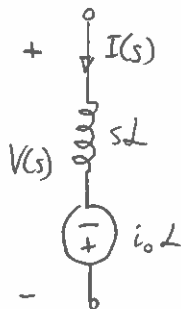
### Inductor



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

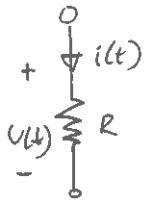
$$i_0 = i(0)$$

$$\Rightarrow V(s) = L[sI(s) - i(0)] = sL I(s) - i_0 L$$



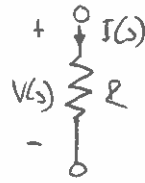


## Resistor

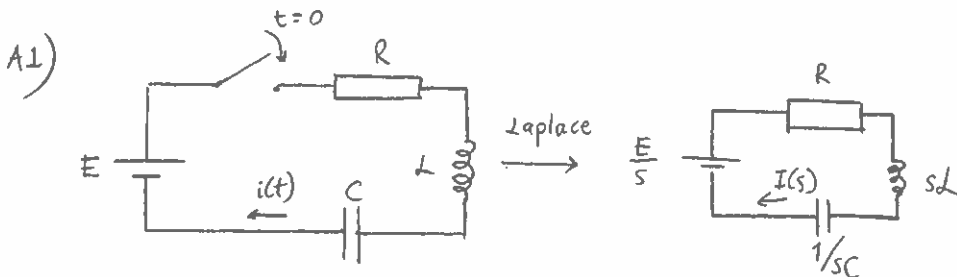


$$V(t) = R \cdot i(t)$$

$$V(s) = R \cdot I(s)$$



Circuit without initial condition  
 $V_0 = 0$   
 $i_0 = 0$



$R=1\Omega, L=1H, C=1F$   
 No initial condition

$$I(s) = \frac{E/s}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{E}{\frac{1}{C} + sR + s^2L} = \frac{E}{L \left( (s + \frac{R}{2L})^2 + \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} \right)} =$$

$$= \frac{E}{L \left[ \left( s + \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}} \right) \left( s + \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}} \right) \right]} = \frac{E}{L [(s+a-b)(s+a+b)]}$$

$$\begin{cases} a = \frac{R}{2L} \\ b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}} \end{cases} \quad F(s) = \frac{1}{(s-x)(s-y)} \Rightarrow f(t) = \frac{ye^{yt} - xe^{xt}}{y-x} \quad x \neq y$$

$$i(t) = \frac{E}{L} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s+a-b)(s+a+b)} \right] = \frac{E}{L} \left( \frac{-e^{-(a-b)t} + e^{-(a+b)t}}{a-b - (a+b)} \right) =$$

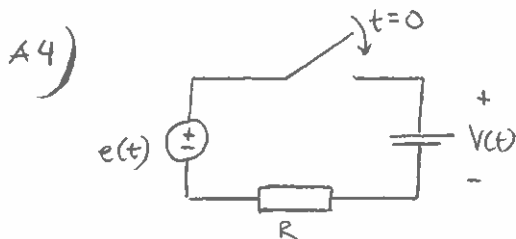
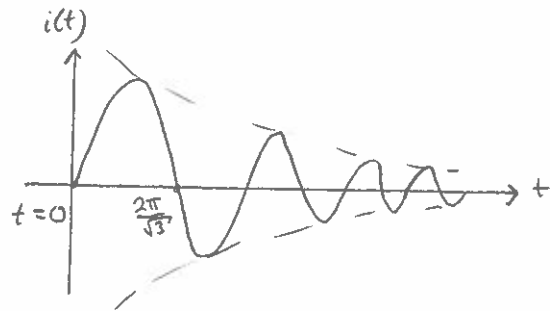
$$= \left\{ \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = \sqrt{1/4 - 1} = j\sqrt{3}/2 \end{array} \right\} = \frac{E}{L} \left( \frac{e^{-\frac{(+j\sqrt{3})}{2}t} - e^{-\frac{(-j\sqrt{3})}{2}t}}{-j\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \frac{-E}{\sqrt{3}L} e^{-t/2} \left( \frac{e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t} - e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{j} \right)$$

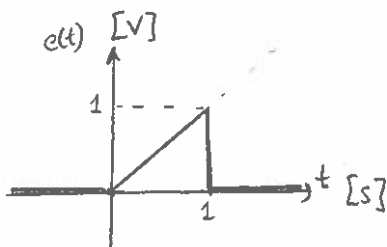
Euler :  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$   
 $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2j}$

$$i(t) = -\frac{E}{\sqrt{3}L} e^{-t/2} \left(2 - \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right) = \frac{2E}{\sqrt{3}L} e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} t = \pi \implies t = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$



$V(t)$  for  $t > 0$   
 no initial condition  
 $R = 1 \Omega$   
 $C = 1 F$



$$e(t) = t(u(t) - u(t-1)) = t u(t) - t u(t-1)$$

$$= t u(t) - (t-1)u(t-1) - u(t-1)$$

$$E(s) = \mathcal{L}[t u(t)] - \mathcal{L}[(t-1)u(t-1)] - \mathcal{L}[u(t-1)]$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-s} - \frac{1}{s} e^{-s}$$

$$V(s) = \frac{E(s) \cdot \frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{E(s)}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + sRC} \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-s} - \frac{1}{s} e^{-s} \right]$$

$\uparrow$  2 integrals       $\uparrow$  1 integral

Laplace inverse of  $\frac{1}{1 + sRC}$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{1 + sRC} \right] = \frac{1}{RC} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{\frac{1}{RC} + s} \right] = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} = f(t)$$

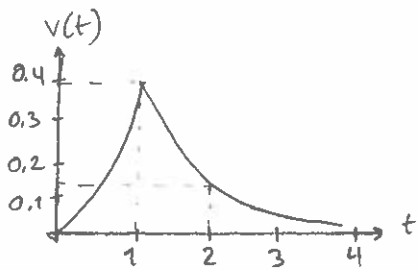
$\frac{1}{s-a} \rightarrow e^{at}$

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{RC} \left[ \frac{e^{-\tau/RC}}{-1/RC} \right]_{\tau=0}^t = 1 - e^{-t/RC}$$

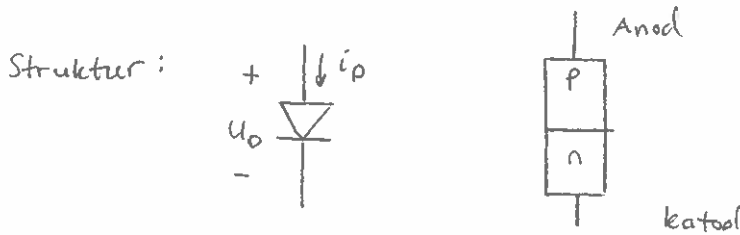
$$\int_0^t \int_0^{\tau} f(\tau') d\tau' d\tau = \int_0^t (1 - e^{-\tau/RC}) d\tau = t + RC(e^{-t/RC} - 1)$$

$$V(t) = \left[ t + RC(e^{-t/RC} - 1) \right] u(t) + \left[ -(t-1) - RC(e^{-(t-1)/RC} - 1) - 1 + e^{-(t-1)/RC} \right] u(t-1) =$$

$$= \{ RC=1 \} = (t + e^{-t} - 1) u(t) + (1-t) u(t-1) = \begin{cases} t-1 + e^{-t} & 0 < t \leq 1 \\ e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$



# Diod

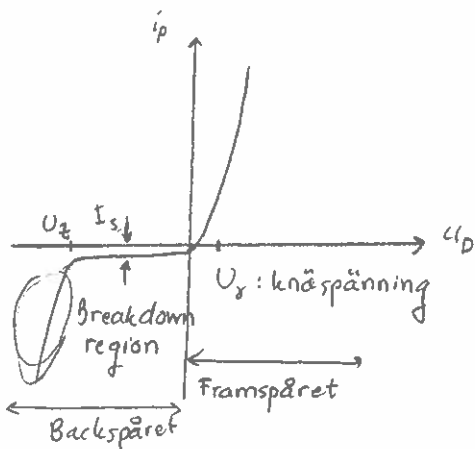


Dopad halvledarkristall (Si, Ge)

- p: dopad med "acceptoratomer"  $\Rightarrow$  ger "fria håll" (Bor, Indium, Gallium)
- n: dopad med "donatoratomer"  $\Rightarrow$  ger fria elektroner (Arsenik, Antimon)

Fria laddningsbärare ökar märkamt  
(Ideal Si-kristall: "Halvbra" Isolator)

## Karakteristik



Matematisk beskrivning  
(förutom "Breakdown region")

$$i_D = I_S \left( e^{\frac{U_D}{V_T}} - 1 \right) \quad [A]$$

$$V_T = \frac{kT}{q} = \frac{T}{11600}$$

k: Boltzemanns konst.  
q: elementarladning  
T: temp. [K]

Vid rumstemp.

$$T = 293 \text{ K}$$

blir  $V_T = 25 \text{ mV}$  (termisk spänning)

$I_s$ : Backström (Reverse saturation current)

Beror på dopningsgrad och pn-övergångens yta  
Starkt temp. beroende

$U_s$ : Knäspänning (cut-in voltage)

Material	Si	Ge
$U_s(E_0)$	$\sim 0,6V$	$\sim 0,2V$

$\eta$ : 1-2 Beror på material och fysisk struktur

### Temperaturberoende

Framspänd diod

$$\frac{dU_D}{dt} = -2,2 \text{ mV}/^\circ\text{C}$$

$U_D$  skall minska med 2,2 mV för att  $I_D$  skall vara konstant när temp. höjs en grad.

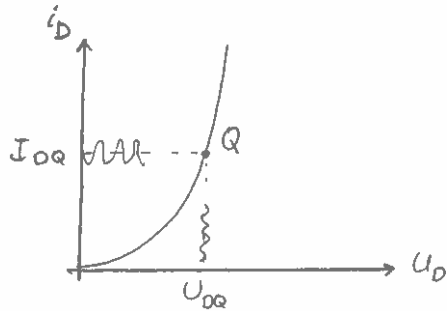
Backspänd diod

Backström  $I_s$  dubblas för varje  $10^\circ$  ökning av temperaturen.

Dynamisk resistans,  $r_d$   
(konduktans,  $g_d = \frac{1}{r_d}$ )

För framspänad diod

Anta  $i_D \gg I_S$  och  $i_D = I_S \left( e^{-\frac{U_D}{\eta V_T}} \right)$



Antag små variationer av ström ( $i_D$ ) och spänning ( $U_D$ ) runt ett jämviktsläge  $Q$ .

$$\left. \frac{\partial i_D}{\partial U_D} \right|_Q = \frac{\partial}{\partial U_D} \left( I_S e^{\frac{U_D}{\eta V_T}} \right) = \underbrace{I_S e^{\frac{U_D}{\eta V_T}}}_{I_{DQ}} \cdot \frac{1}{\eta V_T} = \frac{I_{DQ}}{\eta V_T}$$

$$r_d = \frac{1}{g_d} = \frac{\eta V_T}{I_{DQ}}$$

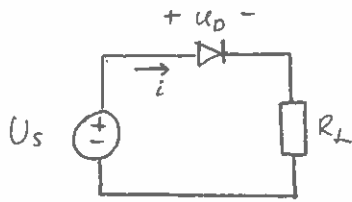
Kan användas vid småsignalmodell över diod

Numeriskt

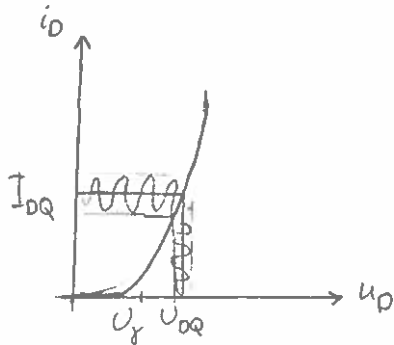
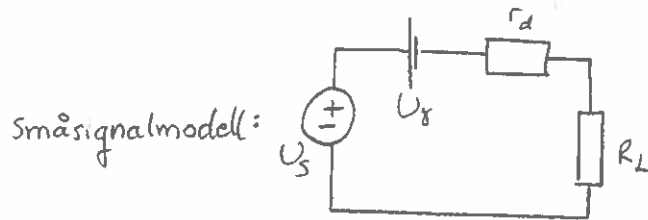
$$V_T = \frac{kT}{q} = \{ T = 300 \text{ K} \} = \frac{300}{11600} = 26 \text{ mV}$$

För  $\eta = 2$  och  $I_{DQ} = 1 \text{ mA}$  fås  $r_d = \dots = 52 \Omega$

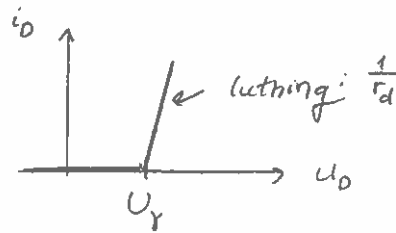
## Diöd i krets



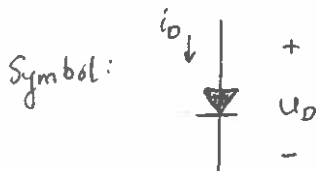
Om diöd ledande och små signalvariationer runt  $U_{DQ} > U_s$ .



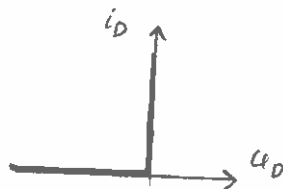
I småsignalmodellen använder vi en styckvis linjär modell



## Ideal diöd



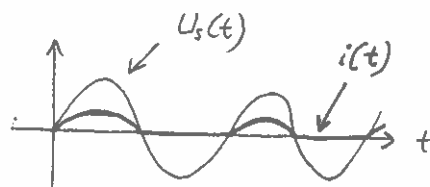
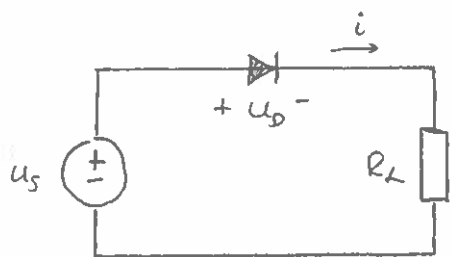
## Karakteristika



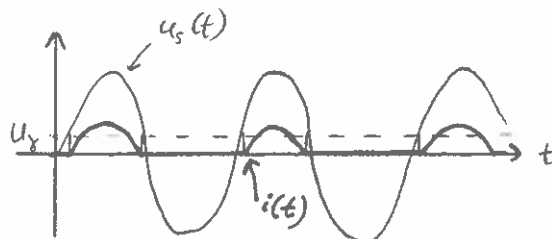
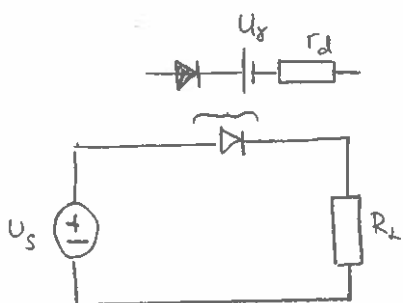
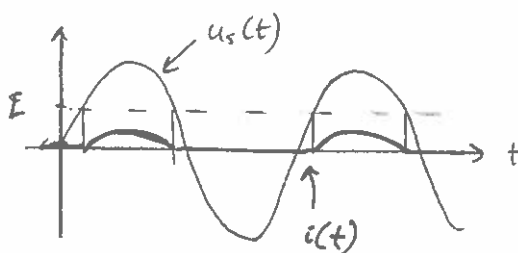
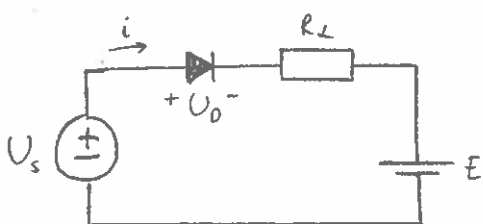
$$u_D < 0 \Rightarrow i_D = 0$$

$$i_D > 0 \Rightarrow u_D = 0$$

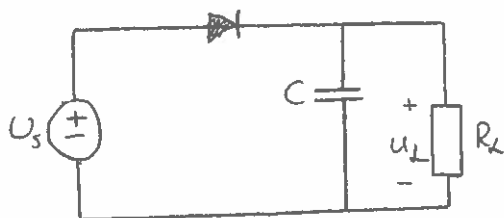
## Några diodkretsar



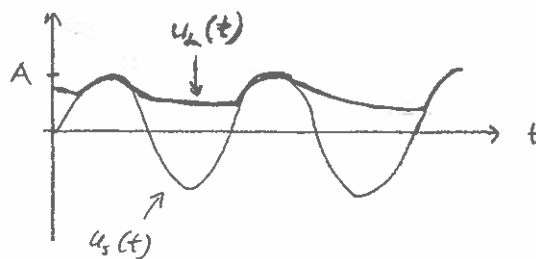
"Halvvågslirikriktare"



## Lirikriktare med filter

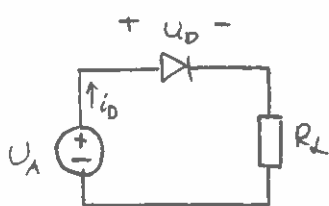


$$u_s(t) = A \sin(\omega t)$$



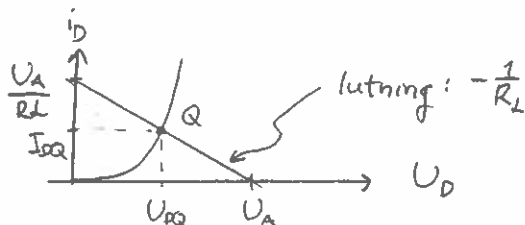


## Arbetspunkt Q



$$U_A = U_D + i_D R_L$$

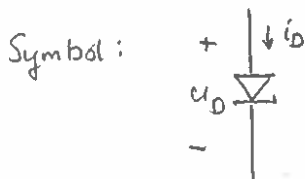
$$i_D = -\frac{U_D}{R_L} + \frac{U_A}{R_L}$$



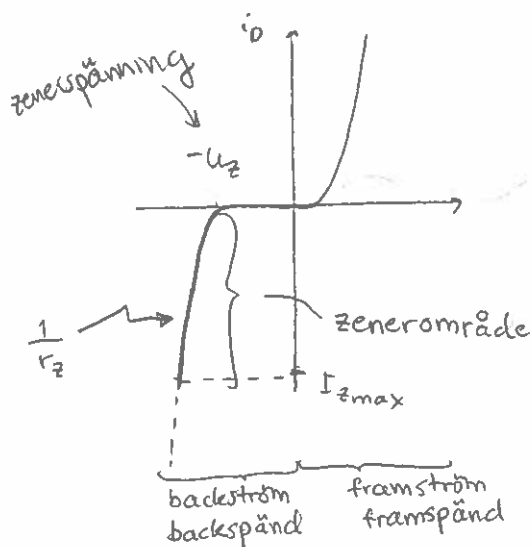
lend mån

## Zenerdiod

2010-11-9  
Tisdag

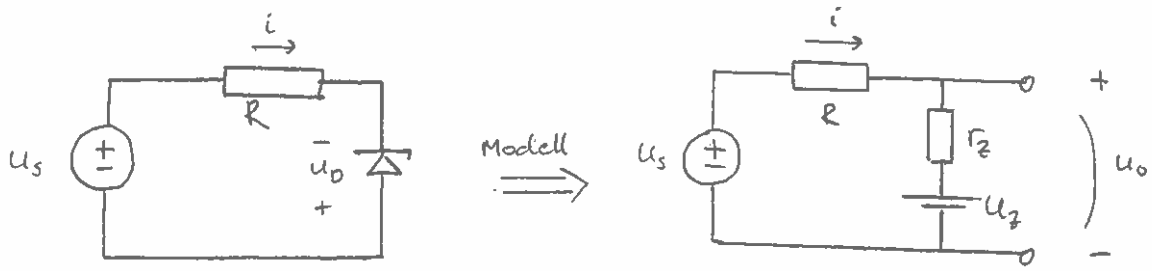


## Karakteristik

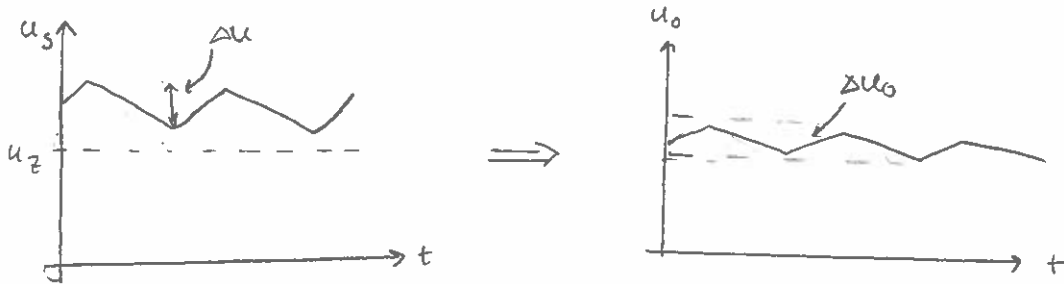


[väldefinierad område för Zenerdioder, men för vanliga dioder ej]

Ex zenerdiod i "zenerområdet"



Om  $U_s > U_z$



Strömvariation

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta i = \frac{\Delta u}{R + r_z} \\ \Delta u_o = \Delta i \cdot r_z \end{array} \right. \quad \frac{\Delta u_o}{\Delta u} = \frac{r_z}{R + r_z}$$

Om t.ex.  $r_z = 2 \Omega$   $R = 1 \text{ k}\Omega$   $\frac{\Delta u_o}{\Delta u} = \frac{1}{500}$

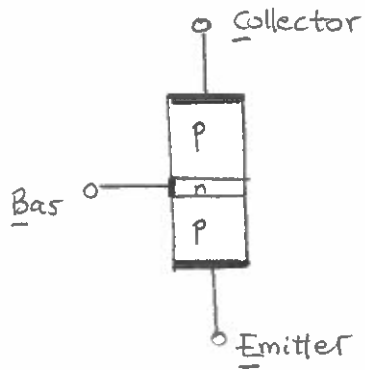
Vi har fått en spänningsstabilisering.

# Bipolär transistor

BJT (Bipolar Junction Transistor)

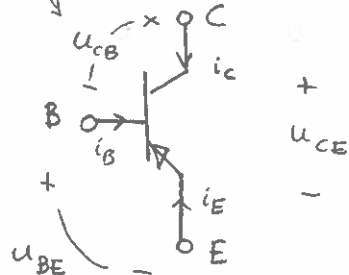
## Fysisk struktur

pnp

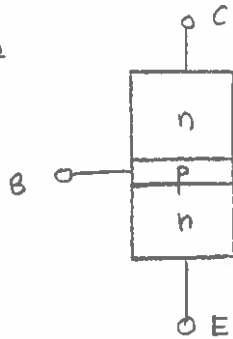


säker,  
räkna  
ej med

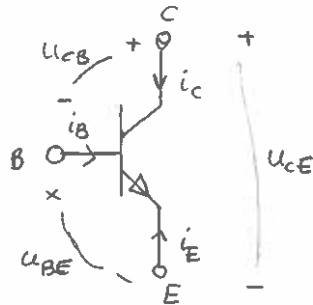
Symbol



nnp



Symbol





BE pn övergång framspänd

elektroner i emitter  $\rightarrow$  bas

Bas region tunn - elektroner i bas känner av positiv collectorpotential, dras mot kollektor

Rekombination mellan elektroner och hål i basen ger upphov till basström.

$$\text{KCL: } i_E + i_C + i_B = 0$$

Def:  $\alpha = -\frac{i_C}{i_E}$  [ $\alpha$  positiv och "nära ett"]  $\leftarrow$  mindre än ett

$$i_C = -\alpha i_E = -\alpha(-i_B - i_C)$$

$$i_C(1-\alpha) = \alpha i_B \quad \Rightarrow \quad i_C = \frac{\alpha}{1-\alpha} i_B = \beta i_B$$

Vanliga värde för  $\beta$ : 50-500

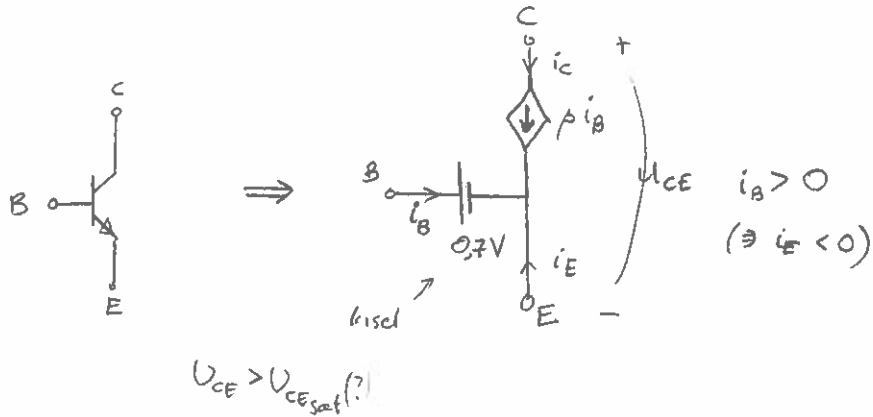
$\alpha, \beta$  konstanter för en viss given transistor

# Storsignalmodell

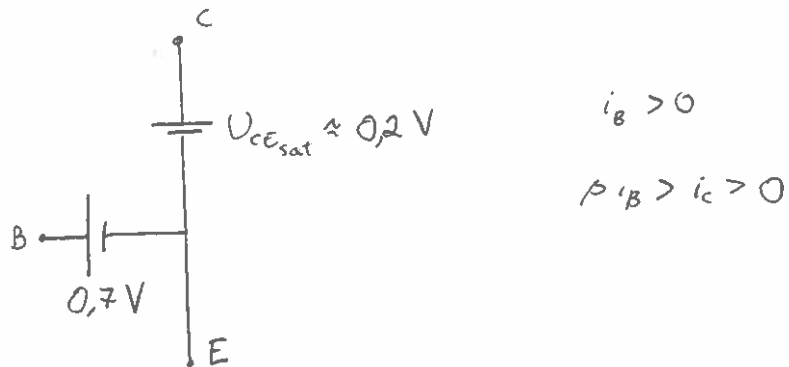
(För inplacering av transistoren i sin arbetspunkt)

npn

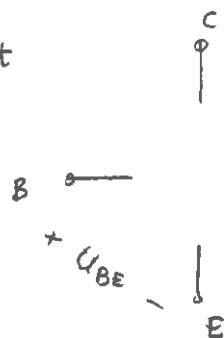
□ Aktiva området



□ Bottning



□ Strypt



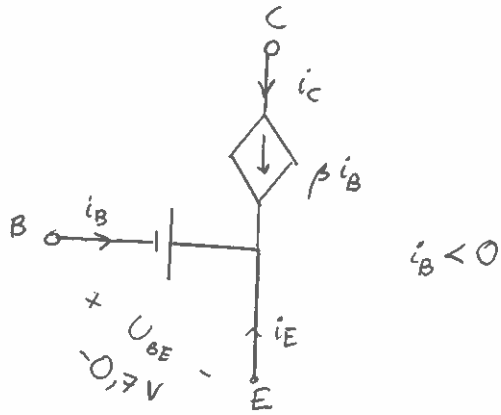
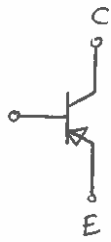
$i_B = i_C = i_E = 0$

$U_{BE} < 0,7V$

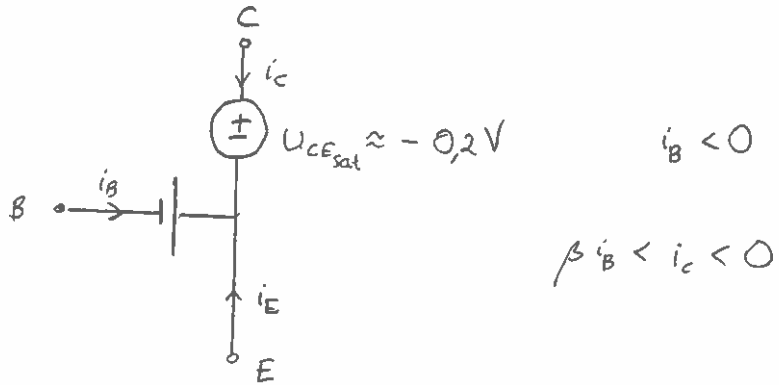
! gränstall Aktiv  $\rightarrow$  strypt  
 $U_{BE} = 0,7V$

pnp

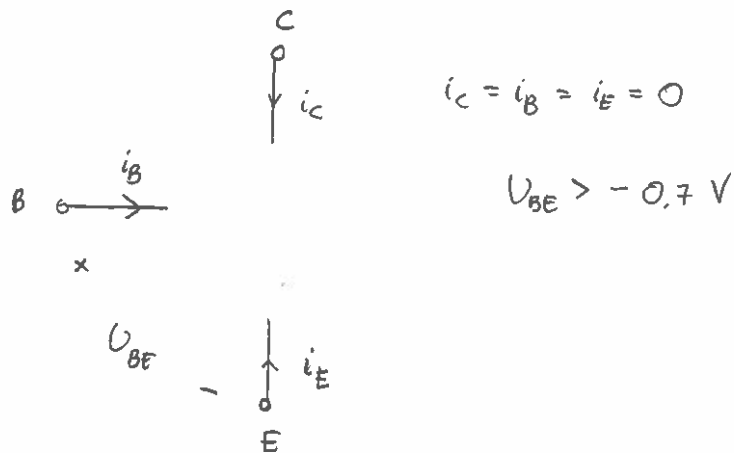
□ Aktiva området



□ Bottning

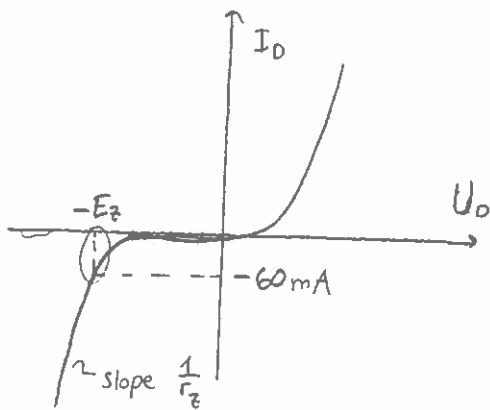
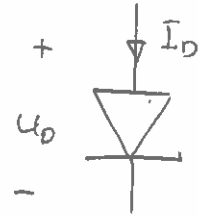
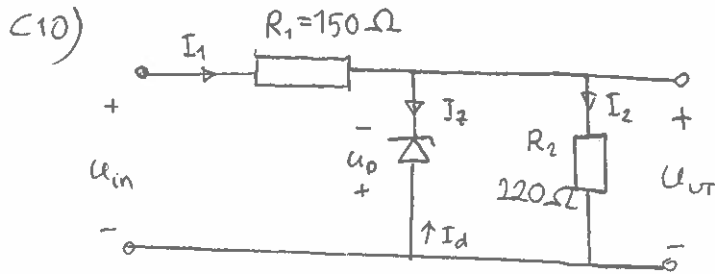


□ Strypt



Problems today: C10, D2, D4

2010-11-16  
Onsdag



We shall be in zener region

from  $\begin{cases} U_D = -E_z \\ I_D = 0 \end{cases}$   
case 1

to  $\begin{cases} U_D = -E_z \\ I_D = -60 \text{ mA} \end{cases}$   
case 2

case 1  $I_D = 0$

$$U_{Uf} = U_{in} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \xrightarrow{U_{Uf} = E_z} U_{in} = E_z \left( \frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) = 5.1 \left( \frac{150 + 220}{220} \right)$$

$$U_{in} \approx 8.58 \text{ V} \quad U_{in} \geq 8.58 \text{ V}$$

for lower  $U_{in}$ :  $U_{Uf} < E_z$

case 2  $I_z = +60 \text{ mA}$  ( $I_D = -60 \text{ mA}$ )

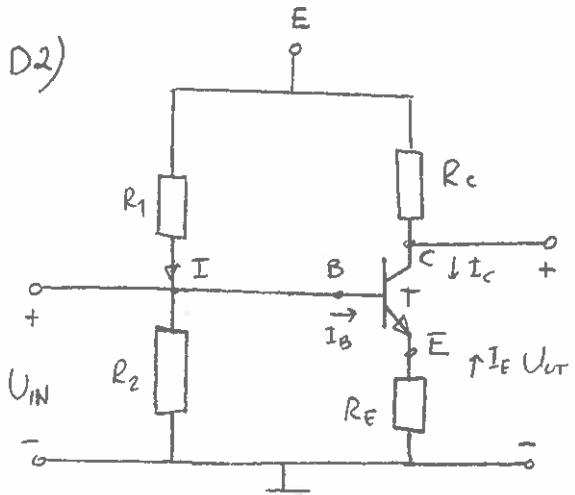
$$\text{KCL: } I_1 = I_2 + I_z = \frac{E_z}{R_2} + I_z$$

$$U_{in} = R_1 I_1 + E_z = R_1 \left( \frac{E_z}{R_2} + I_z \right) + E_z$$

$$U_{in} = 150 \left( \frac{5.1}{220} + 60 \times 10^{-3} \right) + 5.1 \approx 17.58 \text{ V}$$

$$8.58 \text{ V} \leq U_{in} \leq 17.58 \text{ V}$$



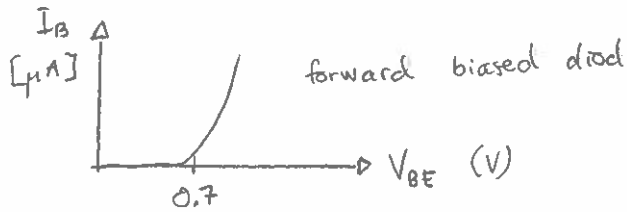


arbetspunkt  
 ↓  
 operating point  $\begin{cases} I_C = 2.5 \text{ mA} \\ U_{CE} = 3 \text{ V} \end{cases}$

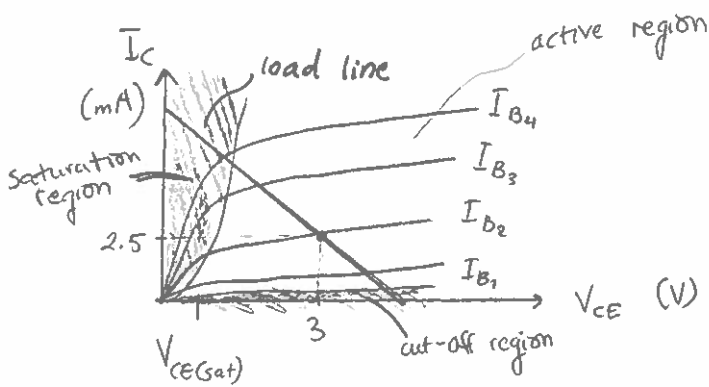
$V_{BE} = 0.7$   
 $\beta = 300$  times

BJT must be biased!

$R_E = 200 \Omega$ ,  $E = 6 \text{ V}$ ,  $I \approx 0.3 \text{ mA}$



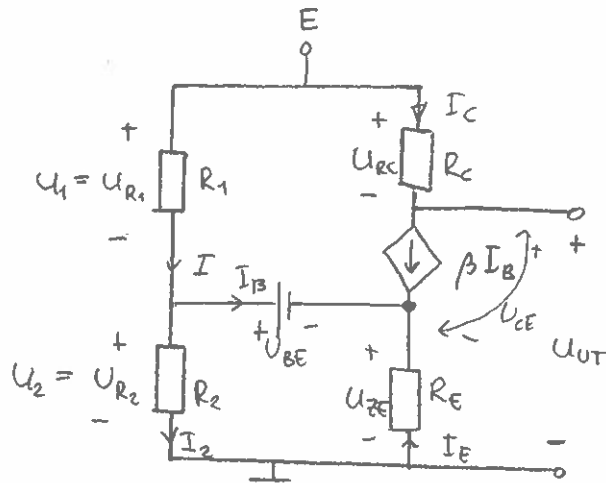
← Input characteristic



$$I_C = \beta I_B \Rightarrow I_B = \frac{I_C}{\beta}$$

saturation: C → E är som en träd  
 (small voltage drop)  
 ↑  
 used for switching  
 [not ideal switch, because of voltage drop]

Large signal model, npn transistor, Active region



for transistor:

$$\begin{cases} I_B + I_C + I_E = 0 \\ I_C = \beta I_B \end{cases}$$

$$-I_E = I_B + I_C = \frac{I_C}{\beta} + I_C = \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) I_C$$

$$U_2 = V_{BE} + U_{RE} = V_{BE} + I_C \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) R_E = 0.7 + 2.5 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{300} + 1\right) 200 = \underline{\underline{1.2 \text{ V}}}$$

$$I_2 = I - I_B = I - \frac{I_C}{\beta}$$

$$U_2 = R_2 I_2 = R_2 \left( I - \frac{I_C}{\beta} \right) \Rightarrow R_2 = \frac{U_2}{I - \frac{I_C}{\beta}} = \frac{1.2}{(0.3 - \frac{2.5}{300}) \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{4.1 \text{ k}\Omega}}$$

$$U_1 = E - U_2 = R_1 \cdot I \Rightarrow \underline{\underline{R_1}} = \frac{E - U_2}{I} = \underline{\underline{16 \text{ k}\Omega}}$$

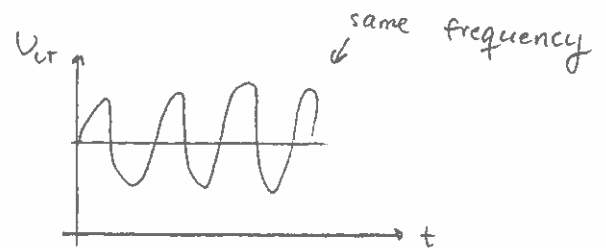
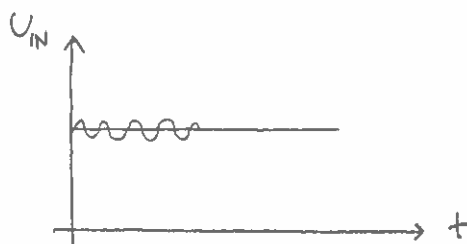
$$E = U_{RC} + V_{CE} + U_{RE} \Rightarrow U_{RC} = E - V_{CE} - U_{RE}$$

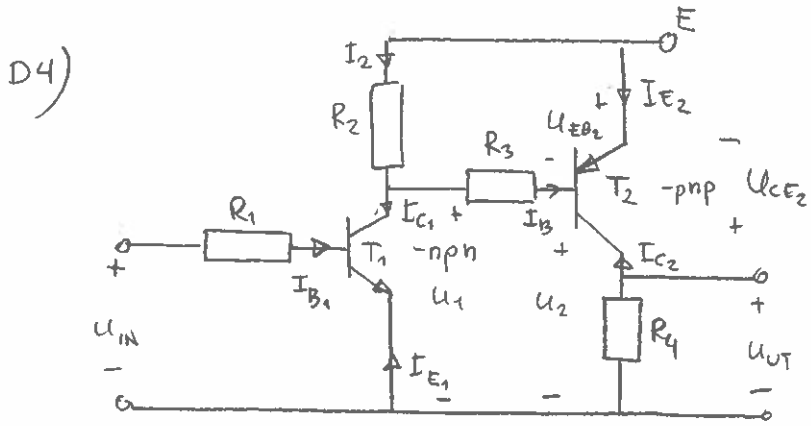
$$\textcircled{1} \quad U_{RC} = E - V_{CE} + R_E \cdot I_E = E - V_{CE} - I_C \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) R_E =$$

$$\textcircled{2} \quad U_{RC} = I_C \cdot R_C$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow R_C = \frac{E - V_{CE} - I_C \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) R_E}{I_C} = 1 \text{ k}\Omega$$

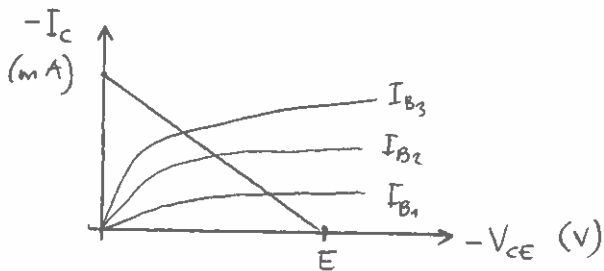
Don't forget; this was Large Signal analysis





$$R_1 = R_3 = 20 R \quad R_2 = R_4 = R$$

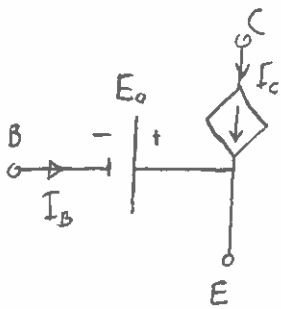
$$T_1, T_2: \beta = 50, E_0 = V_{BE} = \frac{E}{10} \quad \underline{\underline{V_{CE} = 0}}$$



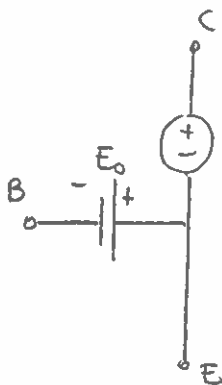
$T_2$ , large signal mode! (pnp)

First we solve for  $T_2$  in cut-off ( $I_{C2} \rightarrow 0$ )

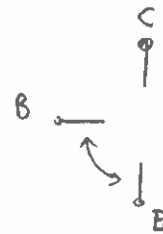
active



saturation



cut-off



$$I_B = I_C = I_E = 0$$

$$V_{BE} = -E_0$$

$$V_{EB} = E_0$$

$$\begin{cases} u_{EB_2} = E_0 \quad (= -u_{BE_2}) \\ I_{B_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow u_2 = E - E_0$$

$$u_2 = u_1 \quad (I_{B_2} = 0)$$

$$I_2 = \frac{E - u_1}{R_2} \quad I_{C_1} = I_2$$

$$I_{C_1} = \beta I_{B_1} \quad \begin{cases} u_{in} = R_1 I_{B_1} + u_{BE} \\ u_{BE_1} = E_0 \\ I_{B_1} = \frac{I_{C_1}}{\beta} = \frac{I_2}{\beta} \end{cases}$$

$$u_{in} = R_1 \cdot \frac{I_2}{\beta} + E_0 = \frac{R_1}{\beta} \cdot \frac{E - u_1}{R_2} + E_0 \quad u_1 = u_2 = E - E_0$$

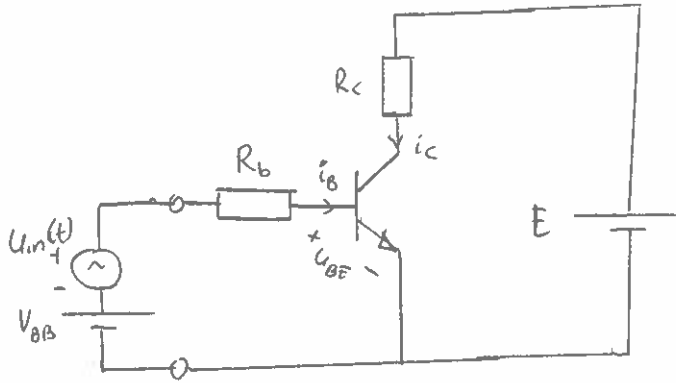
$$u_{in} = \frac{R_1}{\beta} \cdot \frac{E - (E - E_0)}{R_2} + E_0 = \frac{R_1}{\beta} \cdot \frac{E_0}{R_2} + E_0 = \left( \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{1}{\beta} + 1 \right) E_0 =$$

$$= \left( \frac{20}{50} + 1 \right) \frac{E}{10} = \underline{0.14 E \quad T_2\text{-cut-off}}$$

Solve for  $T_2$  in saturation

Hur erhålls förstärkning?

Krets med npn-transistor



Ingång:

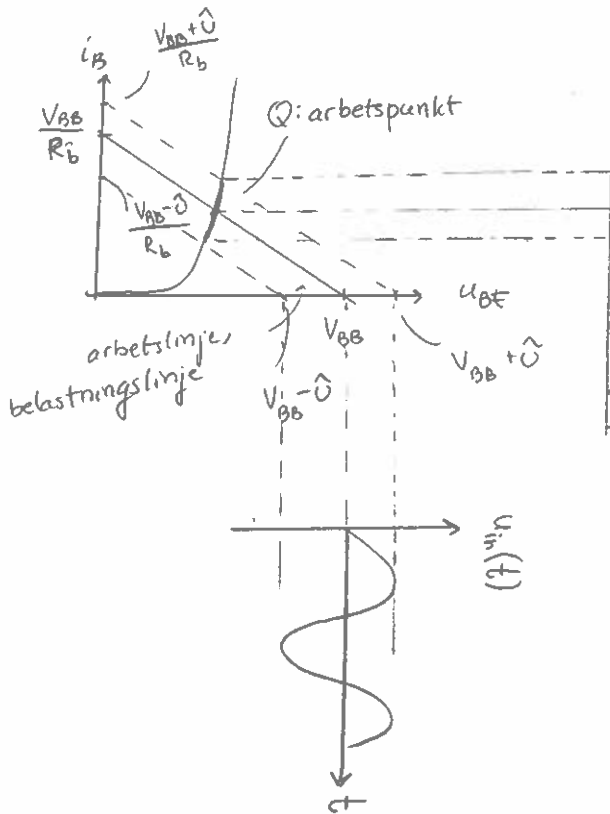
$$\text{KVL: } V_{BB} + u_{in}(t) = R_b \cdot i_B(t) + u_{BE}(t)$$

$$i_B(t) = \frac{V_{BB} + u_{in}(t)}{R_b} - \frac{1}{R_b} \cdot u_{BE}(t)$$

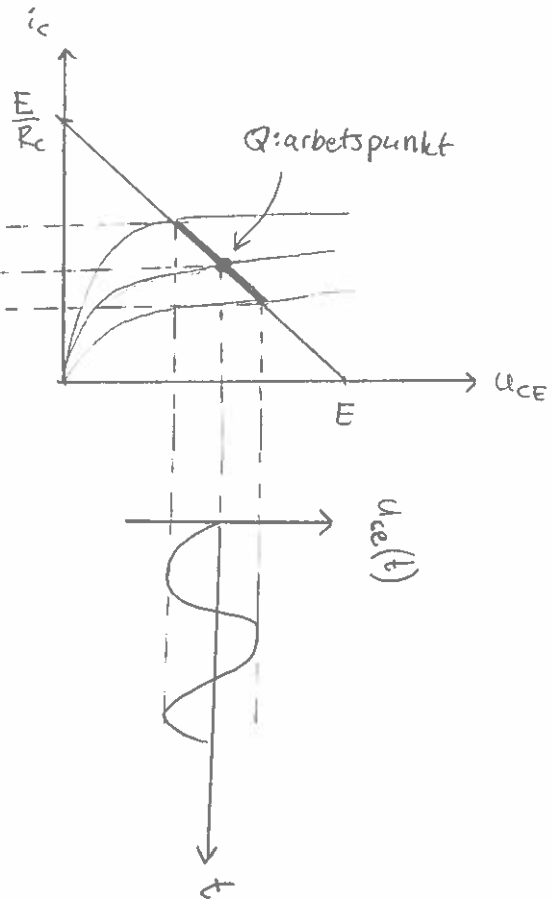
Utgång:

$$\text{KVL: } E = R_c \cdot i_C(t) + u_{CE}(t)$$

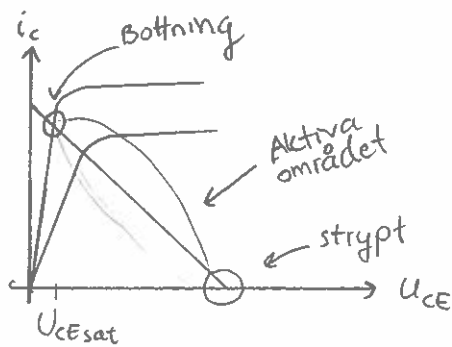
Ingångskarak. ( $u_{in}(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$ )



Utgångskarakteristik



## Transistorns tillstånd (utg. karakt.)



Ingångs- och utgångskaraktäristiken för en pnp-transistor liknar npn-fallet, men byt tecken på alla strömmar och spänningar.

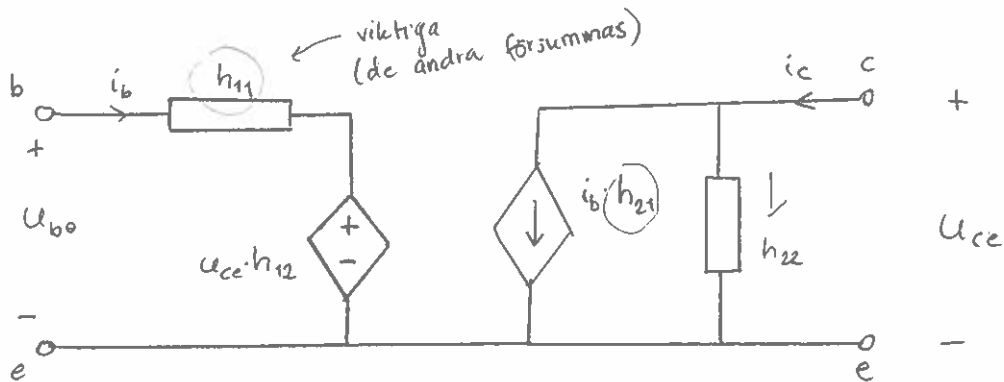
## Transistorns småsignalschema

Beskriver små signalvariationer runt ett jämviktsläge (arbetspunkt, Q).

[Linjärisering runt en arbetspunkt]

Oberoende av transistortyp (npn, pnp)

## h-parameter schema (Hambley s. 10)



$$U_{be} = i_b \cdot h_{11} + U_{ce} \cdot h_{12}$$

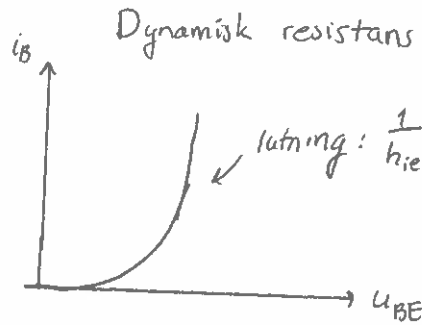
$$i_c = i_b \cdot h_{21} + U_{ce} \cdot h_{22}$$

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_b \\ u_{ce} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{be} \\ i_c \end{bmatrix}$$

{ h: hybrid  $\Rightarrow$  olika enheter på h-parameter }

obs! inte samma enhet

$$h_{11} = h_{ie} = \left. \frac{\Delta u_{be}}{\Delta i_b} \right|_{u_{ce} = \text{konst}}$$

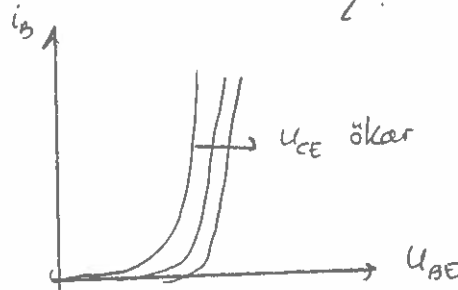


$$h_{12} = h_{re} = \left. \frac{\Delta u_{be}}{\Delta u_{ce}} \right|_{i_b = \text{konst}}$$

"reverse"

Återkopplingsfaktorn

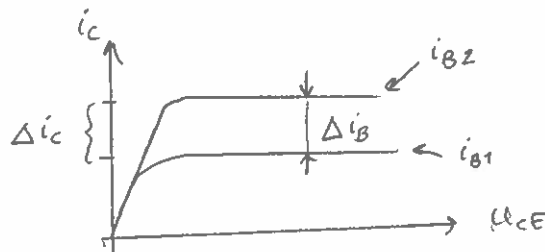
Försummas normalt ( $h_{re} = 0$ )



$$h_{21} = h_{fe} = \left. \frac{\Delta i_c}{\Delta i_b} \right|_{u_{ce} = \text{konst}}$$

forward

strömförstärkning (småsignal)



kommer ej på tenta

$$h_{22} = h_{oe} = \left. \frac{\Delta i_c}{\Delta u_{ce}} \right|_{i_b = \text{konst}}$$

Utadmittans (p.g.a bärvidelsmodulation) (kallas också Early effekt)

Försummas ofta.

1 end fre (2.3)





## Laplace transform

### Diod

s. 74

karaktäristik  
backström  $I_s$   
knäspänning  $U_r$   
framspänd/backspänd diod  
dynamisk resistans  $r_d$   
ideal diod  
nägra diodkretsar  
arbetspunkt  $Q$

### Zenerdiod

s. 79

### Bipolär transistor (BJT)

Aktiv, Strypt, Botnad

Storsignalmodell

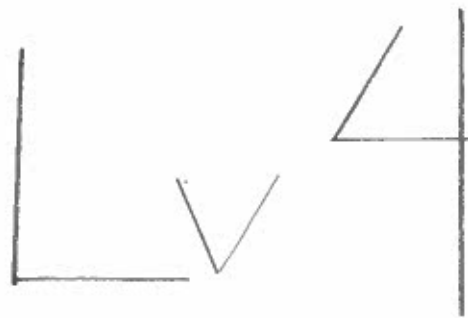
s. 84

Exempel

Shockleys ekvation  
ingångs-/utgångskaraktäristik  
Förstärkning

Transistorns småsignalschema

s. 94



Elektriska nät och system

med Ants Silberberg  
Hamid

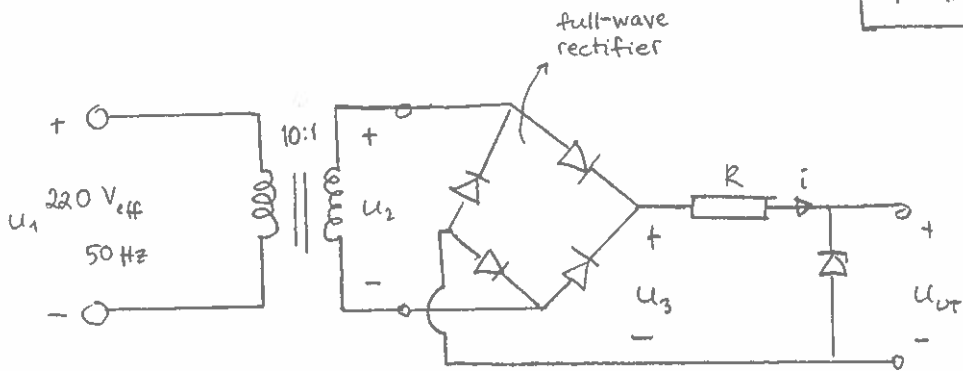
[ ESS 115 ]



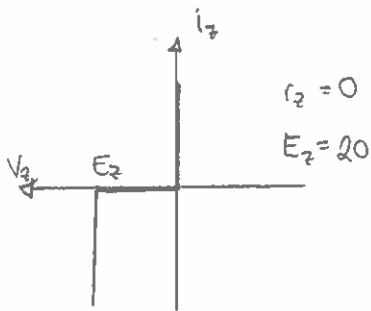
C5, D5, E2

2010-11-15  
Måndag

C5)

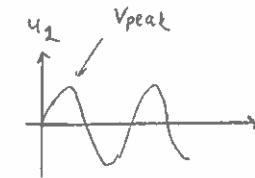


$U_{Ur} = ?$     $R = 100 \Omega$

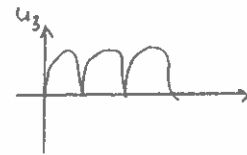


root mean square  

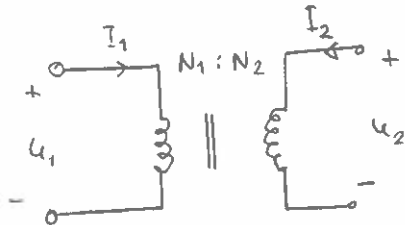
$$V_{eff} = V_{rms} = \frac{V_{peak}}{\sqrt{2}}$$



$u_3 = |u_2|$



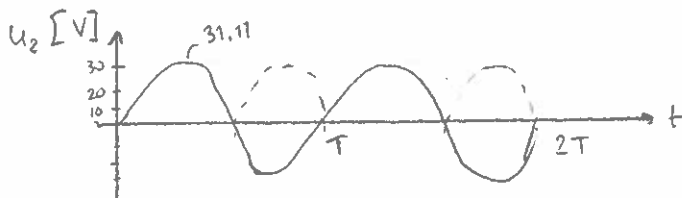
transformator:



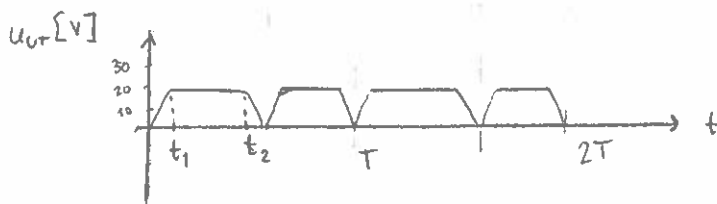
$\frac{U_1}{N_1} = \frac{U_2}{N_2}$

$N_1 I_1 + N_2 I_2 = 0$

$u_2 = A \sin \omega t$ ,    $A = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot 220 = 31.11 \text{ V}$



$U_{Ur} = E_z$ ,  $u_3 > E_z$   
 $u_3$ ,  $u_3 \leq E_z$



$$f = 50 \text{ Hz} \Rightarrow T = \frac{1}{50} = 20 \text{ ms}$$

$$E_z = U_{UT} = A \sin 2\pi f t_1 \quad (U_{UT} \leq E_z)$$

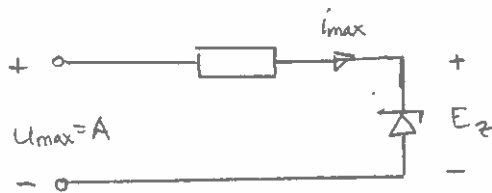
$$2\pi f t_1 = \arcsin \frac{E_z}{A} \quad t_1 = \frac{1}{100\pi} \arcsin \frac{20}{31.11} = 2.2 \text{ ms}$$

$$t_2 = \frac{T}{2} - t_1 = 10 - 2.2 = \underline{\underline{7.8 \text{ ms}}}$$

en diod ≠ full-wave rectifier!



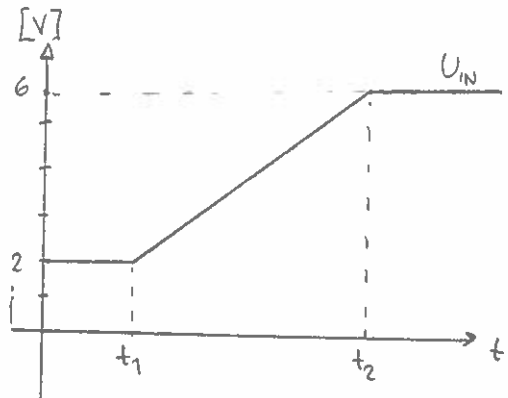
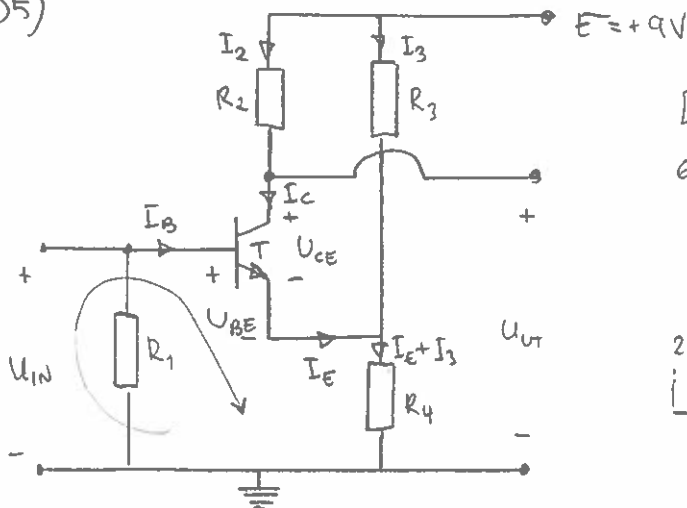
i max value



$$A = R \cdot i_{\max} + E_z$$

$$i_{\max} = \frac{A - E_z}{R} = \frac{31.11 - 20}{100} = \underline{\underline{0.111 \text{ A}}}$$

D5)



$$E_o = U_{BE} = 0.6$$

$$V_{CE(sat)} = 0$$

$$\beta = 100$$

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 4.7 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 6.8 \text{ k}\Omega$$

$$R_4 = 2.2 \text{ k}\Omega$$

DC-Analysis large signal

case 1) Transistor cut-off

borderline case: cut-off  $\rightarrow$  active

$$I_B = I_C = I_E = 0, \text{ but, } U_{BE} = E_0 = 0.6 \text{ V} \Rightarrow U_{UT} = E = 9$$

$$U_{IN} = U_{BE} + E \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 0.6 + 9 \frac{2.2k}{6.8k + 2.2k} = \underline{\underline{2.8 \text{ V}}}$$

if  $U_{IN} < 2.8 \text{ V}$ :  
transistor is cut-off

case 2) Transistor in saturation

$$U_{CE(SAT)} = 0 \quad I_C \cdot R_2 = I_3 \cdot R_3 \Rightarrow I_3 = I_C \frac{R_2}{R_3} = I_C \frac{4.7}{6.8}$$

$$E = R_2 I_C + \underbrace{(I_E + I_3)}_{I_C + I_B} R_4 = R_2 I_C + I_C \left[ 1 + 1/\beta + \frac{R_2}{R_3} \right] R_4$$

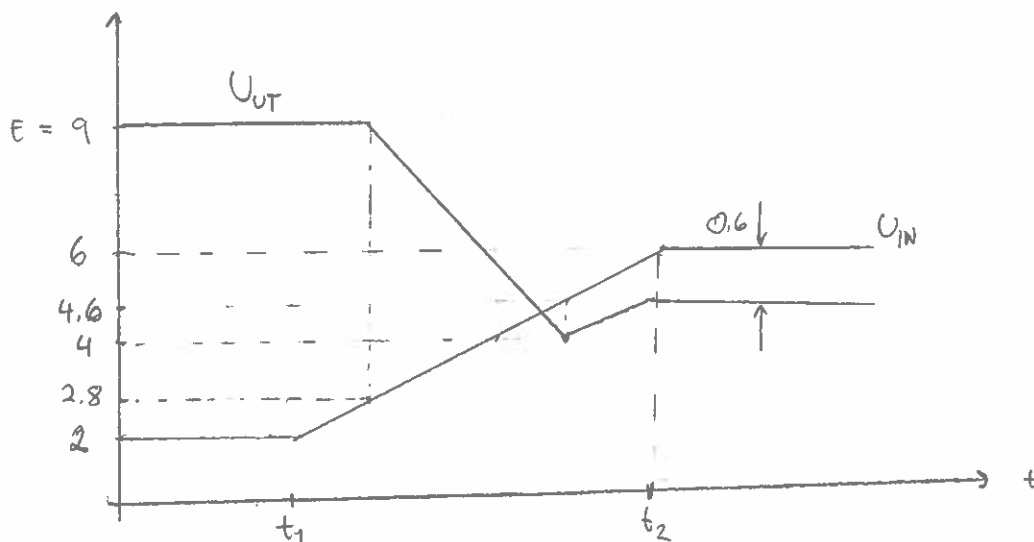
$$\Rightarrow I_C = \frac{E}{R_2 + (1 + 1/\beta + \frac{R_2}{R_3}) R_4} = \dots = \underline{\underline{1.066 \text{ mA}}}$$

$$U_{IN} - U_{BE} = E - R_2 I_C \Rightarrow U_{IN} = E - R_2 I_C + U_{BE} = 9 - 4.7k(1.066 \text{ mA}) + 0.6 = \underline{\underline{4.6 \text{ V}}}$$

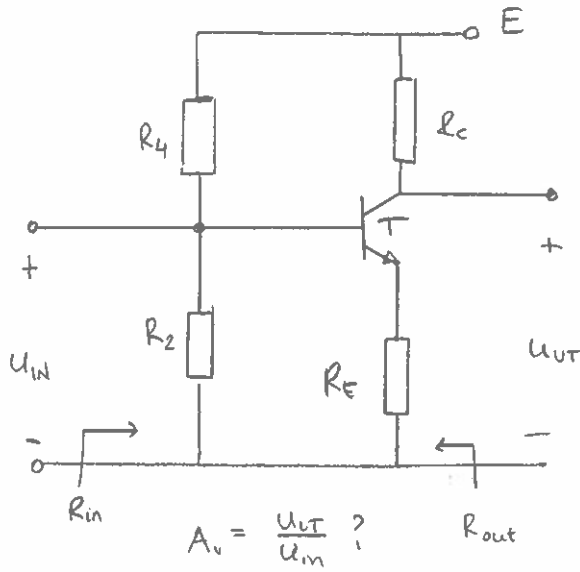
with  $U_{IN} = 4.6 \text{ V}$ ,  $U_{IN} = U_{BE} + U_{UT}$

$$U_{UT} = U_{IN} - U_{BE} = 4.6 - 0.6 = \underline{\underline{4 \text{ V}}}$$

$U_{IN} > 4.6 \text{ V}$  (transistor in saturation)  $U_{UT} = U_{IN} - 0.6$



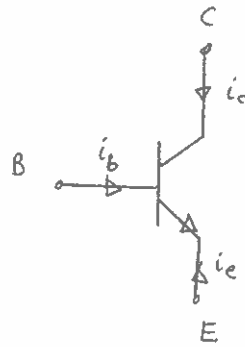
E2)



- $R_1 = 18 \text{ k}\Omega$
- $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$
- $R_C = 2.2 \text{ k}\Omega$
- $R_E = 200 \Omega$
- $E = 10 \text{ V}$

BC 107 B

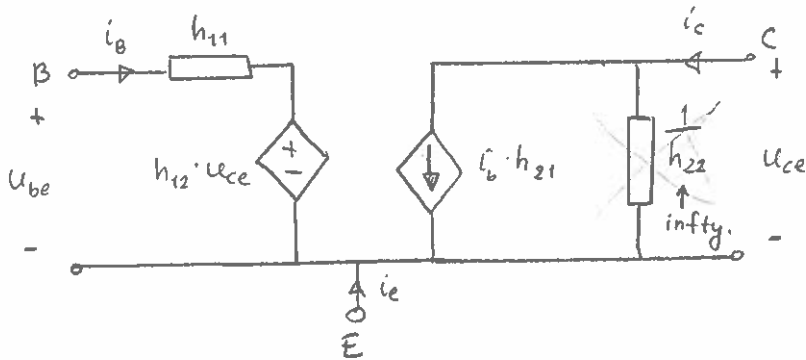
operating point  $\begin{cases} I_C = 2 \text{ mA} \\ U_{CE} = 5 \text{ V} \end{cases}$



$i_b = \underbrace{I_B}_{\text{large signal}} + \underbrace{i_b}_{\text{small signal}}$

h-parameter model  
 $\frac{1}{h_{oc}} = \infty, h_{re} = 0$

h-parameter (small signal model)

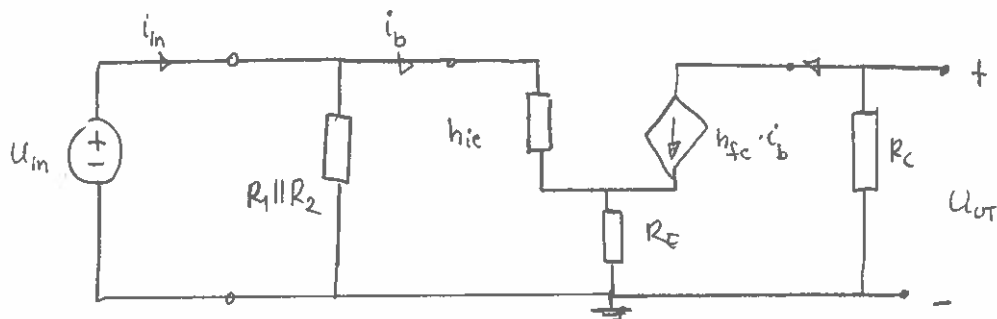


$h_{11} = h_{ie}$        $h_{21} = h_{\beta} \rightarrow \text{current gain}$   
 $h_{12} = h_{re}$        $h_{22} = h_{oe}$

Transistor BC107B      Datasheet:  $\begin{cases} h_{ie} = 4.5 \text{ k}\Omega \\ h_{fe} = 330 \end{cases}$

Steps to analyze transistor amplifier

- 1) determine DC operating point
- 2) Convert to AC-only model
  - DC voltage sources are shorts to ground
  - DC current sources are open circuit
- 3) Use Thevenin circuit if necessary
- 4) Replace transistor with small signal model
- 5) simplify the circuit
- 6) Calculate small signal parameters ( $R_m, R_{out}, A_v, \dots$ )



$$R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad A_v = \frac{u_{out}}{u_{in}}$$

$$u_{out} = -i_b \cdot h_{fe} \cdot R_C$$

$$u_{in} = i_b \cdot h_{ie} + R_E (i_b + i_b \cdot h_{fe}) = i_b (h_{ie} + R_E (1 + h_{fe}))$$

$$\frac{u_{out}}{u_{in}} = \frac{-h_{fe} \cdot R_C}{h_{ie} + R_E (1 + h_{fe})} = -10.3 \text{ times}$$

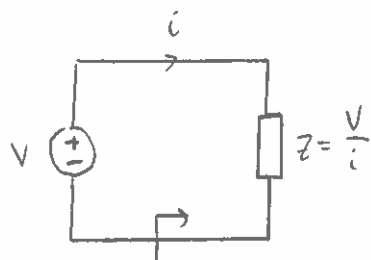
$$h_{fe} \gg 1$$

$$R_E (1 + h_{fe}) \gg h_{ie}$$

$$\Rightarrow \frac{u_{out}}{u_{in}} = -\frac{R_C}{R_E}$$



## Input impedance



approximation  $R_{in} = R_1 \parallel R_2$

$$i_{in} = \frac{u_{in}}{R_1 \parallel R_2} + i_b = u_{in} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} + \frac{1}{h_{ie} + R_E(1+h_{fe})} \right)$$

$$R_{in} = \frac{u_{in}}{i_{in}} = \frac{R_1 R_2 (h_{ie} + R_E(1+h_{fe}))}{(R_1 + R_2) R_E h_{fe} + R_1 R_2} = 1.76 \text{ k}\Omega$$

## output impedance

- 1) Ground the input
- 2) apply a test voltage at output

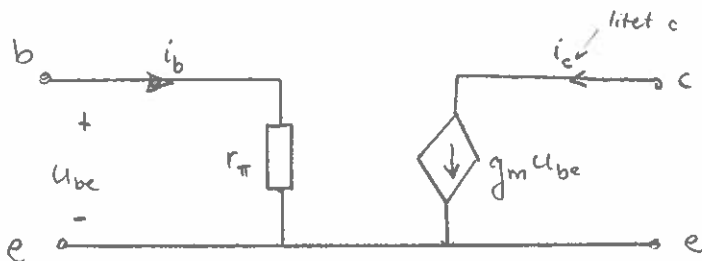
$$u_{in} = 0 \rightarrow i_b = 0 \rightarrow h_{fe} i_b = 0$$

→ current source: open circuit

$$R_{out} = \frac{u_o}{i_o} = \underline{R_c = 2.2 \text{ k}\Omega}$$

## Alternativ småsignalmodell

Förenklad hybrid- $\pi$  modell (låga frekvenser)



Från transistorens ingångskaraktistik

$$i_b = I_s e^{\frac{U_{BE}}{V_T}} \quad U_{BE} = U_{BE} + U_{be}$$

$$i_c = I_s e^{\frac{1}{V_T}(U_{BE} + U_{be})} = \underbrace{I_s e^{\frac{U_{BE}}{V_T}}}_{I_C} e^{\frac{U_{be}}{V_T}} = \left. \begin{array}{l} \text{"små signaler"} \\ U_{be} \ll V_T \\ \text{ser utveckla} \end{array} \right\}$$

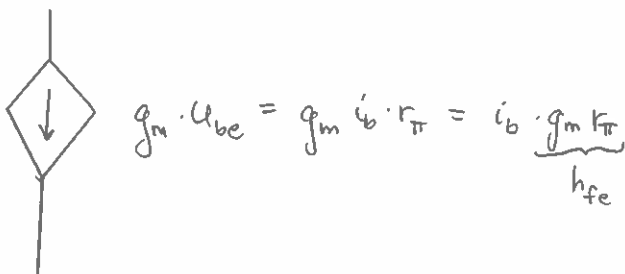
Försumma högre ordningens termer

$$i_c = I_C \left(1 + \frac{U_{be}}{V_T}\right) = I_C + \underbrace{U_{be} \frac{I_C}{V_T}}_{i_c \ll \text{litet } c}$$

$$i_c = \frac{I_C}{V_T} U_{be} = g_m \cdot U_{be}$$

Impedans:  $r_{\pi} = \frac{U_{be}}{i_b} = \frac{U_{be}}{\frac{i_c}{\beta}} = \frac{\beta}{g_m} = \frac{\beta V_T}{I_C} = \frac{V_T}{I_B}$

Vidare



Samband mellan h och  $\pi$  param. schema

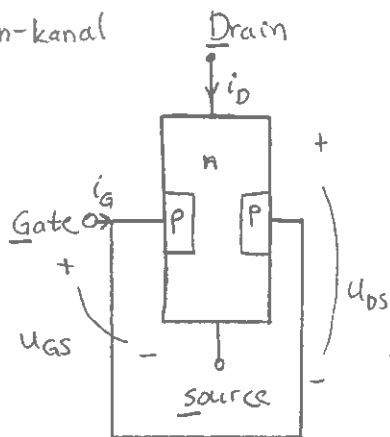
$$h_{ie} = r_{\pi} \quad h_{fe} = g_m \cdot r_{\pi} \Rightarrow g_m = \frac{h_{fe}}{h_{ie}}$$

## JFET

Junction Field Effect Transistor

unipolär - en typ av laddningsbärare

n-kanal



\* Gate mkt kraftigare dopad än kanalen (n-skikt)

\* pn-övergångar backspända i aktiva området

\* Hög inimpedans

## Funktion

1)  $U_{GS} = 0$  Applicera  $U_{DS} > 0$

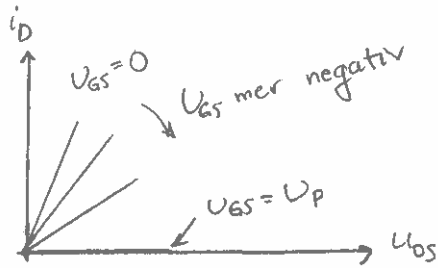
$i_D$  flyter från D till S genom kanal av fria laddningsbärare

2)  $V_{GS} < 0$        $V_{DS} > 0$  men "liten"

Låt  $V_{GS}$  bli mer negativ, pn-övergången blir kraftigare backspänd. Utarmningsområdet runt G växer, kanal för fria laddningsbärare minskar.

Kanal försvinner då  $V_{GS} = V_p$

Resistans i kanal ökar då  $V_{GS}$  blir mer negativ.

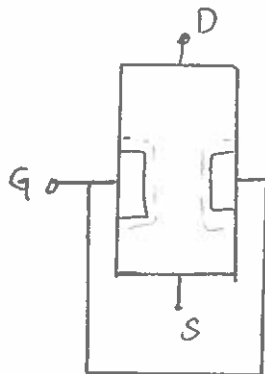


$V_p$ : pinch off spänning

3)  $V_{GS}$  hålls konstant ( $V_p < V_{GS} < 0$ )

Öka  $V_{DS}$   
kontinuerligt spänningsfall längs kanalen.  
spänning mellan en punkt i kanalen och G varierar

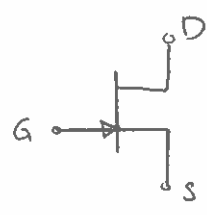
Kraftigare utarmning mot D



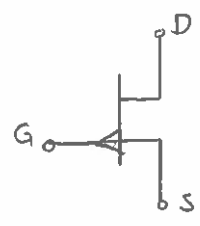
$V_{DS}$  ökar mer. → Pinch off område (strömområde)

$i_D$  mättas,  $i_D$  ökar ej ytterligare om  $V_{DS}$  växer

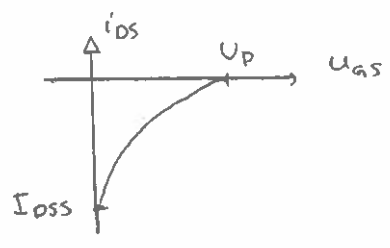
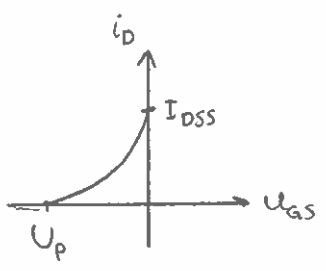
symbol n-kanal



p-kanal



I strömområde



Pinch off spänning

$$U_p < 0$$

$$> 0$$

$I_{DSS}$

$$U_p > 0$$

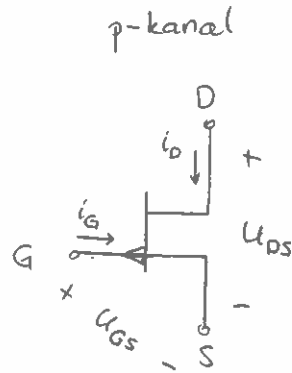
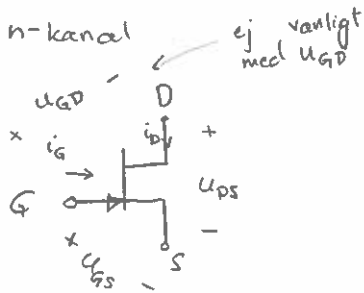
$$< 0$$

lend män

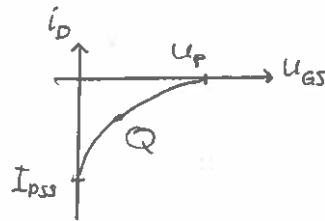
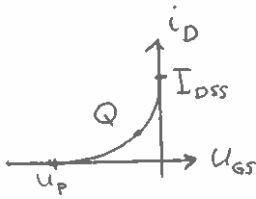
2010-11-16  
Tisdag

# Fälteffekttransistor

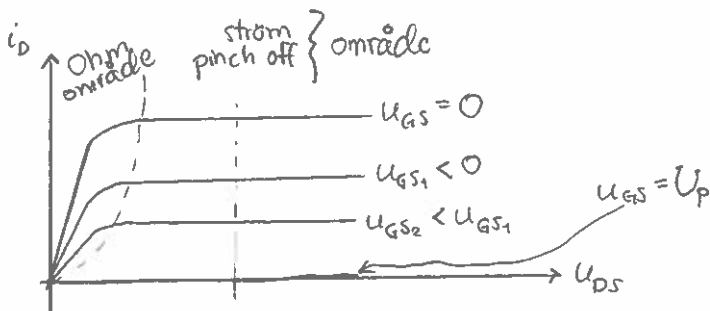
## JFET



### strömområde



### Utgångskaraktäristik (n-kanal)



#### □ Ohm område

$i_D = f(U_{GS})$  ;  $i_D$  prop. mot spänningen  $U_{DS}$   
(för "små" värden på  $U_{DS}$ )

□ Strömområde

n-kanal:  $U_p < U_{GS} < 0$  och  $U_{GD} = U_{GS} - U_{DS} < U_p$

p-kanal:  $0 < U_{GS} < U_p$ ,  $U_{GD} = U_{GS} - U_{DS} > U_p$

$$i_D = I_{DSS} \left(1 - \frac{U_{GS}}{U_p}\right)^2$$

$$i_G = 0 \quad (\sim 10^{-9} A)$$

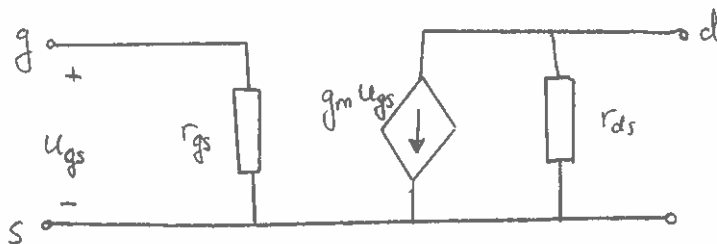
□ Cut off

$$i_D = 0$$

n-kanal  $U_{GS} < U_p$   
p-kanal  $U_{GS} > U_p$

Småsignalschema

I strömområdet (samma för n- och p-kanal)



ofta sätts  $r_{gs} = \infty$  och  $r_{ds} = \infty$

$$g_m = \frac{\partial i_D}{\partial U_{GS}} = - \underbrace{\frac{2 I_{DSS}}{U_p}}_{> 0} \underbrace{\left(1 - \frac{U_{GS}}{U_p}\right)}_{> 0} > 0$$

↑  
 $I_{DSS}$  och  $U_p$   
olika tecken

Typiska värden:

$r_{ds}$	: 0,1-1 M $\Omega$	"Utimpedans"
$r_{gs}$	: $10^8 \Omega$	"Inimpedans"
$g_m$	: 0,1-10 mA/V	"trans konduktans"

### Differentialförstärkare

önskad funktion

- \* Förstärker skillnadssignaler  
(DM: Differential Mode)
- \* Undertrycker summasignaler  
(CM: Common Mode)

$A_{DM}$ : Förstärkning för skillnadssignal (nyttig/intressant signal)  
 $A_{CM}$ : — " ————— summasignaler (önskad signal, störning, brus)

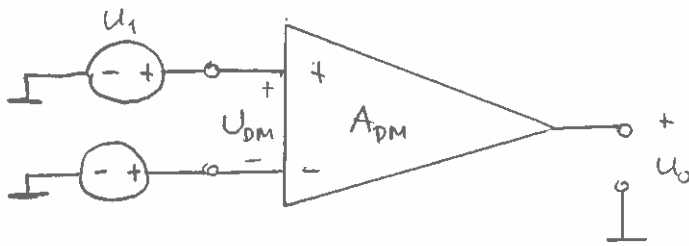
### Kvalitetsmått

Common Mode Rejection Ratio

$$CMRR = \left| \frac{A_{DM}}{A_{CM}} \right|$$

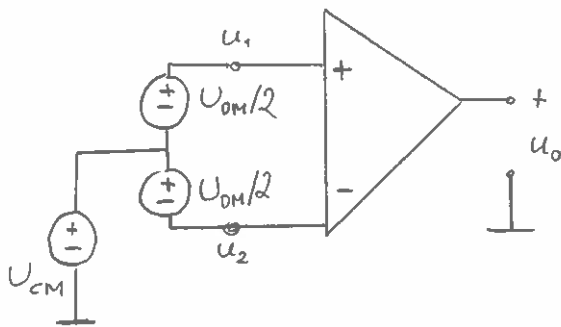


Idealt ( $A_{cm} = 0$ )



$$u_0 = A_{DM} \underbrace{(u_1 - u_2)}_{U_{DM}}$$

Verklig Förstärkare ( $A_{cm} \neq 0$ )



$$u_1 = U_{cm} + \frac{U_{DM}}{2}$$

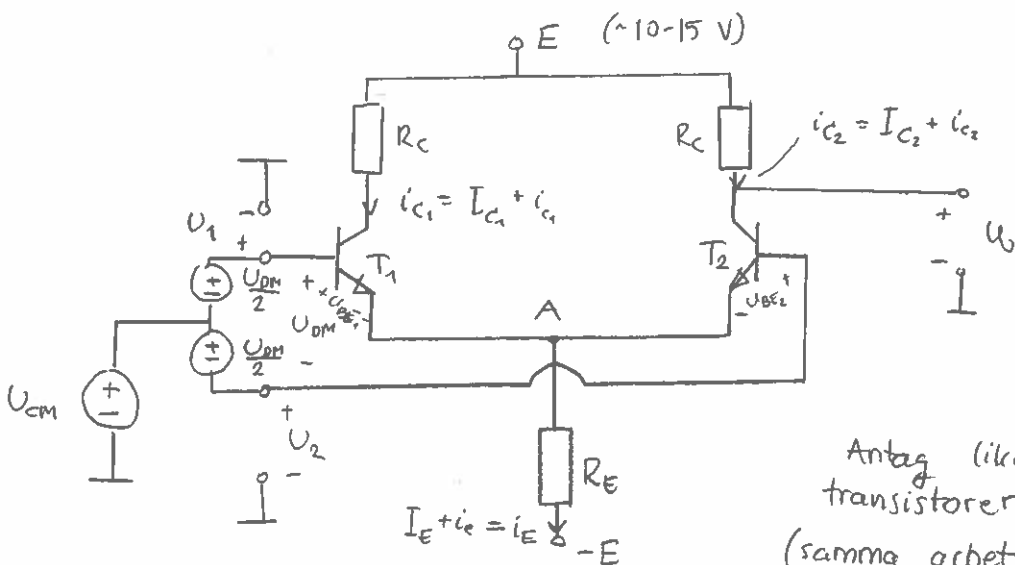
$$u_2 = U_{cm} - \frac{U_{DM}}{2}$$

$$U_{cm} = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

$$U_{DM} = u_1 - u_2$$

$$u_0 = A_{DM} \cdot U_{DM} + A_{cm} \cdot U_{cm}$$

### Differentialförstärkarsteg med BJT



Antag lika transistorer (samma arbetspunkt)

$$i_E \approx \left\{ \text{Försumma basströmmar} \right\} \approx i_{c1} + i_{c2} =$$

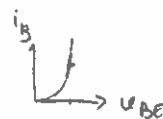
$$= \left\{ I_{c1} = I_{c2} = I_C \right\} \Rightarrow i_E = 2I_C + \underbrace{i_{c1} + i_{c2}}_{i_e}$$

□ DM förstärkning

Beräkna  $A_{DM} = \frac{u_D}{U_{DM}} \Big|_{u_{cm}=0}$  där  $U_{DM} = u_1 - u_2$

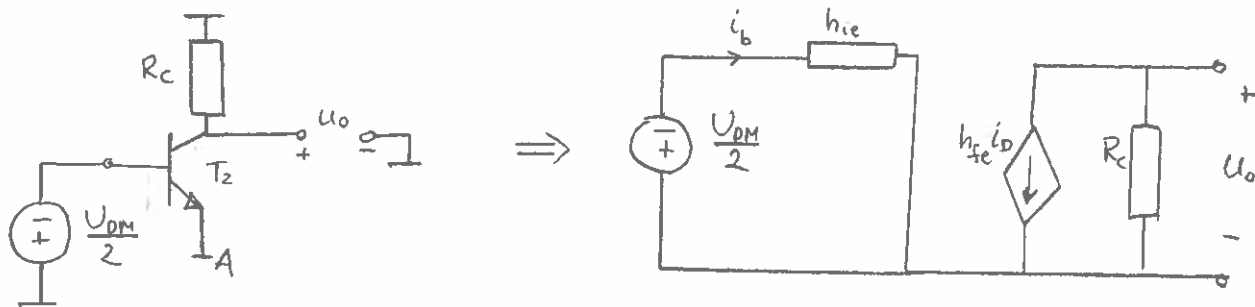
Om  $U_{DM} > 0 \Rightarrow$  strömmen i  $T_1$  ökar men strömmen i  $T_2$  minskar

Förändringarna blir lika stora men motriktade  $i_{c1} = -i_{c2}$



Ingen strömändring i  $R_E$ . Punkten "A" blir virtuell jord.

Betrakta "halva" först.steget, välj  $T_2$   
småsignalberäkning



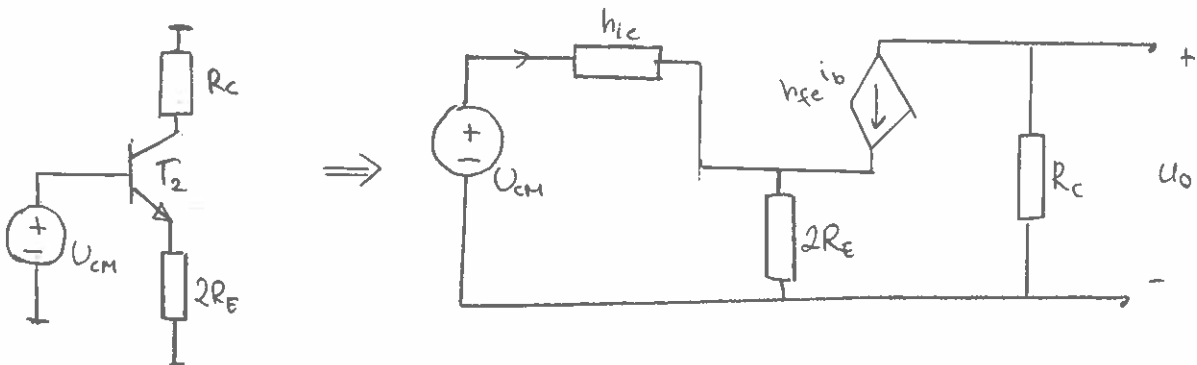
$$\left. \begin{aligned} \frac{U_{DM}}{2} &= -i_b h_{ie} \\ u_o &= -h_{fe} i_b \cdot R_C \end{aligned} \right\} A_{DM} = \frac{u_o}{U_{DM}} = \frac{h_{fe} R_C}{2 h_{ie}}$$

□ CM - förstärkning

Beräkna  $A_{cm} = \frac{u_o}{u_{cm}} \Big|_{u_{dm}=0}$

Strömmen ökar (alt. minskar) lika mycket i bägge transistorerna. Strömmen genom  $R_E$  ökar (alt. minskar) med  $\{ i_{c1} = i_{c2} = i_c \}$   $i_e \approx 2i_c$

Vi behöver bara räkna på "halva" kretsen om vi byter  $R_E$  mot  $2R_E$ .



$$u_{cm} = i_b \cdot h_{ie} + i_b (1 + h_{fe}) 2R_E$$

$$u_o = -h_{fe} i_b \cdot R_c$$

$$A_{cm} = - \frac{h_{fe} \cdot R_c}{h_{ie} + (1 + h_{fe}) 2R_E}$$

OBS!  $h_{fe} \gg 1$ ,  $h_{ie} \ll h_{fe} \cdot 2R_E$

$$A_{cm} \approx - \frac{R_c}{2R_E}$$

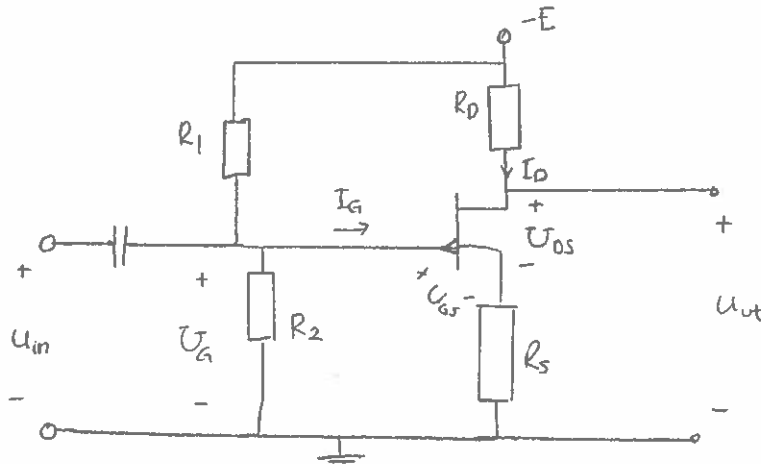
$$\text{Och CMRR} = \left| \frac{A_{dm}}{A_{cm}} \right| = \frac{h_{fe} \cdot R_E}{h_{ie}}$$

D11

2010-11-19  
Fredag

Beräkna  $I_D$ ,  $U_{GS}$  och  $U_{OS}$  om

$|I_{DSS}| = 4,0 \text{ mA}$  och  $|U_p| = 4,0 \text{ V}$ . Antag  $r_{gs} = \infty$ .  
 $E = 60 \text{ V}$ ,  $R_1 = 1,3 \text{ M}\Omega$ ,  $R_2 = 200 \text{ k}\Omega$ ,  $R_D = 18 \text{ k}\Omega$ ,  $R_S = 4,0 \text{ k}\Omega$

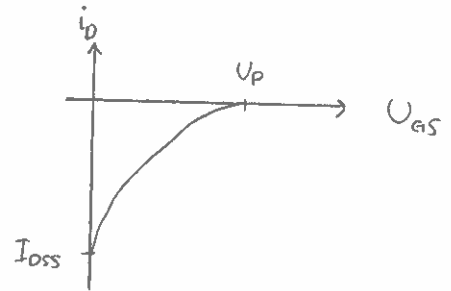


p-kanal, J-FET

I strömområdet:  $i_D = I_{DSS} \left(1 - \frac{U_{GS}}{U_p}\right)^2$

$$I_{DSS} = -4,0 \text{ mA}$$

$$U_p = 4,0 \text{ V}$$



Frågeställningen gäller att ta fram en arbetspunkt för transistoren

⇒ "storsignalberäkning" Totala konstanta strömmar och spänningar efterfrågas

Kretsekvationer (kapacitans ⇒ "Avbrott")

$$I_G = 0$$

samma ström genom  $R_1$  och  $R_2$ . spänningsdelning

$$U_G = -E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_G = U_{GS} + I_D R_S$$

Beräkna  $U_{GS}$ !  $I_D = I_D$  (konstant "drain-ström")

$$U_G = U_{GS} + R_S I_{DSS} \left(1 - \frac{U_{GS}}{U_P}\right)^2$$

$$\frac{U_G}{R_S I_{DSS}} = \frac{U_{GS}}{R_S I_{DSS}} + 1 - \frac{2U_{GS}}{U_P} + \frac{U_{GS}^2}{U_P^2}$$

$$U_{GS}^2 + U_{GS} \left(\frac{U_P^2}{R_S I_{DSS}} - 2U_P\right) + U_P^2 - \frac{U_G U_P^2}{R_S I_{DSS}} = 0$$

$$U_P = 4V, \quad I_{DSS} = -4,0 \cdot 10^{-3} A \quad U_G = -60 \cdot \frac{200}{1300+200} = -8V$$

Vi får

$$U_{GS}^2 + U_{GS}(-9) + 8 = 0$$

$$U_{GS} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{32}{4}} \quad U_{GS} = \frac{9}{2} \pm \frac{7}{2} = \begin{cases} 8V > U_P \\ 1V \end{cases}$$

∴  $U_{GS} = 1V$  (se grafen föreg. sida, 8V för stort)

"Det är omtaliskt  
när en föreläsare  
använder pq-formeln"  
-Hannes†

Beräkna  $I_D$

$$I_D = I_{DSS} \left(1 - \frac{U_{GS}}{U_P}\right)^2 = -40 \cdot 10^{-3} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \dots = -2.25 mA$$

KVL ger:

$$-E = I_D R_D + U_{DS} + I_D R_S$$

$$U_{DS} = -E - I_D (R_S + R_D) = \dots = -10.5 V$$

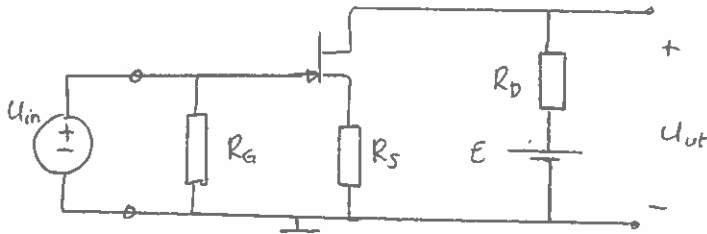
Kontroll: Är vi i transistorens strömområde?

$$U_{GD} = U_{GS} - U_{DS} = 1 - (-10.5) = 11.5 V > U_P \quad \text{OK!}$$

E9

Beräkna förstärkningen  $\frac{U_{ut}}{U_{in}}$

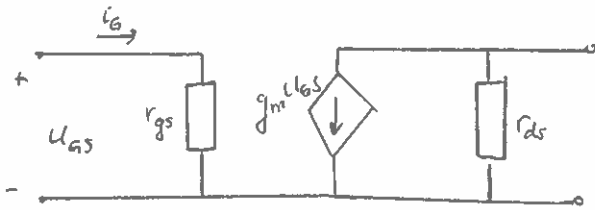
För transistoren gäller  $I_{DSS} = 6,0 \text{ mA}$ ,  $U_p = -1,0 \text{ V}$   
 $U_s \gg R_D$ ,  $r_{gs} = \infty$



$R_D = 1,0 \text{ k}\Omega$   
 $R_S = 200 \Omega$   
 $R_G = 500 \text{ k}\Omega$

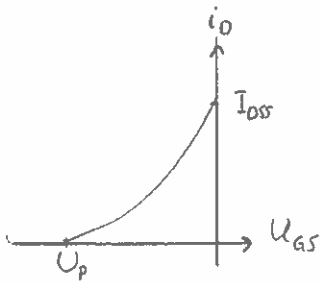
Beräkna förstärkning  $\Rightarrow$  småsignalberäkning

småsignalmodell



$r_{gs} = \infty$   
 $r_{ds}$  antas försummas ( $= \infty$ )  
 $g_m$ ?

JFET n-kanal

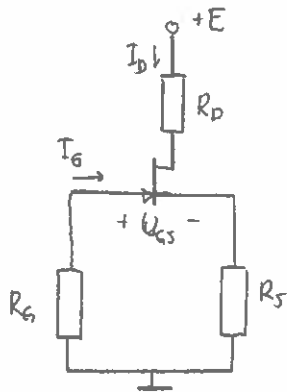


$$g_m = \frac{\partial I_D}{\partial U_{GS}}$$

$g_m$  fås från transistorens arbetspunkt!

Beräkna arbetspunkten ( $I_D$ ,  $U_{GS}$ )

Kan se det som konstant nu:



$$I_G = 0$$

$$\text{KVL: } U_{GS} + I_D R_S = 0$$

$$I_D = -\frac{U_{GS}}{R_S}$$

I strömmområdet

$$\begin{cases} I_D = I_{DSS} \left(1 - \frac{U_{GS}}{U_P}\right)^2 \\ I_D = -\frac{U_{GS}}{R_S} \end{cases}$$

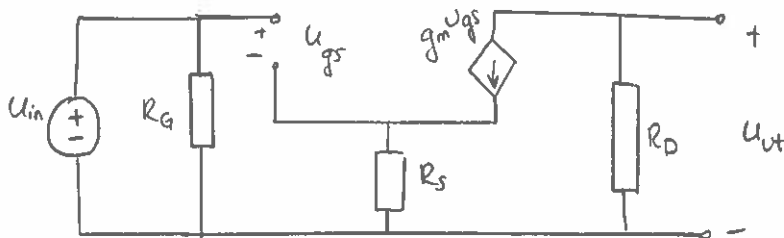
Eliminera  $I_D$ . Beräkna  $U_{GS}$  (2:a gradsekv.)  
Ger två lösningar

$$U_{GS} = \begin{cases} -2,42 \text{ V} & (\text{ogiltig}) \\ -0,41 \text{ V} \end{cases} \quad U_{GS} = -0,41 \text{ V}$$

Insättning ger  $I_D = 6,0 \cdot 10^{-3} \left(1 - \frac{-0,41}{-1}\right)^2 = 2,07 \text{ mA}$

$$g_m = \frac{\partial I_D}{\partial U_{GS}} = -\frac{2I_{DSS}}{U_P} \left(1 - \frac{U_{GS}}{U_P}\right) = \dots = 7,04 \text{ mA/V}$$

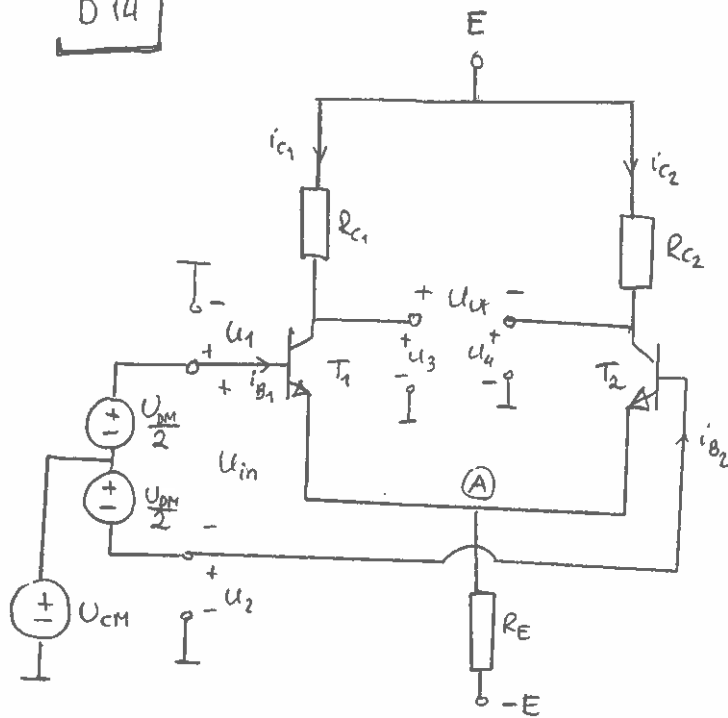
småsignalschema!



$$u_{out} = -g_m u_{gs} R_D, \quad u_{in} = u_{gs} + g_m u_{gs} R_S$$

$$\frac{u_{out}}{u_{in}} = \frac{-g_m R_D}{1 + g_m R_S} = \dots = \underline{\underline{-2,999}}$$

D 14



$$R_{c1} = R_c - \frac{\Delta R}{2}$$

$$R_{c2} = R_c + \frac{\Delta R}{2}$$

Lika

(hoe och hie försummas)

□ Symmetrisk utgång

$u_{ut} = u_3 - u_4$  vidare  $u_{in} = u_1 - u_2$   
 småsignalberäkningar (Först. In/Ut impedans efterfrågas)

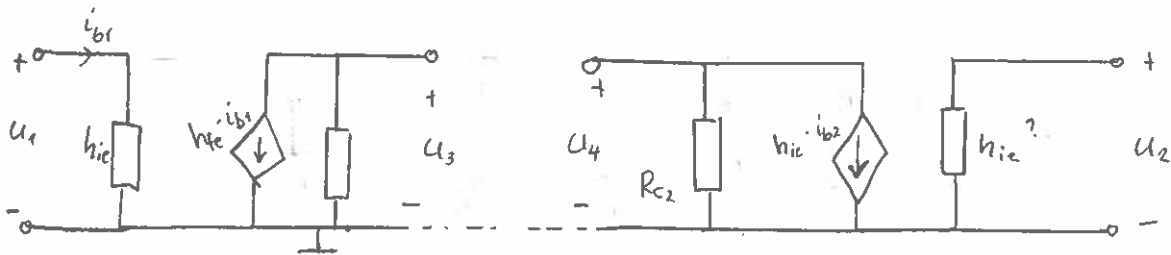
DM-signal ( $U_{cm} = 0$ )  $u_1 = -u_2 = \frac{U_{DM}}{2}$

$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \text{ ökar} \rightarrow i_{b1} \text{ ökar} \rightarrow i_{c1} \text{ ökar med } \Delta i_c \\ u_2 \text{ minskar} \rightarrow i_{b2} \text{ minskar} \rightarrow i_{c2} \text{ minskar med } \Delta i_c \end{array} \right.$

$\Rightarrow$  Ingen strömändring gnm  $R_E$  (A) blir "virtuell nod"



## Small-signal schematic



$$\begin{cases} u_1 = i_{b1} \cdot h_{ie} \\ u_3 = -h_{fe} i_{b1} \cdot R_{c1} \end{cases}$$

$$u_3 = -u_1 \frac{h_{fe} R_{c1}}{h_{ie}} = -\frac{U_{DM}}{2} \frac{h_{fe} R_{c1}}{h_{ie}}$$

p.s.s. for transistor  $T_2$

$$u_1 \rightarrow u_2 \quad u_3 \rightarrow u_4 \quad R_{c1} \rightarrow R_{c2}$$

$$u_4 = \frac{U_{DM}}{2} \cdot \frac{h_{fe} R_{c2}}{h_{ie}}$$

$$u_{ut} = u_3 - u_4 = -\frac{U_{DM}}{2} \frac{h_{fe}}{h_{ie}} (R_{c1} + R_{c2}) = -U_{DM} \frac{h_{fe}}{h_{ie}} R_C$$

$$A_{DM} = \frac{u_{ut}}{U_{DM}} = -\frac{h_{fe} R_C}{h_{ie}}$$

/end fre (2v4)



## Exempel med transistorer

Alternativ småsignalmodell (hybrid- $\pi$ ) s. 102

JFET (Fälteffekttransistor)

Småsignalschema s. 107

Differentialförstärkare

Kvalitetsmått  $CMRR$ ,  $A_{DM}$ ,  $A_{CM}$

Differentialförstärkarsteg med BJT

DM-förstärkning

CM-förstärkning

Exempel

LV5

Elektriska nät och system

Ants Silberberg

[ESS 115]

F2 Lp2 2010



/forts D14

CM-signal

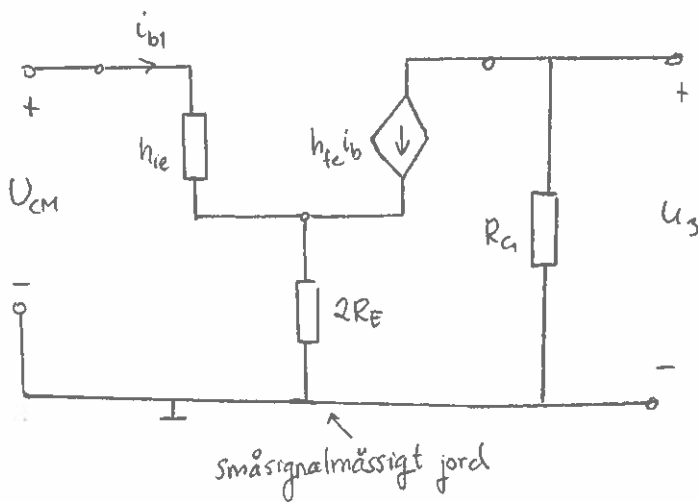
$$V_{DM} = 0 \quad [u_1 = u_2 = U_{CM}]$$

$u_1$  ökar  $\rightarrow i_{B1}$  ökar  $\rightarrow i_{C1}$  ökar med  $\Delta i_c$

$u_2$  ökar  $\rightarrow i_{B2}$  ökar  $\rightarrow i_{C2}$  ökar med  $\Delta i_c$

Ström ökar med  $2\Delta i_c$  genom  $R_E$ .  
 Kompensera för strömbökning genom  $R_E$ . Byt  $R_E$  mot  $2R_E$ ,  
 räkna på "halva" transistorkretsen.

Småsignalschema



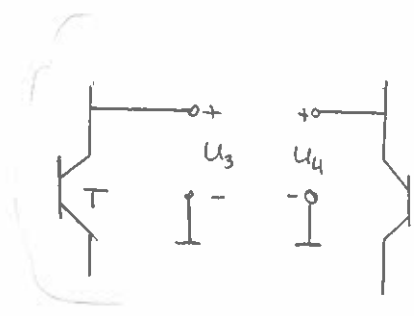
$$\begin{cases} U_{CM} = h_{ie} \cdot i_{B1} + i_b (1 + h_{fe}) 2R_E \\ U_3 = -h_{fe} i_{B1} R_C \end{cases}$$

$$u_3 = - \frac{h_{fe} R_{c1} U_{cm}}{h_{ie} + (1+h_{fe})2R_E}$$

p.s.s. för andra halvan av kretsen ("T2")  
 ( $u_3 \rightarrow u_4, R_{c1} \rightarrow R_{c2}$ )

$$u_4 = - \frac{h_{fe} R_{c2} U_{cm}}{h_{ie} + (1+h_{fe})2R_E}$$

$$u_{ut} = u_3 - u_4 = \frac{h_{fe} \Delta R \cdot U_{cm}}{h_{ie} + (1+h_{fe})2R_E}$$



$$R_{c1} = R_c - \frac{\Delta R}{2}$$

$$R_{c2} = R_c + \frac{\Delta R}{2}$$

$$\frac{u_{ut}}{U_{cm}} = \frac{h_{fe} \Delta R}{h_{ie} + (1+h_{fe})2R_E} = A_{cm}$$

Tidigare beräknades  $A_{DM} = - \frac{h_{fe} R_c}{h_{ie}}$  kvalitetsmått!

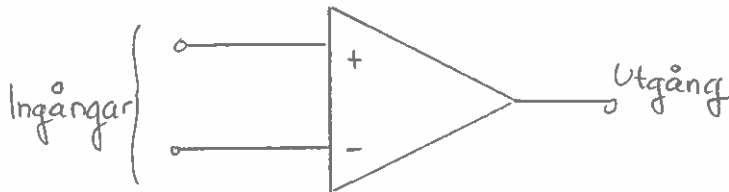
$$CMRR = \left| \frac{A_{DM}}{A_{CM}} \right| = \frac{h_{fe} \cdot R_c}{h_{ie}} \frac{(h_{ie} + (1+h_{fe})2R_E)}{h_{fe} \cdot \Delta R} = \frac{R_c}{\Delta R} \left( 1 + \frac{(1+h_{fe})2R_E}{h_{ie}} \right)$$

Finns lösning på hemsidan!

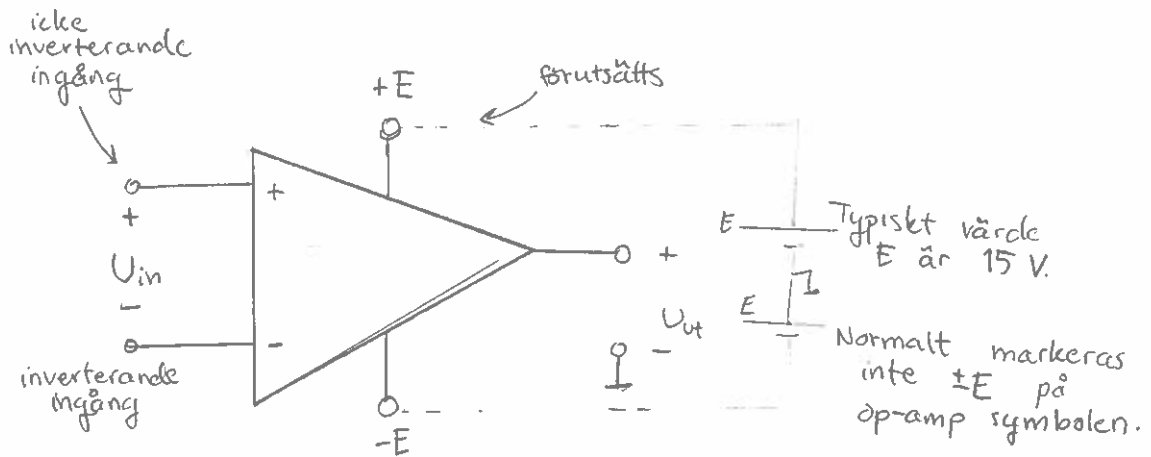
# Operationsförstärkare

"Op-amp" : (Operational Amplifier)

Allmänna begrepp

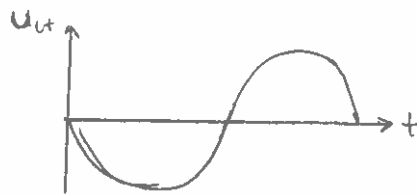
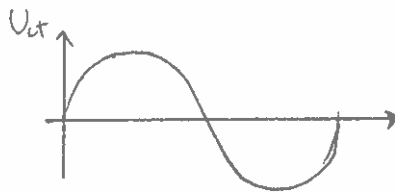
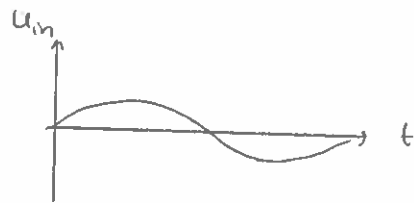
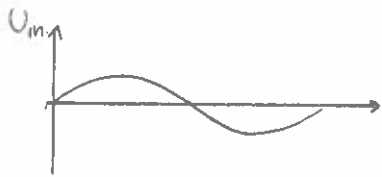
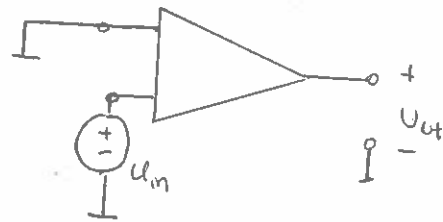
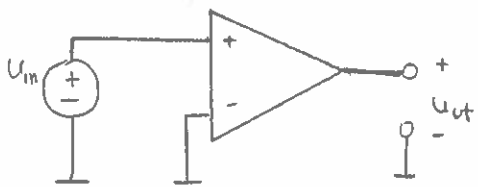
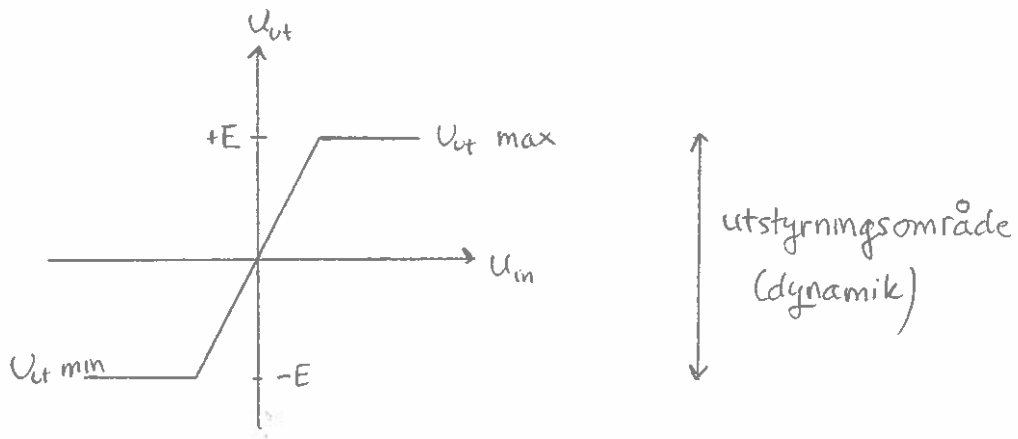


- \* Generell förstärkare med många tillämpningar
- \* Används i huvudsak för att förstärka "små" elektriska signaler (ström/spänning, (mV, V))
- \* Aktiv komponent måste förses med energi (matningsspänning)



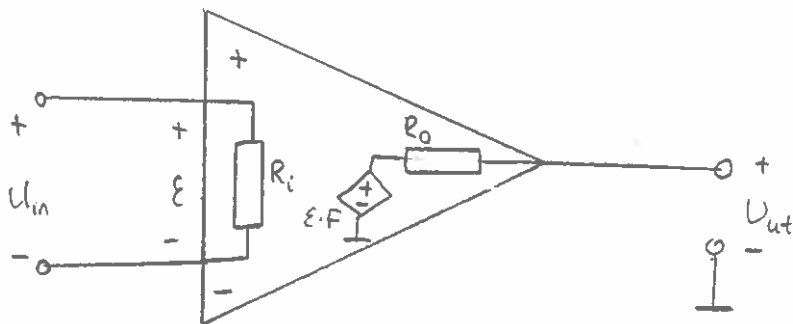
Förstärkning  $F = \frac{U_{out}}{U_{in}}$  (öppna först. / open loop gain)





En operationsförstärkare är en relativt komplicerad krets (Hambley Fig 7.55)

Utifrån sett kan vi beskriva operationsförstärkaren med följande (betydligt enklare) modell.



Vi kan förenkla modellen ytterligare genom att anta att op-först. är ideal.

En konstruktör eftersträvar att uppnå följande egenskaper

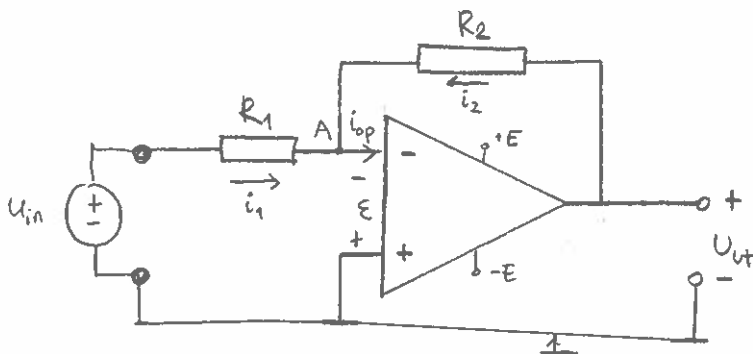
Ideal op-först.

Inimpedans	$R_i = \infty$
Uimpedans	$R_o = 0$
spänningsförst.	$F = \infty$
Bandbredd	$B = \infty$

Kan en sådan förstärkare vara användbar?

Låt oss studera en koppling där  $F \neq \infty$ .

## Inverterande förstärkare



Kännetecken: negativ återkoppling  
( $U_{ut}$  via  $R_2$  till minusgång)

Antag  $R_i = \infty$ ,  $R_o = 0$ ,  $F \neq \infty$  begränsad

$$i_{op} = 0 \quad \text{ty} \quad R_i = \infty$$

$$U_{ut} = \epsilon F \quad \text{ty} \quad R_o = 0$$

$$\text{KKA: } i_1 + i_2 + \overbrace{(-i_{op})}^{=0} = 0$$

$$i_1 = \frac{U_{in} + \epsilon}{R_1} \quad ; \quad i_2 = \frac{U_{ut} + \epsilon}{R_2} \quad ; \quad U_{ut} = \epsilon F$$

$$\frac{U_{in}}{R_1} + \frac{\epsilon}{R_1} + \frac{U_{ut}}{R_2} + \frac{\epsilon}{R_2} = 0 \quad \text{eliminera } \epsilon \left( \epsilon = \frac{U_{ut}}{F} \right)$$

$$\frac{U_{in}}{R_1} + \frac{U_{ut}}{FR_1} + \frac{U_{ut}}{R_2} + \frac{U_{ut}}{FR_2} = 0$$

$$\frac{U_{in}}{R_1} = -U_{ut} \frac{R_2 + FR_1 + R_1}{FR_1 R_2}$$

Bilda kvot ✓

$$\frac{U_{ut}}{U_{in}} = - \frac{FR_2}{FR_1 + R_1 + R_2} \quad \left\{ \text{div. med } FR_1 \right\}$$

$$\frac{U_{ut}}{U_{in}} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_1 + R_2}{FR_1}} \quad \text{Om } F \text{ stort } \frac{R_1 + R_2}{FR_1} \ll 1 \quad \text{och} \quad \frac{U_{ut}}{U_{in}} \approx -\frac{R_2}{R_1}$$

$$\boxed{\frac{U_{ut}}{U_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}} \quad \text{då } F \rightarrow \infty$$

Eliminera  $U_{ut}$  i vår ursprungliga KCL ekv.

$$\frac{U_{in}}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon F}{R_2} + \frac{\varepsilon}{R_2} = 0$$

$$\frac{U_{in}}{R_1} = -\varepsilon \cdot \frac{R_1 + R_2 + R_1 F}{R_1 R_2} \quad \varepsilon = -U_{in} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot F}$$

Antag  $U_{in}$  begränsad. Vi får att

$$\boxed{\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{då } F \rightarrow \infty}$$

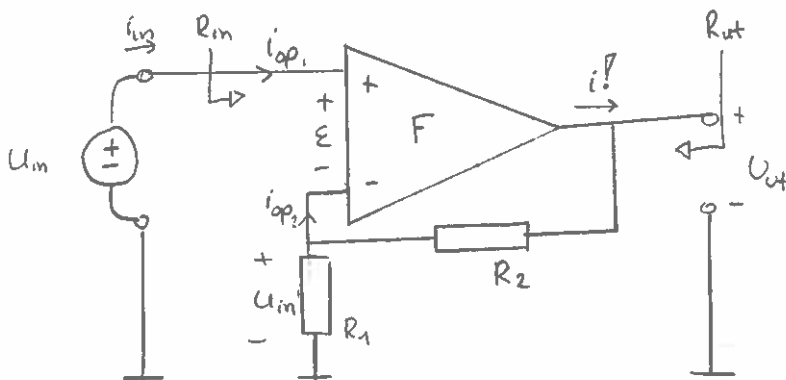
Allmänt gäller att om utgången på en ideal op-först. återkopplas till minusingången blir  $\varepsilon = 0$ !

Vi får en "virtuell kortslutning" mellan + och - ingången  
 OBS! Ingen galvanisk förbindelse.  $i_{op} = 0$  fortfarande.  
 (ingen ström mellan + och - ingångarna)

Inimpedans:  $R_{in} = \frac{U_{in}}{i_{in}} = \frac{U_{in}}{i_1} = R_1$

Utimpedans:  $R_{ut} = \frac{U_{ut}}{i_{ut}} \Big|_{\substack{\text{Nollst.} \\ \text{ober. källor}}} U_{in}=0 = \left\{ \begin{array}{l} U_{in}=0 \\ i_1=i_2=0 \\ U_{ut}=0 \end{array} \right\} = R_o = 0$

Icke-inverterande förstärkare



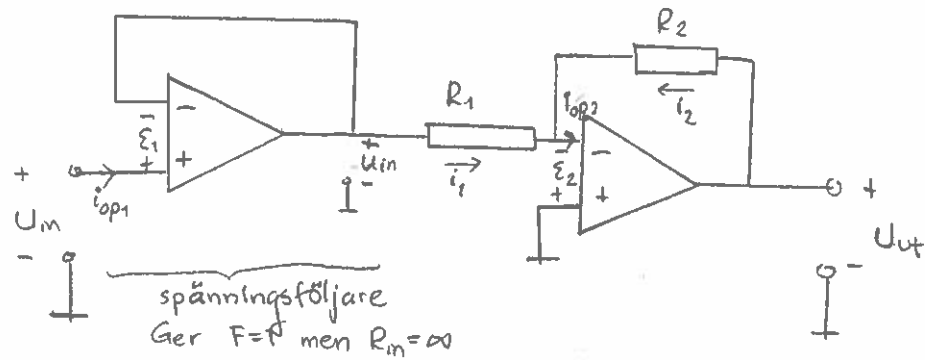
Antag ideal op. först. }  $\Rightarrow \epsilon = 0, i_{opx} = 0$   
 Från krets: neg. återkoppl.

Samma ström anm  $R_1$  och  $R_2$  (från op-amp utgång)  
 sp. delning  $U_{in} = U_{ut} \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2} \Rightarrow \frac{U_{ut}}{U_{in}} = \frac{R_1+R_2}{R_1}$

Inimpedans:  $R_{in} = \infty$  ty  $i_{in} = i_{op1} = 0$  ( $R_{in} = \frac{U_{in}}{i_{in}}$ )

Utimpedans:  $R_{ut} = \frac{U_{ut}}{i_{ut}} = R_o = 0$

B2



Antag ideala op-först. } Beräkna först.  $\frac{U_{out}}{U_{in}}$   
 Negativ återkoppling (bägge)

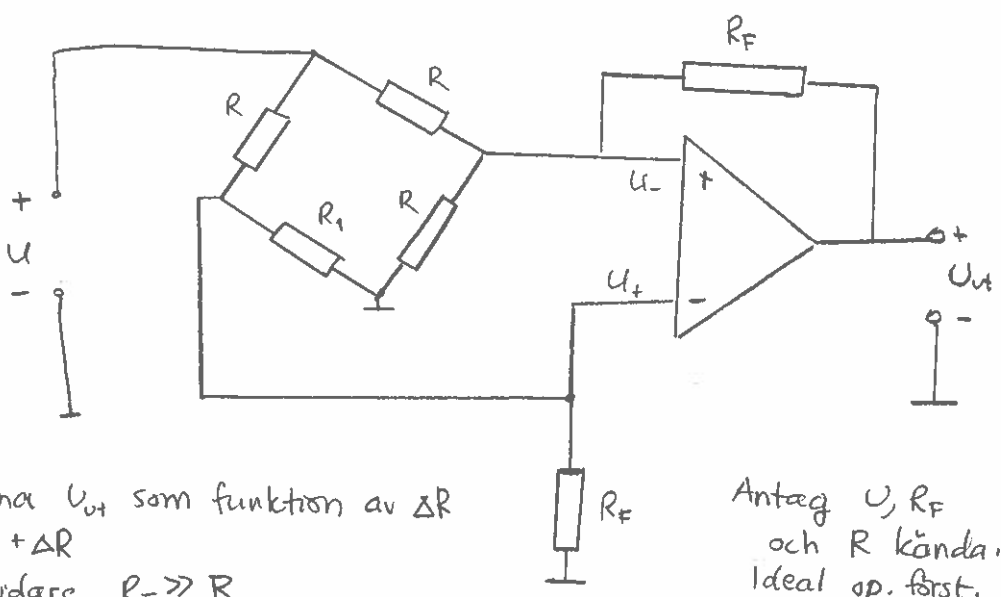
$\Rightarrow \epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{U_{in}}{R_1} \\ i_2 &= \frac{U_{out}}{R_2} \end{aligned} \right\} i_1 + i_2 = 0 \quad (i_{op2} = 0)$$

$$\frac{U_{in}}{R_1} + \frac{U_{out}}{R_2} = 0$$

$$\frac{U_{out}}{U_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

B5

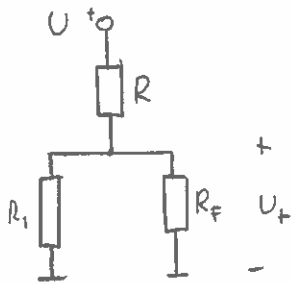


Beräkna  $U_{out}$  som funktion av  $\Delta R$   
 $R_1 = R + \Delta R$   
 Vidare  $R_F \gg R$   
 $\Delta R \ll R$

Antag  $U, R_F$   
 och  $R$  kända.  
 Ideal op. först.

Beräkna  $u_+$  (relativt jord)

"Delkrets"



$$i_{op} = 0$$

sp. delning ger

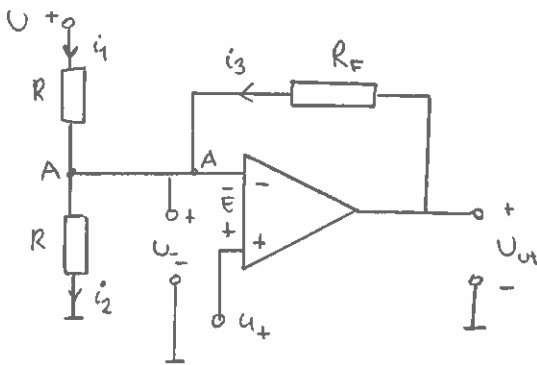
$$u_+ = U \cdot \frac{R_1 // R_F}{R + R_1 // R_F} = U \cdot \frac{\frac{R_1 R_F}{R_1 + R_F}}{R + \frac{R_1 R_F}{R_1 + R_F}}$$

Vi får

$$u_+ = U \cdot \frac{R_1 R_F}{R(R_1 + R_F) + R_1 R_F}$$

Beräkna  $u_-$  (relativt jord)

Delkrets



Teckna strömmar

$$i_3 = \frac{u_{ut} - u_-}{R_F} \quad i_2 = \frac{u_-}{R} \quad i_1 = \frac{u - u_-}{R} \quad i_{op} = 0$$

$$KCL_A: i_1 - i_2 = -i_3 \Rightarrow \frac{u - u_-}{R} - \frac{u_-}{R} = -\frac{u_{ut} - u_-}{R_F}$$

$$\frac{u_{ut}}{R_F} = u_- \left( \frac{2}{R} + \frac{1}{R_F} \right) - \frac{u}{R}$$

Negativ återkoppling }  $\Rightarrow \varepsilon = 0$   
 Ideal op. först.

← klargör detta på tenta!

$$\Rightarrow U_+ = U_-$$

Eliminera  $U_-$  i senaste ekvationen

$$\frac{U_{ut}}{R_F} = U \left( \frac{R_1 R_F}{R(R_1 + R_F) + R_1 R_F} \frac{2R_F + R}{R R_F} - \frac{1}{R} \right)$$

$$U_{ut} = U \cdot R_F \cdot \frac{R_1(2R_F + R) - R(R_1 + R_F) - R_1 R_F}{(R(R_1 + R_F) + R_1 R_F) R} = U R_F \cdot \frac{R_1 R_F - R R_F}{R [R R_1 + R_F (R + R_1)]} =$$

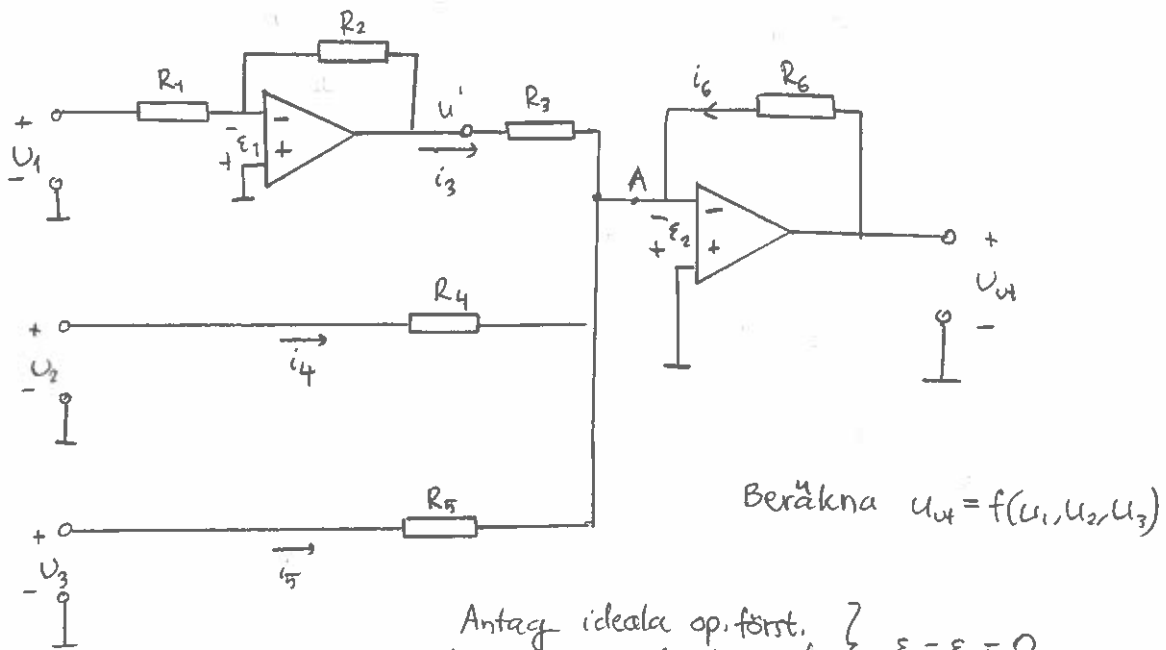
$$= \{ R_1 = R + \Delta R \} = U R_F^2 \frac{R + \Delta R - R}{R \left[ \underbrace{R(R + \Delta R)}_{\text{skip}} + R_F \underbrace{(R + R + \Delta R)}_{\text{skip}} \right]} \approx U R_F^2 \frac{\Delta R}{R_F \cdot 2R^2}$$

$$= U \cdot \frac{R_F}{2R^2} \Delta R$$

Exemplet är en bryggekoppling. Vanlig i mätteknik sammanhang.  
 $R_1$  motsvarar en sensor (varierar med  $\Delta R$ ).



B8



Beräkna  $u_{ut} = f(u_1, u_2, u_3)$

Antag ideala op. först. }  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$   
 Bägge är neg. återkopplade

Vidare  $i_{op} = 0$

$$\text{KCL i nod A: } i_3 + i_4 + i_5 = -i_6 \Rightarrow \frac{u'}{R_3} + \frac{u_2}{R_4} + \frac{u_3}{R_5} = -\frac{u_{ut}}{R_6}$$

$$\text{KCL i nod B: } i_1 + i_2 = 0 \quad (i_{op} = 0)$$

$$\frac{u_1}{R_1} + \frac{u'}{R_2} = 0 \Rightarrow u' = -u_1 \frac{R_2}{R_1}$$

$$-\frac{R_2 R_6}{R_1 R_3} u_1 + u_2 \frac{R_6}{R_4} + u_3 \frac{R_6}{R_5} = -u_{ut}$$

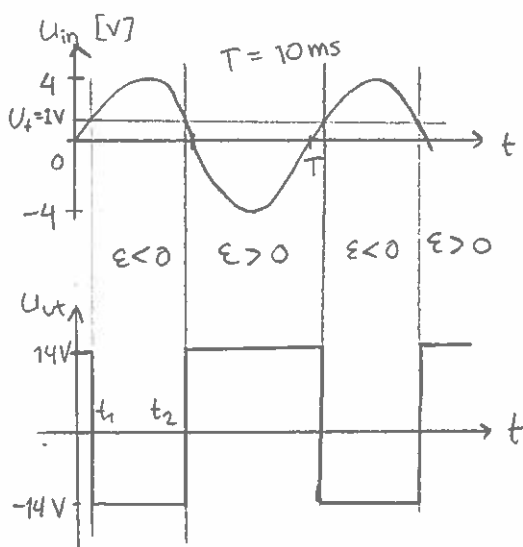
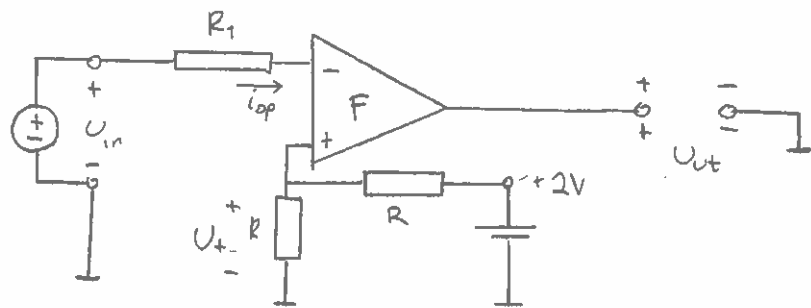
$$u_{ut} = u_1 \frac{R_2 R_6}{R_1 R_3} - u_2 \frac{R_6}{R_4} - u_3 \frac{R_6}{R_5}$$

Med insatta komponentvärden

$$u_{ut} = \dots = 6u_1 - 4u_2 - 1,5u_3$$

Detta är ett exempel på en summator.  
 Antalet ingångar (inspänningar) kan variera. Viktfaktorerna  
 i summeringen bestäms av valda resistansvärden.

B15



Teckna  $u_{ut}(t)$  [Graf]

Antag ideal op.-först.

Utstyringsområde  $\pm 14V$  [ $U_{ut}$ ]

$\underline{\underline{\epsilon}}$  neg. återkoppling  $\Rightarrow \epsilon \neq 0$

$i_{op} = 0$  ty ideal op.-först.

Spindelning ger  $U_1 = 1V$

$$\epsilon = U_1 - U_{in}$$

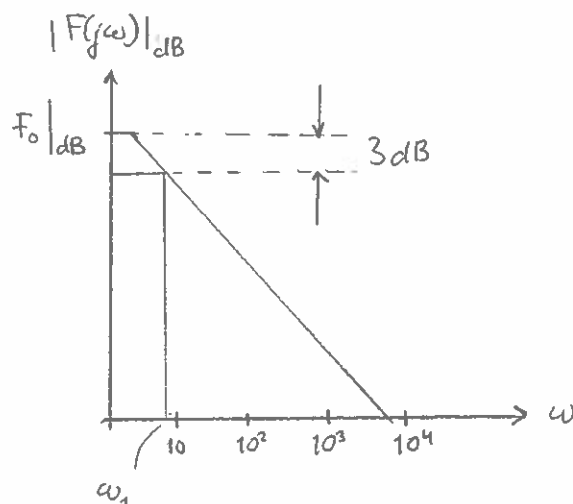
## Verklig operationsförstärkare

Typiska data		"741" BJT	"356" JFET
Spänningsförst.	$(F \neq \infty)$	$2 \cdot 10^5$	
Bandbredd	$(B \neq \infty)$	3 Hz	
CMRR	$(\neq \infty)$	90 dB	
Inimpedans	$(R_i \neq \infty)$	2 M $\Omega$	1 T $\Omega$
Utimpedans	$(R_o \neq 0)$	75 $\Omega$	
Temperaturkänslig			

## Öppna förstärkningen, F

- \* Hög, men begränsad
- \* Avtar med ökad frekvens
- \* Frekvenskaraktäristik  
kännetecknas med en dominant pol

$$F = F(j\omega) = \frac{F_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$$



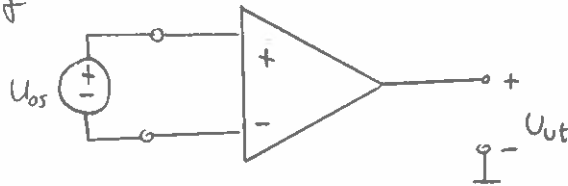
□ Offset spänning

Den ideala op-förstärkaren antas vara perfekt balanserad, d.v.s.  $U_{ut} = 0$  då  $u_+ = u_- = 0$

I en verklig op-först. förekommer en "balans" mellan ingångsstegen.

Input offset voltage

$$U_{os} \mid U_{ut} = 0$$

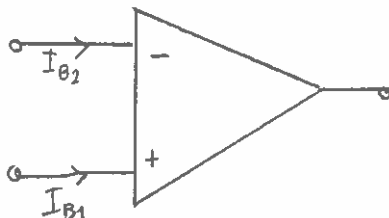


$U_{os}$ : den spänning som krävs för att korrigera  $U_{ut}$  till 0. ("741"; 1mV)

□ Input offset voltage drift

Offsetspänningen är temperaturberoende  $\frac{\Delta U_{os}}{\Delta T}$   
 Typiskt värde ("741")  $15 \mu V / ^\circ C$

□ Input Bias Current



$$I_B = \frac{I_{B1} + I_{B2}}{2} \mid U_{ut} = 0$$

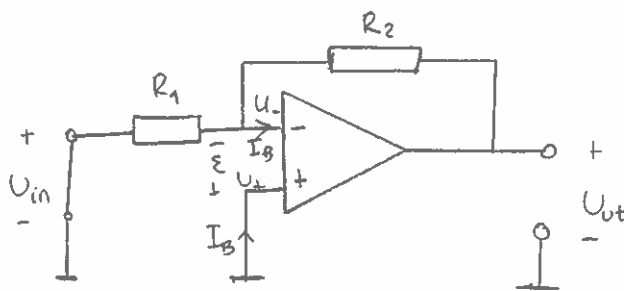
□ Input offset current

$$I_{os} = I_{B1} - I_{B2} \Big|_{U_{ut} = 0}$$

### Inverkan av biasström

Exempel: Antag ideal op-först. med avseende på input offset voltage och input offset current.

$$U_{ut} = 0 \text{ då } u_+ = u_- = 0 \text{ samt } I_{B1} = I_{B2} = I_B$$



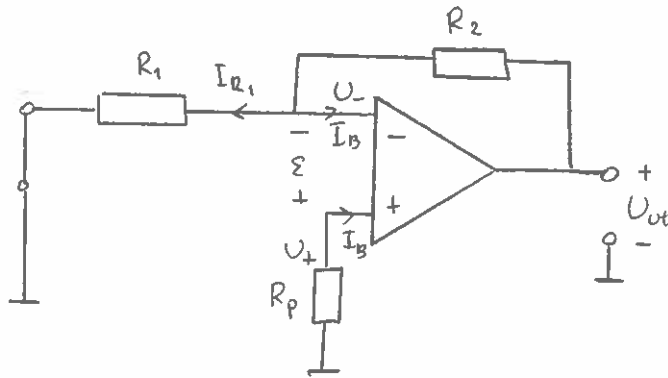
$$\left. \begin{array}{l} F = \infty \\ \text{Neg. återkoppling} \end{array} \right\} \epsilon = 0$$

$$u_+ = u_- = 0$$

Spänning över  $R_1$  är noll, ström genom  $R_1 = 0$ ,  $I_B$  måste passera  $R_2$   
 $U_{ut} = I_B R_2$

Biasström ger upphov till spänning på utgången, trots kortsluten ingång ( $U_{in} = 0$ ).

Detta är inte önskvärt. Modifiera kretsen.



Neg. återkoppling }  $\varepsilon = 0, u_+ = u_-$   
 $F = \infty$

$$U_+ = -I_B R_p = U_-$$

$$I_{R_1} = \frac{U_-}{R_1}$$

$$U_{out} = (I_B + I_{R_1}) R_2 + U_+ = \left( I_B - \frac{I_B R_p}{R_1} \right) R_2 - I_B R_p = I_B \left( R_2 - \frac{R_p R_2}{R_1} - R_p \right)$$

$$R_2 = R_p \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

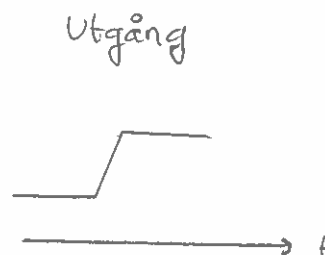
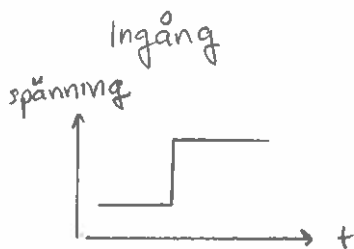
$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

För att erhålla  $U_{ut} = 0$  måste  $R_p = R_1 // R_2$

### □ Slew Rate (SR)

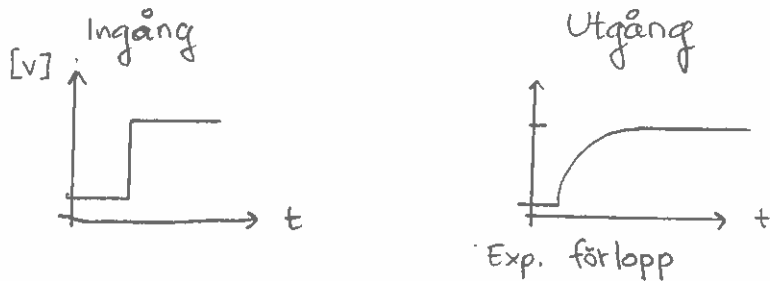
SR: maximala ändringshastigheten hos operationsförstärkarens utsignal.

Orsak: Vid "stora" spänningsförändringar på ingången bottnar transistorer och den s.k. dominant pol-kondensatorn laddas med en konstant ström.

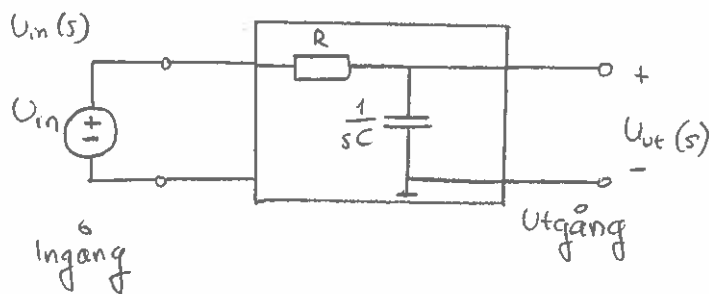


$$SR = \left. \frac{dU_{ut}}{dt} \right|_{\max}$$

Denna effekt skall skiljas från effekten som beror av begränsad bandbredd.



"Dominant pol"



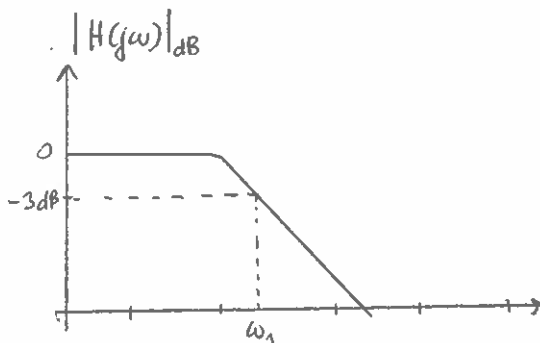
Sp. delning 
$$U_{ut} = U_{in} \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC}$$

$$\frac{U_{ut}(s)}{U_{in}(s)} = H(s) = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

övergång till stationär växelström (jw-metod)

(Allmänt:  $s = \sigma + j\omega$ ) sätt  $s = j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \left\{ RC = \frac{1}{\omega_1} \right\} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$$

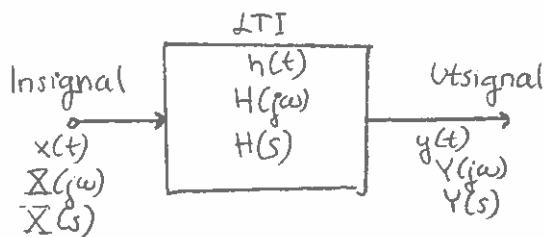


lend tis

## Egenskaper i frekvensplanet

2010-11-24  
Onsdag

LTI-system (Linjära, Tids Invarianta system)



Relation insignal  $\longrightarrow$  system  $\longrightarrow$  utsignal

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$$

$$Y(s) = H(s) X(s)$$



Utgå ifrån ett LTI-system med överföringsfunktionen  $G(s)$  och frekvensfunktionen  $G(j\omega)$

## Bodediagram

En grafisk representation av frekvensfunktionen (frekvenssvaret)  $G(j\omega)$ . Två delar:

\* Amplituddiagram

Logaritmisk frekv. skala  
amplitudskala (dB)

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$$

\* Fasdiagram

Logaritmisk frekv. skala  
 $\arg \{G(j\omega)\}$

### ● Konstruktion

Faktorisera överföringsfunktionen  $G(s)$

$$G(s) = \frac{C_1(s)C_2(s)\dots C_M(s)}{D_1(s)D_2(s)\dots D_N(s)}$$

Faktorerna  $C_i(s)$  och  $D_i(s)$  är

- K konst.
- s ("integrering/derivering")
- $1 + \frac{s}{\omega_1}$  1:a gradsfaktor
- $1 + s\frac{\alpha}{\omega_2} + s^2\frac{1}{\omega_2^2}$  2:a gradsfaktor

## Amplituddiagram

$$G(s) \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega) \quad \text{med belopp} \quad |G(j\omega)| = \frac{|G_1(j\omega)| |G_2(j\omega)| \dots |G_N(j\omega)|}{|D_1(j\omega)| |D_2(j\omega)| \dots |D_N(j\omega)|}$$

uttrycket i dB

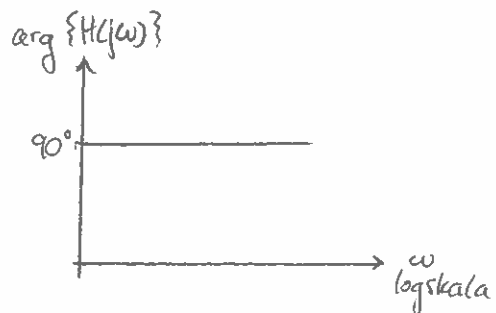
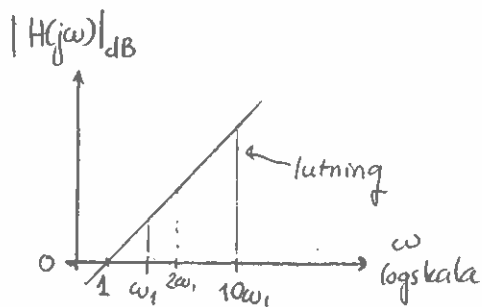
$$|G(j\omega)|_{dB} = |G_1(j\omega)|_{dB} + |G_2(j\omega)|_{dB} + \dots + |G_N(j\omega)|_{dB} - |D_1(j\omega)|_{dB} - \dots - |D_N(j\omega)|_{dB}$$

## Fasdiagram

$$\arg\{G(j\omega)\} = \arg\{G_1(j\omega)\} + \dots + \arg\{G_N(j\omega)\} - \arg\{D_1(j\omega)\} - \dots - \arg\{D_N(j\omega)\}$$

Superposition av bidrag från varje delfaktor

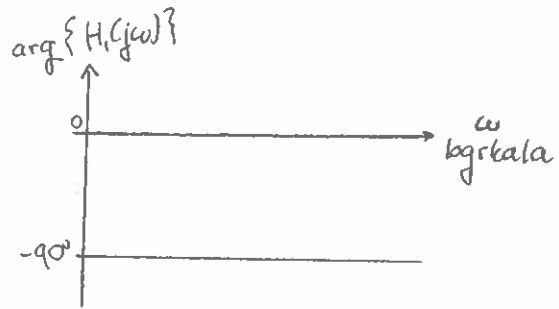
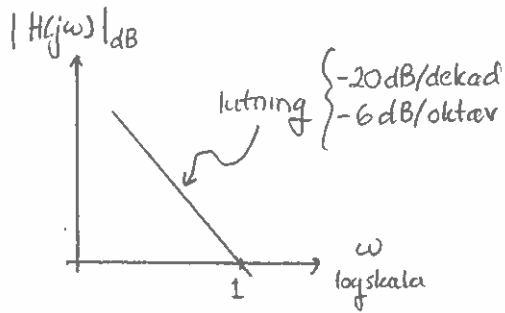
studera olika delfaktorer,  $H(s) = s H(j\omega)$ ,  $|H(j\omega)| = \omega$



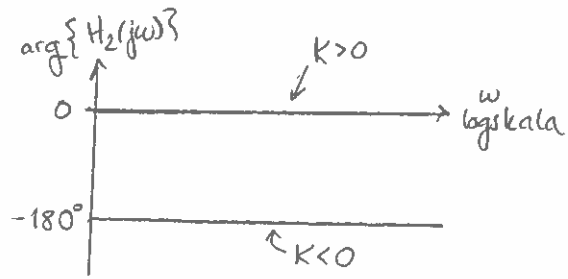
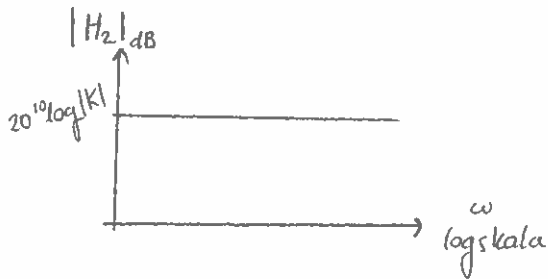
$$\left| \frac{H(j10\omega_1)}{H(j\omega_1)} \right|_{dB} = 20^{10} \log 10 = 20 \text{ dB / dekad}$$

$$\left| \frac{H(j2\omega_1)}{H(j\omega_1)} \right|_{dB} = 20^{10} \log 2 = 6 \text{ dB / oktav}$$

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{s}, \quad H_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega}; \quad |H_1(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$$



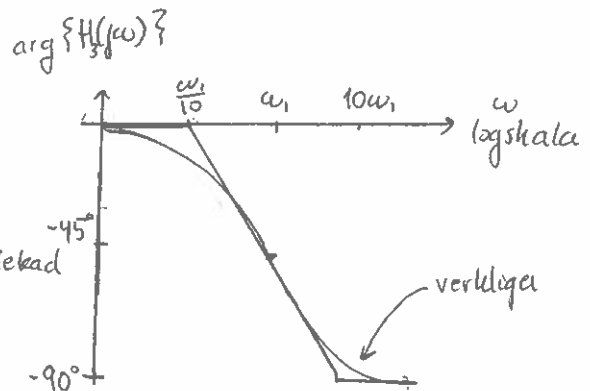
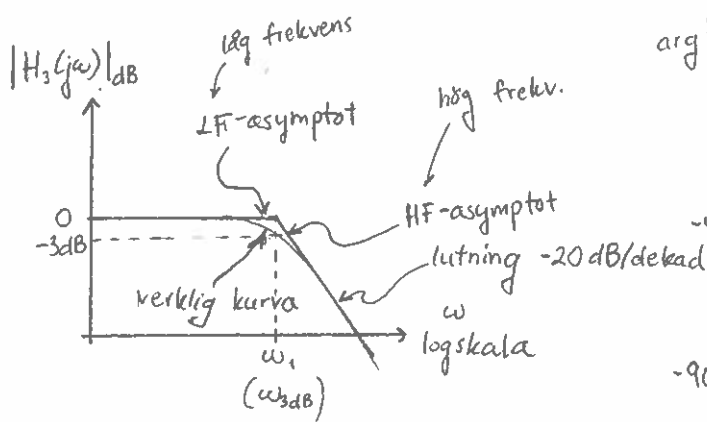
$$H_2(j\omega) = K, \quad |H_2(j\omega)| = |K|$$



$$H_3(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_1}}; \quad H_3(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$$

$$|H_3(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}; \quad \arg\{H_3(j\omega)\} = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$$

Bodediagram



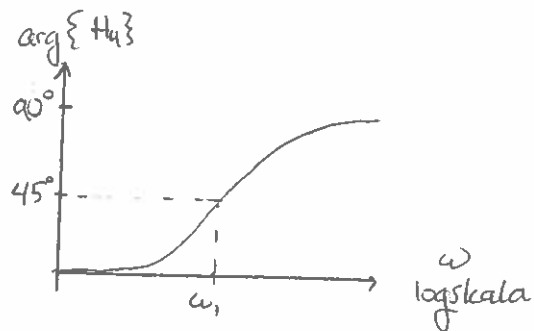
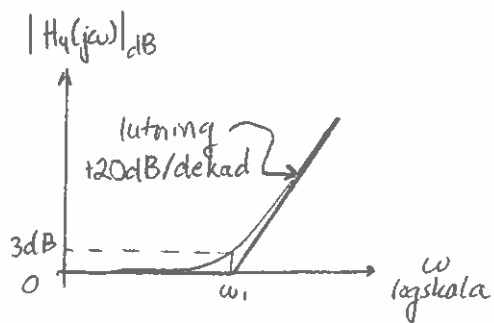
vid  $\omega = \omega_1$

$$|H_3(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$$

$$H_4(s) = 1 + \frac{s}{\omega_1}; \quad H_4(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$$

$$|H_4(j\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$$

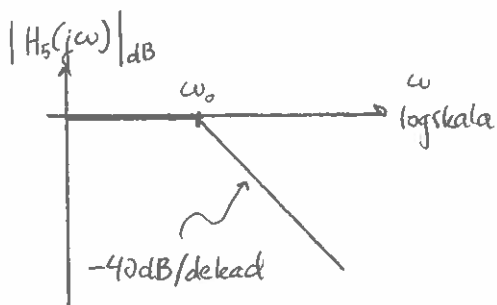
$$\arg\{H_4(j\omega)\} = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$$



Andragradsfaktorer (komplexa poler)

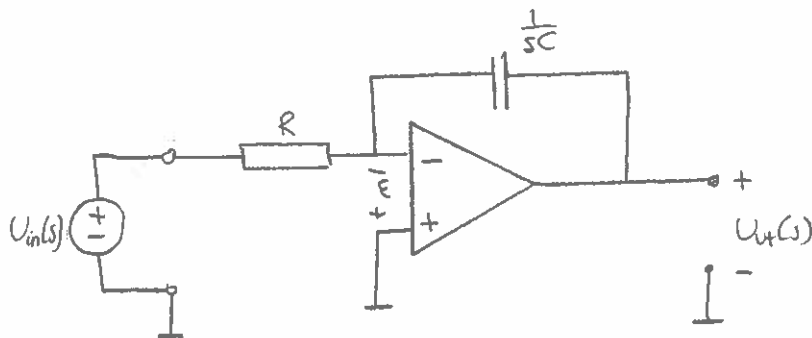
$$H_5(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2k\omega_0 s + \omega_0^2} \quad \text{För } 0 < k < 1 \text{ är polerna komplexa}$$

Antag asymptotiskt diagram (använd  $k=1$ , dubbelpol)



## Kretsar med 1:a ordningens frekvensberoende

### □ Ideal Integrator

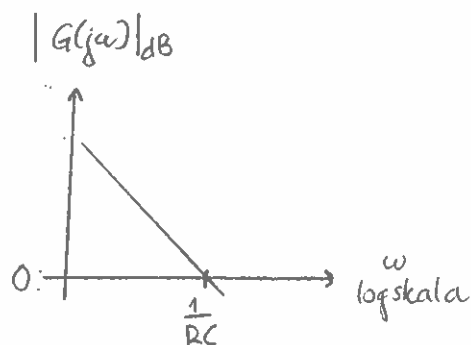


Antag ideal op, först. }  $\Rightarrow \epsilon = 0, i_{op} = 0$   
 Neg. återkopplad

$$KCLA: \frac{U_{in}}{R} + \frac{U_{ut}}{1/sC} = 0$$

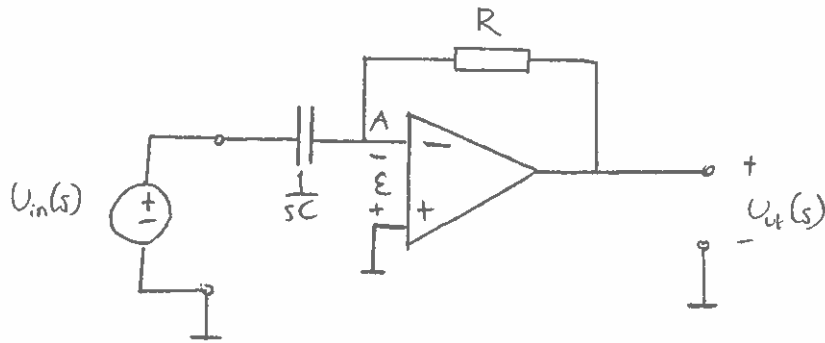
$$\frac{U_{ut}(s)}{U_{in}(s)} = G(s) = -\frac{1}{sRC} \quad U_{ut}(s) = -\frac{1}{RC} \frac{1}{s} U_{in}(s)$$

I tidsdomän  $u_{ut}(t) = -\frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t u_{in}(t) dt$



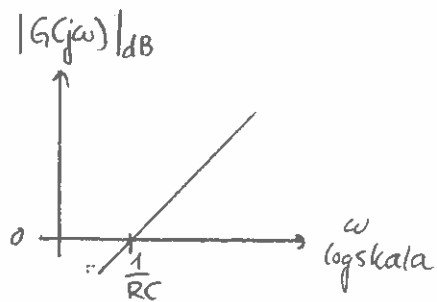
Olämplig koppling med verklig op. först. Biasströmmar kommer att ladda upp kondensatorn och utspänningen kommer att drivas mot  $\pm E$  för  $U_{in} = 0$

□ Ideal derivator



$$KCL_A: \frac{U_{in}(s)}{1/sC} + \frac{U_{out}(s)}{R} = 0$$

$$\frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)} = G(s) = -sRC$$



$$U_{out}(s) = -RC \cdot s U_{in}(s)$$

$$U_{out}(t) = -RC \frac{dU_{in}(t)}{dt}$$

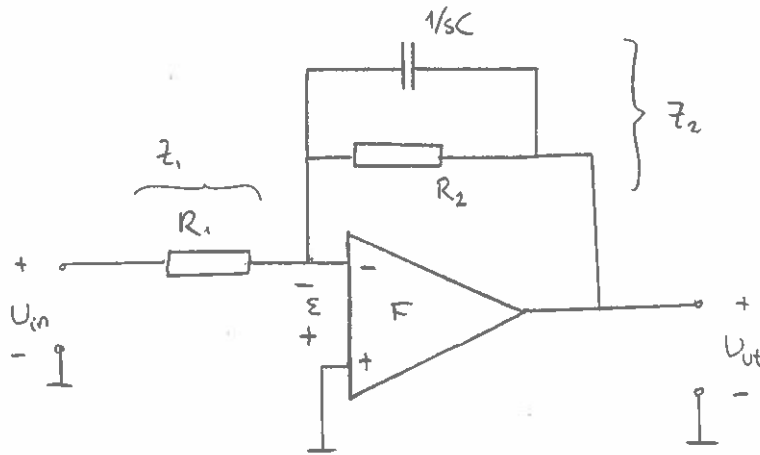
lend ons

2011-11-26

Freitag

# Första ordningens låpassfilter

(Användbar integrator, integrator med "glömska")



Antag ideal op. först. }  $\Rightarrow \epsilon = 0, i_{op} = 0$   
 Neg. återkoppling

$$KCL_A: \frac{U_{in}}{Z_1} + \frac{U_{ut}}{Z_2} = 0 \quad \frac{U_{ut}}{U_{in}} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{\frac{R_2 \cdot \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}}}{R_1} =$$

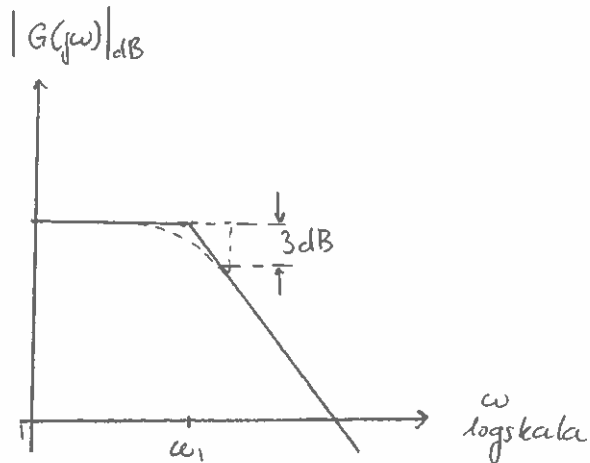
$$= -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + sR_2C} = G(s)$$

Amplituddiagram

$$|G(j\omega)| = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega R_2C)^2}}$$

$$= \left\{ \omega_1 = \frac{1}{R_2C} \right\}$$

$$= \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}$$



3dB frekvens  
 (övre) Brytvinkelfrekv.

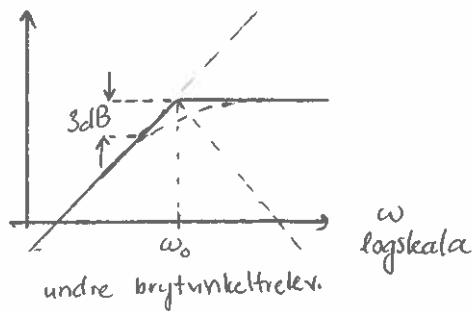
□ Första ordningens högpassfilter

$$G(s) = \frac{K \cdot s}{1 + \frac{s}{\omega_0}} \quad \text{Frekvenssvar } (s = j\omega)$$

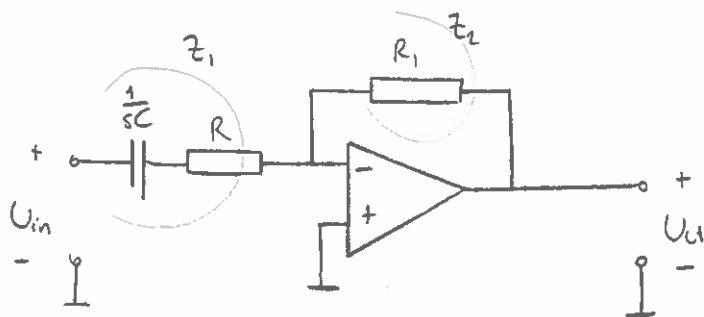
$$G(j\omega) = \frac{K \cdot j\omega}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad |G(j\omega)| = \frac{|K| \cdot \omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Amplituddiagram

$$|G(j\omega)|_{dB}$$



Exempel på realisering

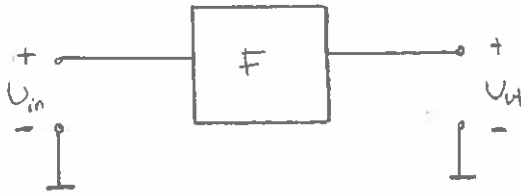


som tidigare

$$G(s) = \frac{U_{ut}}{U_{in}} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_1}{R + \frac{1}{sC}} = -\frac{sCR_1}{1 + sCR}$$

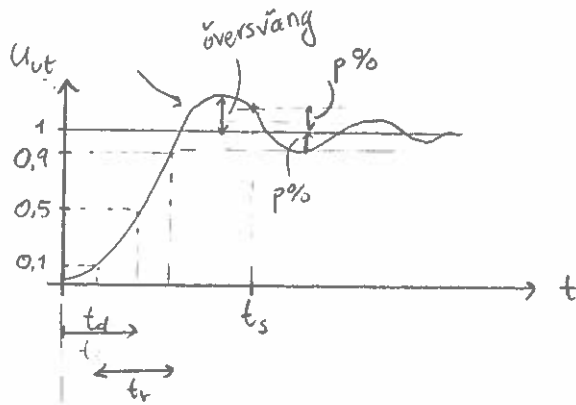


## Förstärkares egenskaper i tidsplanet



Insignal  $u_{in} = \theta(t)$  (ett steg)

Betrakta  $u_{ut}$  (stegsvar)



$t_d$ : delay time (fördröjning)

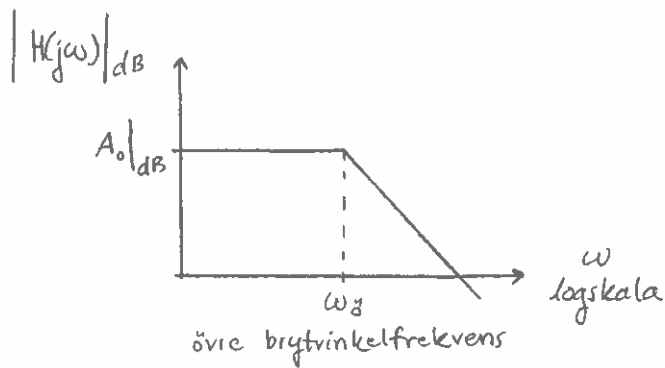
$t_r$ : rise time (stigtid från 10% till 90% av slutvärdet)

$t_s$ : settling time (insvängningstid inom  $\pm p\%$  av slutvärde)

## Stigtid

Studera en första ordningens lågpasslänk.

$$\frac{U_{ut}(s)}{U_{in}(s)} = H(s) = \frac{A_0}{1 + \frac{s}{\omega_0}} = \left\{ \tau = \frac{1}{\omega_0} \right\} = \frac{A_0}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$



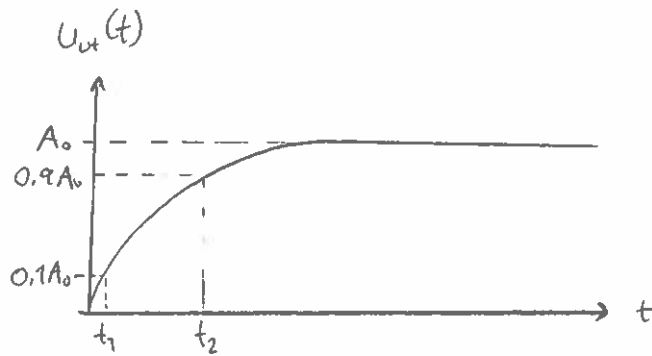
Vad blir stegsvaret?

$$\text{Låt } u_{in}(t) = \Theta(t) \Rightarrow U_{in}(s) = \frac{1}{s}$$

$$U_{ut}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{A_0}{\tau} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

Invers Laplace transf. ger

$$u_{ut}(t) = A_0 (1 - e^{-t/\tau}) \Theta(t)$$



Stigtid  $t_r = t_2 - t_1$

$$\begin{cases} u_{ut}(t) = 0.9A_0 = A_0(1 - e^{-\frac{t_2}{\tau}}) \\ u_{ut}(t) = 0.1A_0 = A_0(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}) \end{cases} \begin{cases} + e^{-\frac{t_2}{\tau}} = 0.1 \\ + e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0.9 \end{cases}$$

Bilda kvot

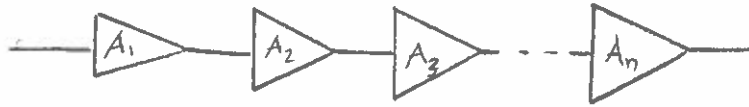
$$\frac{0.9}{0.1} = \frac{e^{-\frac{t_1}{\tau}}}{e^{-\frac{t_2}{\tau}}} = e^{-\frac{t_1 - t_2}{\tau}} = 9 \quad \text{logaritmera}$$

$$t_2 - t_1 = \tau \cdot \ln 9 = t_r \approx 2.2 \cdot \tau = \frac{2.2}{\omega_0} = \left\{ \omega_0 = 2\pi f_0 \right\} = \frac{0.35}{f_0}$$

Alt.  $t_r \cdot \omega_0 = 2.2$        $t_r \cdot f_0 = 0.35$

kort stigtid  $\Rightarrow$  hög gränsvinkelfrekvens

□ Kaskad av  $n$  st lika första ordningen lågpasslänkar



Låt  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A_0$

$$A(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}} \quad G(j\omega) = [A(j\omega)]^n$$

$$|G(j\omega)|_{\omega_{\text{tot}}} = \left| \left( \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega_{\text{tot}}}{\omega_1}} \right)^n \right| = \frac{A_0^n}{\left( \sqrt{1 + \left( \frac{\omega_{\text{tot}}}{\omega_1} \right)^2} \right)^n} = \frac{A_0^n}{\sqrt{2}}$$

Per definition: Total övre brytningsfrekvens  $\omega_{\text{tot}}$ :

Den vinkelfrekvens där beloppet sjunker till faktorn  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  av sitt max.värde,

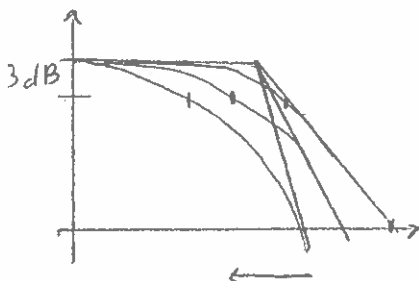
Kvadrera, dra nite roten ur

$$1 + \left( \frac{\omega_{\text{tot}}}{\omega_1} \right)^2 = 2^{1/n}$$

$$\omega_{\text{tot}} = \omega_1 \sqrt{2^{1/n} - 1}$$

Man kan även visa att approximativt gäller

$$\omega_{\text{tot}} \cdot t_{r_{\text{tot}}} \approx 2,2$$



["länk = förstärkare = system"]

□ Kaskad av n st olika första ordn. lågpässförstärkare

$$|A(j\omega)|_{\omega=\omega_{\text{stot}}} = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{\text{stot}}}{\omega_1}\right)^2}} \frac{A_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{\text{stot}}}{\omega_2}\right)^2}} \dots \frac{A_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{\text{stot}}}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$$

Antag  $\frac{\omega_{\text{stot}}}{\omega_1} \approx \frac{\omega_{\text{stot}}}{\omega_2}$  osv.  $\ll 1$

Serierutveckla  $\frac{1}{1 + \epsilon_1^2} \frac{1}{1 + \epsilon_2^2} \dots \frac{1}{1 + \epsilon_n^2}$

Försumma högre ordn. termer

Man kan då visa

$$\frac{1}{\omega_{\text{stot}}} \approx 1,1 \sqrt{\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2}}$$

Genom att utnyttja  $\omega_1 \cdot t_{r1} = 2,2$ ,  $\omega_2 \cdot t_{r2} = 2,2$  osv.

samt  $\omega_{\text{stot}} \cdot t_{r\text{tot}} \approx 2,2$

fås

$$t_{r\text{tot}} = 1,1 \sqrt{t_{r1}^2 + t_{r2}^2 + \dots + t_{rn}^2}$$

/end fre dv5



## CM-signal

### Småsignalschema

Operationsförstärkare s. 120

Inverterande förstärkare  
Icke-inverterande förstärkare s. 125  
Exempel

Verklig operationsförstärkare s. 131

öppna förstärkningen  $F$

Offset spänning

Input offset voltage drift

Input bias current

Input offset current

inverkan av biasström

Stew Rate (SR)

Dominant pol

Egenskaper i frekvensplanet s. 136  
LT1-system

Bodediagram: amp.- & fasdiagram

Kretsar med 1:a ordningens frekvensberoende

Ideal integrator

Ideal derivator

Första ordningens lågpasfilter s. 143

Första ordningens högpasfilter

Förstärkares egenskaper i tidsplanet

Stigtid

Kaskad av  $n$  st lika 1:a ordn. lågpaslänkar s. 148

Kaskad av  $n$  st olika 1:a ordn. lågpasförstärkare

Lv6

Elektriska nät och system  
Ants Silberberg

[ ESS 115 ]

F2 Lp2 2010



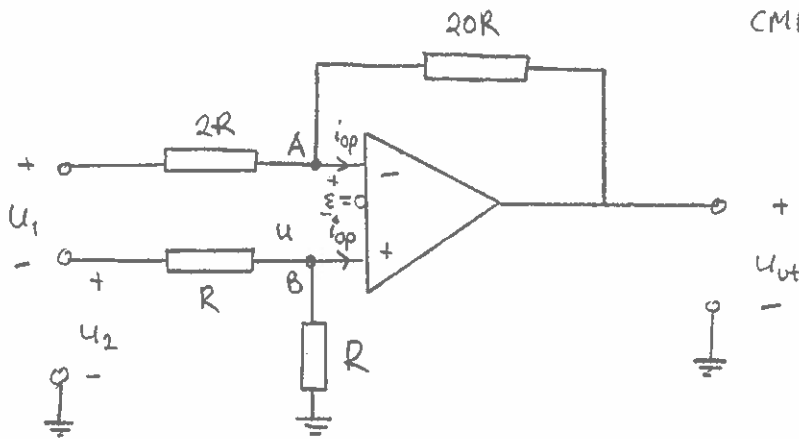


2010-11-29  
Måndag

B4)

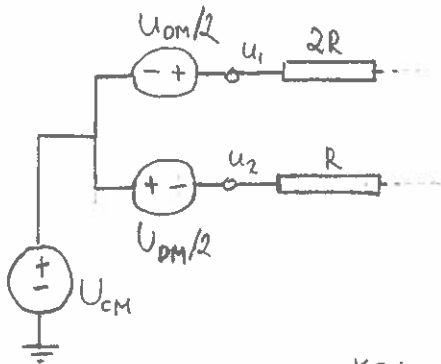
Common-Mode rejection ratio

$$CMRR = \left| \frac{A_{OM}}{A_{CM}} \right| = ?$$



ideal op-amp }  $\Rightarrow i_{op} = 0$   
negative feedback }  $\Rightarrow \epsilon = 0$

gain  
↓  
 $u_{ut} = H \cdot u_{in}$



Sum currents in A and B

$$KCL_A: \frac{u_1 - u}{2R} + \frac{u_{ut} - u}{20R} = 0$$

$$KCL_B: \frac{u_2 - u}{R} + \frac{0 - u}{R} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 + \frac{1}{10} u_{ut} - \frac{11}{10} u = 0 \\ u_2 = 2u \Rightarrow u = \frac{u_2}{2} \end{cases}$$

$$u_1 + \frac{1}{10} u_{ut} - \frac{11}{10} \frac{u_2}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{u_{ut} = \frac{11}{2} u_2 - 10 u_1}$$

Common-mode (CM)

$$U_{DM} = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 = U_{CM}$$

$$u_{ut} = \left(\frac{11}{2} - 10\right) U_{CM} = -\frac{9}{2} U_{CM}$$

$$A_{CM} = \frac{u_{ut}}{U_{CM}} = \underline{\underline{-\frac{9}{2}}}$$

Differential Mode (DM)

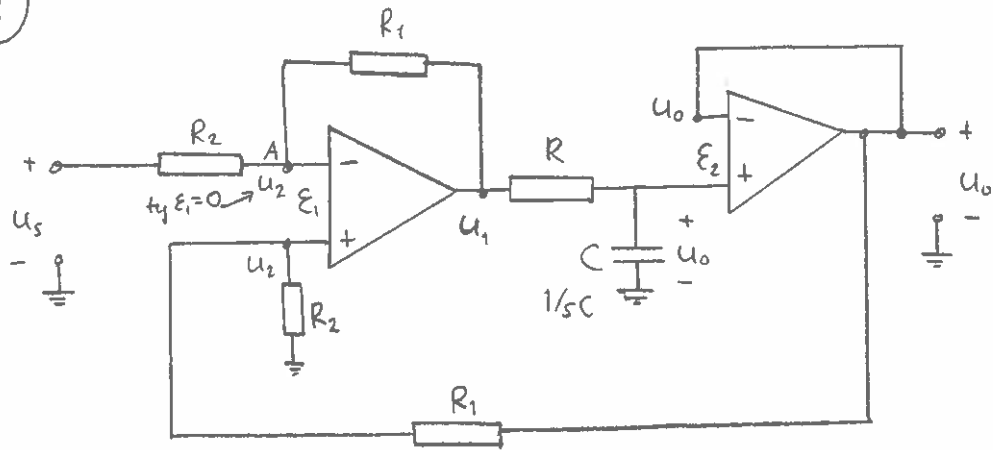
$$U_{CM} = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{U_{DM}}{2} \\ u_2 = -\frac{U_{DM}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_{ut} = U_{DM} \left(-\frac{11}{4} - \frac{20}{4}\right) = -\frac{31}{4} U_{DM}$$

$$A_{DM} = \frac{u_{ut}}{U_{DM}} = -\frac{31}{4}$$

$$CMRR = \frac{\overset{\text{gain}}{\left| \frac{A_{DM}}{A_{CM}} \right|}}{\underset{\text{gain}}{\left| \frac{-31/4}{-9/2} \right|}} = \overset{20 \log 1.7}{\underline{1.7 \text{ times}}} = 4.6 \text{ dB}$$

G8)



Transfer function? functionality?  $H(s) = ?$

ideal op-amps }  $\Rightarrow \epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$   
 negative feedback }

$$\begin{cases} u_2 = u_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ u_0 = u_1 \cdot \frac{1/sC}{R + 1/sC} \Rightarrow u_1 = u_0 (1 + sRC) \end{cases}, \text{ KCLA: } \frac{u_s - u_2}{R_2} + \frac{u_1 - u_2}{R_1} = 0$$

$$\text{KCLA: } \frac{u_s}{R_2} = u_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) - \frac{u_1}{R}$$

$$\Rightarrow u_s = u_2 \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} u_1$$

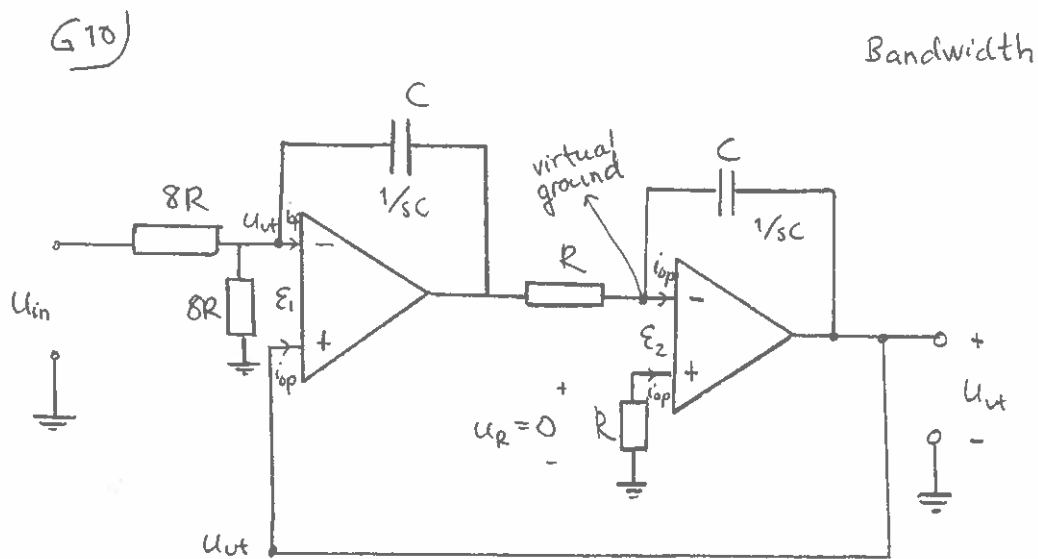
$$\Rightarrow u_s = u_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1} - u_0 \frac{R_2}{R_1} (1 + sRC)$$

$$u_s = u_0 \frac{R_2}{R_1} (1 - (1 + sRC)) = -u_0 \frac{R_2}{R_1} \cdot sRC$$

$$H(s) = \frac{u_0}{u_s} = \frac{-R_1}{sR_2RC}$$

$$u_o = \frac{-R_1}{R_2 RC} \cdot \frac{u_s}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u_o = \frac{-R_1}{R_2 RC} \int_0^t u_s(\tau) d\tau$$

Integrator circuit (Lowpass filter)



rise time of 3 seriekopplade cascaded amplifiers

assume ideal op-amps  $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow i_{op} = 0 \rightarrow U_R = 0 \\ \text{neg. feedback} \Rightarrow E_1 = E_2 = 0 \end{array} \right.$

Second order: två kondensatorer seriekopplade,  $s^2$   
 (hade de varit parallella hade de tagit ut varandra)  
 induktanter bidrar också med order

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U_{in} - U_{ut}}{8R} - \frac{U_{ut}}{8R} + \frac{U - U_{ut}}{1/sC} = 0 \quad (1) \\ \frac{U}{R} + \frac{U_{ut}}{1/sC} = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$(1) \quad U_{in} = 2U_{ut} - (U - U_{ut}) 8sRC$$

$$\Rightarrow U_{in} = U_{ut}(2 + 8sRC) - U 8sRC$$

$$(2) \quad U = U_{ut}(-sRC)$$

$$\Rightarrow U_{in} = U_{ut} [2 + 8sRC + 8s^2R^2C^2]$$

$$\begin{array}{c} \zeta \\ \downarrow \\ s \quad \zeta = 1 \end{array}$$

$$\frac{U_{ut}}{U_{in}} = \frac{1}{s^2 8R^2C^2 + s 8RC + 2} = \frac{\frac{1}{8R^2C^2}}{s^2 + s \frac{1}{RC} + \frac{1}{4R^2C^2}} = \frac{K \omega_0^2}{s^2 + s 2\omega_0 + \omega_0^2}$$

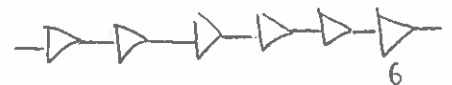
Second order system

$$H(s) = \frac{K \omega_0^2}{s^2 + s 2\omega_0 + \omega_0^2}$$

$$= \left\{ \omega_0 = \frac{1}{2RC} \right\} = \frac{K}{(s + \omega_0)^2}$$

$$\omega_{tot} = \omega_0 \sqrt{2^{1/2} - 1} = \frac{1}{2RC} \sqrt{2^{1/2} - 1} \text{ rad/s}$$

$$f_{tot} = \frac{1}{2\pi \cdot 2RC} \sqrt{2^{1/2} - 1} \approx \frac{0.051}{RC} \text{ Hz}$$



$$F_1 = \frac{U_{ut}}{U_{in}} = \frac{K}{(s + \omega_0)^2} \longrightarrow 3 \text{ amplifiers cascaded}$$

$$F_3 = \frac{K^3}{(s + \omega_0)^6} \longrightarrow 6 \text{ sets of 1}^{st} \text{ order amplifiers cascaded} \left. \vphantom{F_3} \right\} \Rightarrow \omega_{tot} = \omega_0 \sqrt{2^{1/6} - 1}$$

1<sup>st</sup> order sys.  $t_{r_1} = \frac{2.2}{\omega_0}$  ← def.?

6 cascaded:  $t_{r_{tot}} = 1.1 \sqrt{t_{r_1}^2 + t_{r_2}^2 + \dots} = 1.1 \sqrt{6 \cdot t_{r_1}^2}$   
 $= 1.1 \sqrt{6 \cdot \left(\frac{2.2}{\omega_0}\right)^2} = 1.1 \sqrt{6} \times 2.2 \times 2RC \approx \underline{\underline{11.9 RC}}$

Undre gränsvinkel frekv.

För ett första ordn. förstärkarsteg (HP-filter)

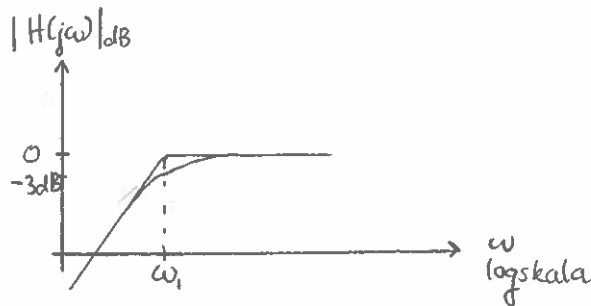
$H(s) = \frac{sK}{1 + \frac{s}{\omega_1}}$       Låt  $K = \frac{1}{\omega_1}$   
 sätt  $s = j\omega$ , studera frekv. egenskaper

$H(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}$

$H(j\omega) = \frac{1}{-j \frac{\omega}{\omega_1} + 1}$

Med belopp

$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}$



Max. nivå = 1  $\hat{=}$  0 dB  
 ↓  
 motsvarar

Vid  $\omega = \omega_1$  är  $|H(j\omega)|_{\omega=\omega_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

∴  $\omega_1$  är undre brytvinkel frekv.  $\Rightarrow \omega_u$

Kaskadkoppling av  $n$  st lika steg

$$G(j\omega) = (H(j\omega))^n$$

Sök totala undre gränsvinkelfrekv.  $\omega_{tot}$

$$|G(j\omega)|_{\omega=\omega_{tot}}^n = \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_{tot}}\right)^2}} \right]^n = \{ \text{per def.} \} = \frac{|G(j\omega)|_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Kvadrera och dra n:te roten ur

$$1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_{tot}}\right)^2 = 2^{1/n} \Rightarrow \left(\frac{\omega_1}{\omega_{tot}}\right)^2 = 2^{1/n} - 1$$

Vi får 
$$\omega_{tot} = \frac{\omega_1}{\sqrt{2^{1/n} - 1}}$$

pulsfall (lågfrekv. egenskap)

Anta en överf. fkt:n på formen

$$H(s) = \frac{U_{ut}(s)}{U_{in}(s)} = \frac{s\tau}{1+s\tau} \quad (\text{med } \tau = \frac{1}{\omega_1})$$

Studera stegsvar: Insignal  $\theta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A_0}{s}$

$$U_{ut}(s) = U_{in}(s) \cdot H(s) = \frac{A_0}{s + \frac{1}{\tau}}$$

Inv. Laplace ger  $u_{ut}(t) = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ ,  $t > 0$



□ och nu bandbredden

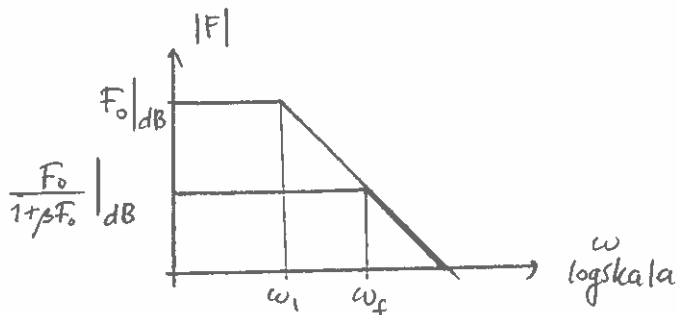
Anlag en förstärkare med en pol (LP-först) enligt

$$F = \frac{F_0}{1 + \frac{s}{\omega_1}}$$

Slutna förstärkningen  $F_f$  får genom att ersätta  $F$  med motsvarande överföringsfunktion i uttrycket för  $F_f$ .

$$\begin{aligned} F_f &= \frac{F}{1 + \beta F} = \left\{ F = \frac{F_0}{1 + \frac{s}{\omega_1}} \right\} = \frac{\frac{F_0}{1 + \frac{s}{\omega_1}}}{1 + \beta \frac{F_0}{1 + \frac{s}{\omega_1}}} = \frac{F_0}{1 + \frac{s}{\omega_1} + \beta F_0} = \\ &= \frac{F_0}{1 + \beta F_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_1(1 + \beta F_0)}} = F_{of} \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_f}} \end{aligned}$$

Övre brytrinkelfrekvens har ökat till  $\omega_f = \omega_1(1 + \beta F_0)$   
Max. förstärkning har minskat till  $F_f = \frac{F_0}{1 + \beta F_0}$



GB: "Gain Bandwidth" produkten är konstant

$$GB = F_{of} \cdot \omega_f = \frac{F_0}{1 + \beta F_0} \cdot \omega_1(1 + \beta F_0) = F_0 \omega_1$$

(Anges för op-förstärkare i datablad.)

/end män

/forts. Återkoppling

2010-11-30

Tisdag

□ Förbättra noggrannheten i förstärkningen

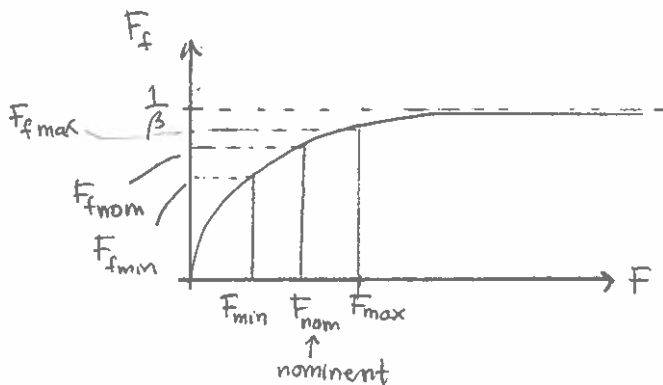
En verklig operationsförstärkares öppna förstärkning upprisar relativt stor spridning vid serieproduktion.

För den återkopplade först. gäller

$$F_f = \frac{F}{1 + \beta F}$$

Noggrannheten i  $F_f$  blir bättre ju högre  $F$  är

$$F_f = \frac{F}{1 + \beta F} \rightarrow \frac{1}{\beta} \text{ då } F \rightarrow \infty$$



Hur beror  $F_f$  av  $F$ ?

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_f}{\partial F} &= \frac{(1+\beta F) - \beta F}{(1+\beta F)^2} = \frac{1}{(1+\beta F)^2} = \frac{F_f}{(1+\beta F)F(1+\beta F)} = \\ &= \frac{F_f}{F} \frac{1}{(1+\beta F)}\end{aligned}$$

Linjärisera ( $\partial \rightarrow \Delta$ ) kring punkten  $F = F_{\text{nom}}$

$$\underbrace{\left| \frac{\Delta F_f}{F_f} \right|}_{\text{Relativ spridning i } F_f} = \underbrace{\left| \frac{\Delta F}{F} \right|}_{\text{Relativ spridning i } F} \underbrace{\frac{1}{1+\beta F}}_{\text{okänslighetsfaktorn}} \quad \text{Om } |1+\beta F| \gg 1 \Rightarrow \left| \frac{\Delta F_f}{F_f} \right| \ll \left| \frac{\Delta F}{F} \right|$$

### Enkelt numeriskt exempel

Tillverkning av op-först.

$$F_{\text{nom}} = 1000$$

Spridning: 95% ligger inom  $\pm 20\%$  av  $F_{\text{nom}}$

Hur stor blir motsvarande spridning i den återkopplade förstärkaren då okänslighetsfaktorn  $1+\beta F = 10$

$$\text{Alltså } \beta = \frac{10-1}{F} = \frac{9}{1000}$$

Utan återkoppling

$$F_{\text{nom}} = 1000 \Rightarrow \begin{cases} F_{\text{min}} = 800 \\ F_{\text{max}} = 1200 \end{cases}$$

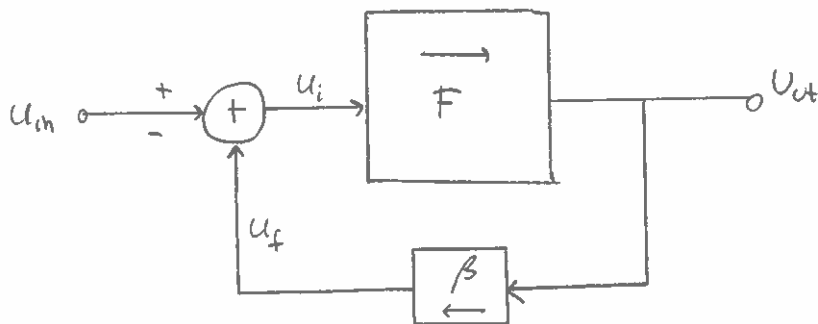
$$\text{Med återkoppling } \begin{cases} F_{\text{nom}} = 100 \\ \beta = 0,009 \end{cases} \quad 1 + \beta F = 10$$

$$F_{\text{fmax}} = \frac{1200}{1 + 0,009 \cdot 1200} = 101,69 \Rightarrow +1,69\%$$

$$F_{\text{fmin}} = \frac{800}{1 + 0,009 \cdot 800} = 97,56 \Rightarrow -2,44\%$$

Negativ återkoppling av 1:a, 2:a och 3:e ordn. system

Grundmodell



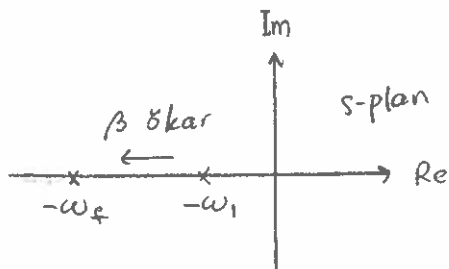
$$\frac{U_{\text{ut}}}{U_{\text{in}}} = F_{\text{f}} = \frac{F}{1 + \beta F}$$

□ Första ordn. system  
(en pol)

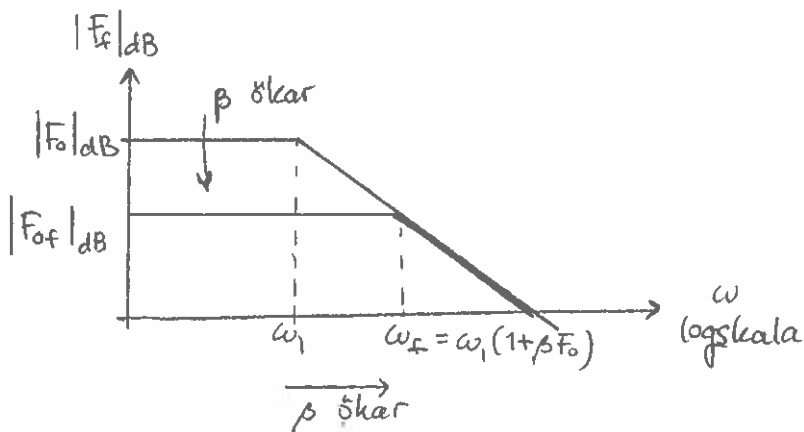
$$F(s) = \frac{F_0}{1 + \frac{s}{\omega_1}} \quad \text{öppna först.}$$

$$F_f = \frac{\frac{F_0}{1 + \frac{s}{\omega_1}}}{1 + \beta \frac{F_0}{1 + \frac{s}{\omega_1}}} = \frac{\overbrace{F_0}^{F_{0f}}}{1 + \beta F_0} \frac{1}{1 + \frac{s}{\underbrace{\omega_0(1 + \beta F_0)}_{\omega_f}}} = \frac{F_{0f}}{1 + \frac{s}{\omega_f}}$$

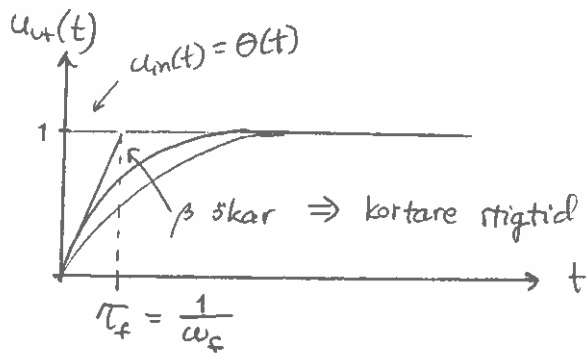
\* s-plan (polplacering)



\* Frekvensplan, studera  $|F_f(j\omega)|$



\* Tidsplan (stegsvar)



$$u_{ut}(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{u_{in}(s)} \cdot \frac{F_{of}}{1 + \frac{s}{\omega_f}}$$

Inv. transt.:  $u_{ut}(t) = F_{of} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_f}}\right) \cdot \theta(t)$

□ 2:a ordningens system  
(2 poler)

$$F(s) = \frac{F_0}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)} \quad \text{öppna först.}$$

$$\left(F_{of} = \frac{F_0}{1 + \beta F_0}\right)$$

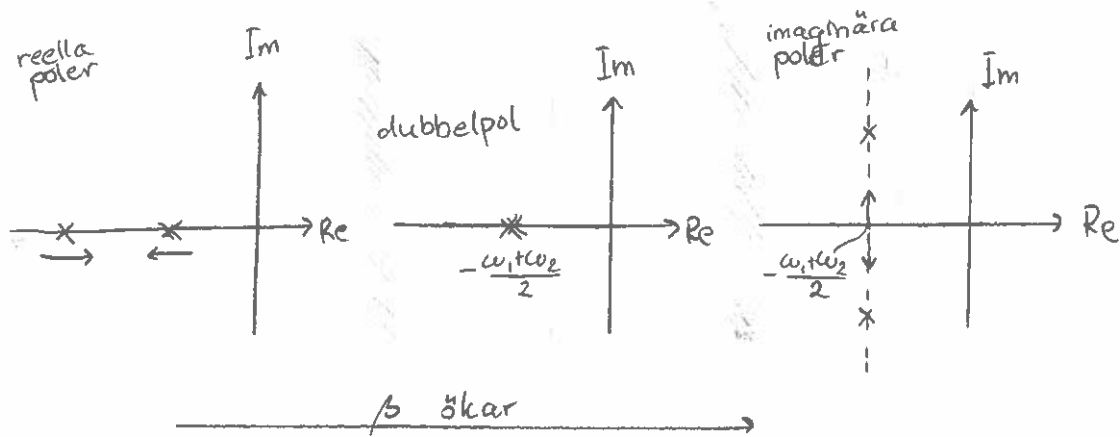
Insätter i

$$\tau_f = \frac{F}{1 + \beta F} = \dots = \frac{\omega_1 \omega_2 (1 + \beta F_0)}{s^2 + s(\omega_1 + \omega_2) + \omega_1 \omega_2 (1 + \beta F_0)} = \frac{\omega_0^2 F_{of}}{s^2 + 2k\omega_0 s + \omega_0^2}$$

där  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2 (1 + \beta F_0)}$   $2k = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_0}$   
 $k$ : dämpfaktor  $\left\{ \beta \text{ ökar} \rightarrow k \text{ minskar} \right\}$

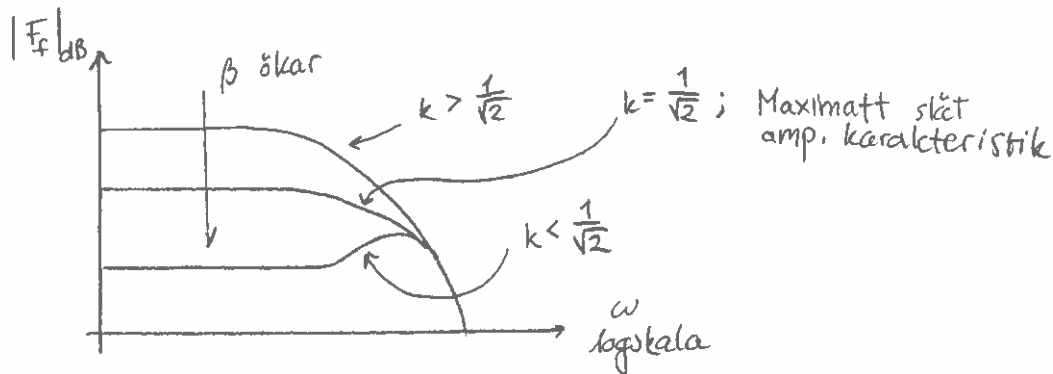
Poler:  $s_{1,2} = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)^2 - \omega_1 \omega_2 (1 + \beta F_0)}$

\* s-plan



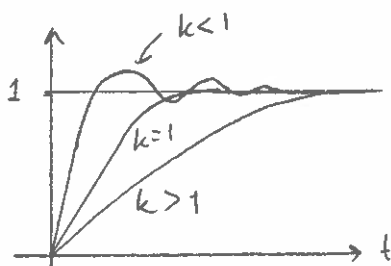
\* Frekvensplan

Amplitudkaraktistik (Bode)



\* Tidsplan (stegsvar)

Insignal:  $u_m(t) = \Theta(t)$ , Studera  $u_{ut}(t)$



$k > 1$ : Översvängningsfritt stegsvar (reella poler)

$k = 1$ : Maximatt snabbt stegsvar utan översväng, Krittiskt dämpat, Aperiodiska gränsfallet (dubbelpol)

$k < 1$ : Översvängning i stegsvar, underdämpat system, Imaginära poler

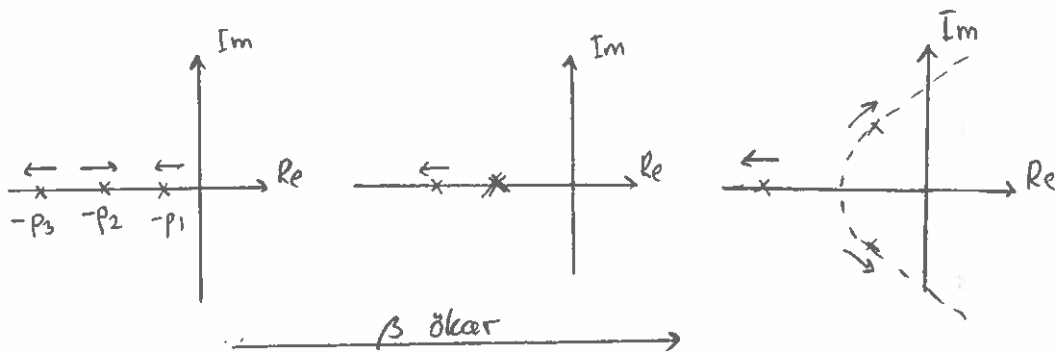
□ 3:e ordn. system

$$F(s) = \frac{F_0}{(1 + \frac{s}{\omega_1})(1 + \frac{s}{\omega_2})(1 + \frac{s}{\omega_3})}$$

Insättning i  $F_f = \frac{F}{1 + \beta F}$

$$F_f(s) = \frac{F_0 \beta}{(1 + \frac{s}{p_1})(1 + \frac{s}{p_2})(1 + \frac{s}{p_3})}$$

\* s-plan



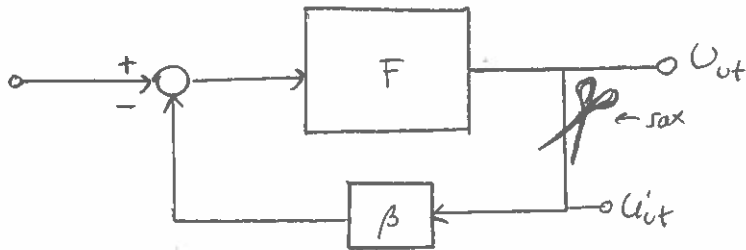
poler kan vandra i HHP, då blir systemet instabilt!

Stabilitet

Def: Begränsad insignal  $\Rightarrow$  Begränsad utsignal  
(BIBO)



## Slingförst.



$$T_f = \frac{1}{1+\beta F} = \frac{F}{1-T}$$

Beräkning av  $T$ :

Bryt upp återkoppl. slinga. Nollställ ingång ( $U_{in} = 0$ )

Beräkna  $\frac{U_{ut}}{U_{ut}} = -\beta F = T$

Hur undviker vi en återkoppling där  $\beta F = -1$  allt.  $T = 1$ ?

Studera  $-\beta F (=T)$  för stabilitetsanalys.

\* Amplitudmarginal

$$GM = -20 \log |\beta F|_{\omega=\omega_\phi}$$

[Uttrycker] Hur mycket förstärkningen kan öka innan  $|\beta F| = 1$  vid  $\arg\{\beta F\} = -180^\circ$

\* Fasmarginal

$$\Phi_M = \arg\{\beta F\} + 180^\circ \Big|_{\omega=\omega_\phi}$$

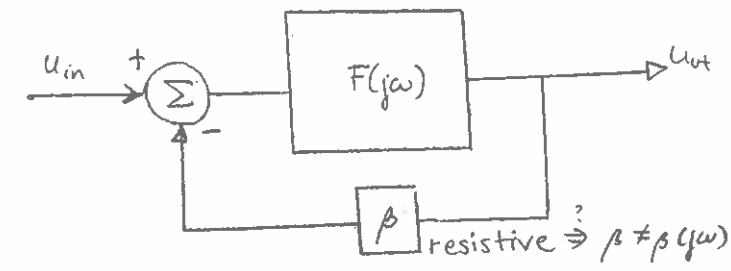
Hur mycket kan faserivridningen öka innan  $\arg\{\beta F\} = -180^\circ$  då  $|\beta F| = 1$  vid  $\omega = \omega_\phi$

/end tis

Problems F3, F6, H1

med Hamid

2010-12-1  
Onsdag



$$T = -\beta F(j\omega)$$

↳ loop-Gain

closed-loop gain  $F_{tot}(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{1 + \beta F(j\omega)}$  open-loop gain

$\beta$  is independent of  $\omega$ .

phase margin = 45°

- 1)  $\beta$  is constant and does not contribute to the phase plot.
- 2) The effect of  $\beta$  on the magnitude plot is simply to shift vertically by  $20 \log \beta$

$\beta$  is constant  $\Rightarrow$  same phase figure for  $\beta F(j\omega)$  and  $F(j\omega)$   
 phase margin = 45° =  $\varphi_M = \angle \beta F + 180^\circ$

$\angle \beta F = -135^\circ$ ;  $|\beta F(j\omega)| = 1 \text{ times} = 0 \text{ dB}$

phase margin is measured when loop-Gain is unity.  
 The non-feedback amplifier has a phase shift of  $-135^\circ$   
 with  $f = f' = 200 \text{ kHz}$

$\beta$  has also a phase shift of  $-135^\circ$  with  $f' = 200 \text{ kHz}$ .

we will have  $|\beta F| \leq 0 \text{ dB}$

$|F(j, 2\pi f')| = 73 \text{ dB} \Rightarrow \beta_{max} = -73 \text{ dB} \approx 2.24 \times 10^{-4} \text{ (times)}$

$20 \log |\beta F(j\omega)| = 20 \log |\beta| + 20 \log |F(j\omega)|$   
 for maximum  $\beta$ :  $|\beta F(j\omega)|$  curve occurs 73 dB below  $|F(j\omega)|$  curve.  
 $|\beta F(j\omega)|_{max} = 105 - 73 = 32 \text{ dB} \quad (\sim 40 \text{ times})$

Total maximum gain:  $\left\{ F(j\omega) \Big|_{\max} = F_0 \right\}$

for feedback amplifier:  $F_{\text{tot}/\max} = \frac{F_0}{1 + \beta F_0}$

$$20 \log F_{\text{tot}/\max} = 20 \log F_0 - 20 \log \frac{(1 + \beta F_0)}{40}$$

$$20 \log F_{\text{tot}/\max} \approx 20 \log F_0 - 20 \log \beta F_0$$

$\log 39 = 1.591$   
 $\log 40 = 1.602$   
 $\log 41 = 1.613$

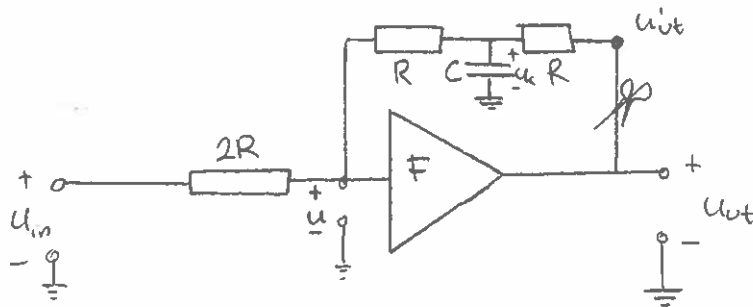
For max  $\beta$ :

$$20 \log F_{\text{tot}/\max} \approx 105 - 32 = 73 \text{ dB}$$

for minimum  $\beta$  ( $\beta = 0$ ):

$$20 \log F_{\text{tot}/\max} = 105 - \underbrace{20 \log(1+0)}_0 = 105$$

F6)



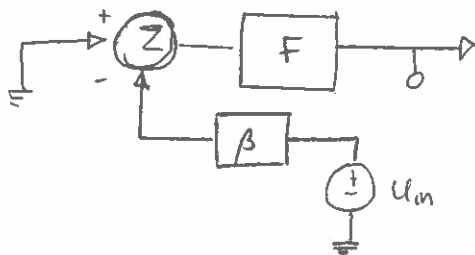
$\varphi_m = 45^\circ$   
 $Z_{in} = \infty$   
 $Z_{out} = 0$   
 $R = 100 \text{ k}\Omega$

$\omega_1 = 2\pi \times 10^3 \text{ rad/s}$   
 $\omega_2 = 20 \omega_1$   
 $F_0 = 80 \text{ dB}$

$$F(j\omega) = \frac{-F_0}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})}$$

open loop gain

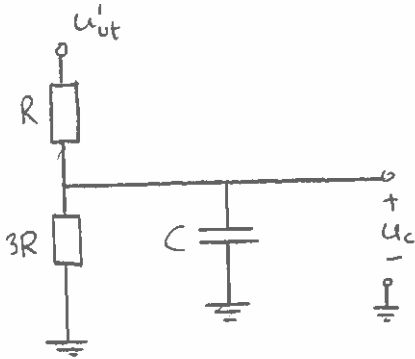
stability: loop gain



$$T = \frac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}} = -\beta F$$

$$u_{ut} = u \cdot F$$

$$u = u_c \frac{2R}{R+2R} = \frac{2}{3} u_c$$



$$\Rightarrow u_c = u'_{ut} \frac{3R \parallel \frac{1}{sC}}{R + (3R \parallel \frac{1}{sC})}$$

$$u_c = u'_{ut} \frac{\frac{3R}{1+s3RC}}{R + \frac{3R}{1+s3RC}} =$$

$$= u'_{ut} \frac{3}{4 + s3RC} = \frac{3}{2} u$$

$$\Rightarrow u = \frac{2u'_{ut}}{4(1+s\frac{3RC}{4})} = \frac{u_{ut}}{F} \Rightarrow T = \frac{u_{ut}}{u'_{ut}} = \frac{F}{2(1+s\frac{3RC}{4})}$$

$$\Rightarrow T = - \frac{F_0/2}{\underbrace{(1+\frac{s}{\omega_0})}_{\text{from RC circuit}} (1+\frac{s}{\omega_1}) (1+\frac{s}{\omega_2})}$$

$$T = -\beta F \quad \begin{cases} \omega_0 = \frac{4}{3RC} \\ \omega_1 = 2\pi \times 10^3 \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 2\pi \times 20 \times 10^3 \text{ rad/s} \end{cases}$$

find the frequency of where we have  $-135^\circ$  phase shift for  $\beta F$

$$\beta F = - \frac{F}{2(1+s\frac{3}{4}RC)} = -T$$

$$\omega = \omega_c \quad \text{we should have } \varphi_M = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle \beta F = -135 \quad \text{and} \quad |\beta F| = 1$$

$$s = j\omega$$

$$\angle \beta F = -\arctan \frac{\omega_c}{\omega_0} - \arctan \frac{\omega_c}{\omega_1} - \arctan \frac{\omega_c}{\omega_2} = -135^\circ$$

$\begin{matrix} -90^\circ & & -45 & & 0 \end{matrix}$

assume:  $\begin{cases} \omega_c \gg \omega_0 \\ \omega_c = \omega_1 \\ \omega_c \ll \omega_2 \end{cases}$

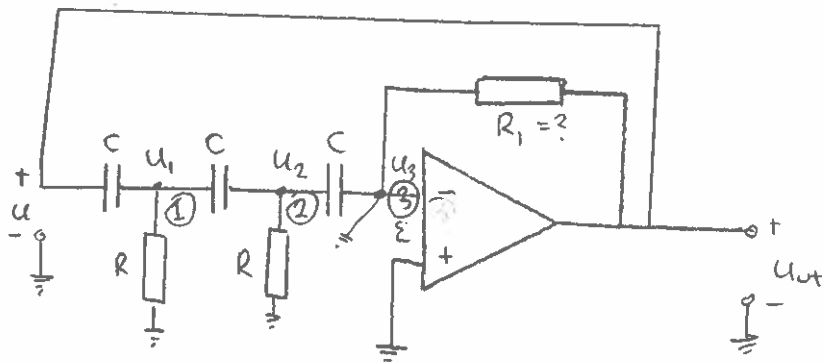
$$|\beta F|^2 = \frac{(F_0/2)^2}{\left(1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2\right) \underbrace{\left(1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_1}\right)^2\right)}_{=1} \left(1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_2}\right)^2\right)}$$

$$\approx 1 = \frac{(F_0/2)^2}{\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 \times 2 \times 1}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_c}{\omega_0} = \frac{F_0}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\omega_0} = \frac{3RC}{4} = \frac{F_0}{2\sqrt{2}\omega_c} \Rightarrow C = \frac{4}{3R} \cdot \frac{F_0}{2\sqrt{2}\omega_c} = 7.5 \mu\text{F}$$

$$\omega_0 = \frac{4}{3RC} = 2\pi \cdot 0.283 \text{ rad/s} \quad \frac{\omega_c}{\omega_0} \gg 1$$

H1)



$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

$C = 4.7 \text{ nF}$   $R_1 = ?$  to have sine output  
osc. freq = ?

assume ideal op-amp  $\begin{cases} Z_{in} = \infty \\ Z_{out} = 0 \\ F = \infty \end{cases}$

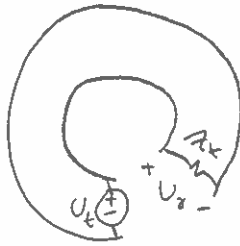
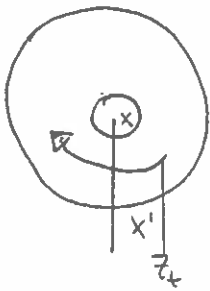
negative feedback  $\Rightarrow \epsilon = 0$

osc.  $T = \frac{u_{ut}}{u} \geq 1$

$T=1$   
 $u_{ut}=u$

$T = -\beta F$

Impedance restoration



$\Sigma i$  in ①, ② and ③ :  $u_2 = 0$

$$\begin{cases} (u-u_1)sC - \frac{u_1}{R} + (u_2-u_1)sC = 0 & (1) \\ (u_1-u_2)sC - \frac{u_2}{R} - u_2sC = 0 & (2) \\ u_2sC + \frac{u_{ut}}{R_1} = 0 & (3) \end{cases}$$

(3):  $u_2 = -\frac{u_{ut}}{sR_1C}$

(2):  $u_1sC = u_2\left(\frac{1}{R} + 2sC\right)$        $u_1 = u_2 \cdot \frac{1+2sRC}{sRC}$

(1):  $sCu = u_1\left(\frac{1}{R} + 2sC\right) - u_2sC$   
 $u = u_1 \frac{1+2sRC}{sRC} - u_2$

eliminate  $u_1$ :  $u = u_2 \left[ \left(\frac{1+2sRC}{sRC}\right) \left(\frac{1+2sRC}{sRC}\right) - 1 \right]$

eliminate  $u_2$ :  $u = -\frac{u_{ut}}{sR_1C} \left[ \left(\frac{1+2sRC}{sRC}\right)^2 - 1 \right]$

in border line case  $T=1$  }  $\Rightarrow$  sinusoidal swinging  
 $u_{ut}=u$

$$1 = \frac{-1}{sRC} \left[ \left(\frac{1+2sRC}{sRC}\right)^2 - 1 \right]$$

$$sRC \cdot (sRC)^2 = -(1+2sRC)^2 + (sRC)^2$$

$$s^3 R_1 R^2 C^3 = -(1+s4RC+s^2 4R^2 C^2) + s^2 R^2 C^2$$

sinusoidal steady state analysis  $\{s=j\omega\}$

$$-j\omega^3 R_1 R^2 C^3 = -1 - j\omega 4RC + \omega^2 4R^2 C^2 - \omega^2 R^2 C^2$$

$$\{Re\} \quad 1 = \omega^2 s R^2 C^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{3R^2 C^2}$$

$$\Rightarrow \omega_{osc.} = \frac{1}{\sqrt{3}RC}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 19.56 \text{ kHz}$$

$$\{Im\} \quad \omega^3 R_1 R^2 C^3 = \omega 4RC \quad R_1 = \frac{\omega 4RC}{\omega^3 R_1 R^2 C^3} = \frac{4}{\omega^2 R C^2}$$

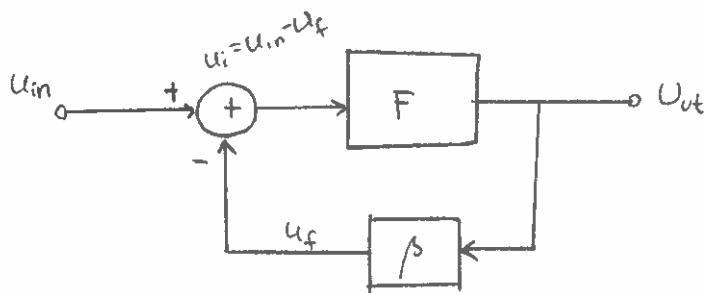
$$R_1 = \frac{4 \times 3R^2 C^2}{RC^2} = 12R = \boxed{12k\Omega = R_1}$$

/end ons

Återkopplad förstärkare

2010-12-03

Freddag



$$\frac{U_{out}}{U_{in}} = F_f = \frac{F}{1+\beta F}$$

För stabilitet studera  $\beta F$ . Med slingförstärkning  $T = -\beta F$

## Oscillator

Vid design av oscillator gäller

$$T(j\omega) = 1 \quad \text{eller} \quad \beta F(j\omega) = -1$$

$$|T| = 1$$

$$|\beta F| = 1$$

$$\arg\{T\} = 0^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\arg\{\beta F\} = -180^\circ$$

eller

$$\operatorname{Re}\{T\} = 1$$

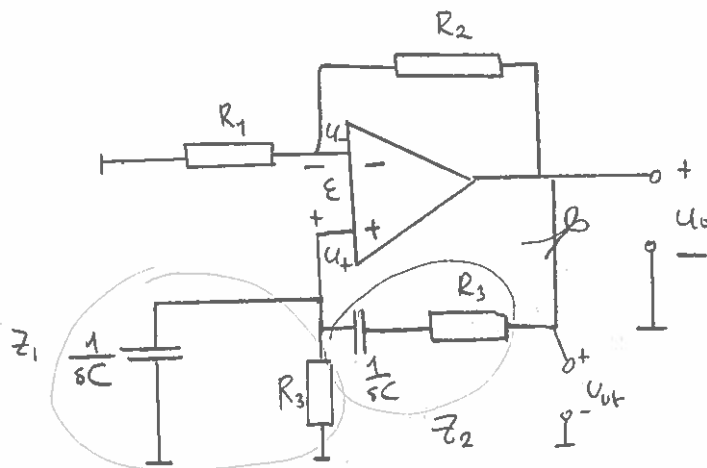
$$\operatorname{Re}\{\beta F\} = -1$$

$$\operatorname{Im}\{T\} = 0$$

$$\operatorname{Im}\{\beta F\} = 0$$

## Exempel

Wieneroscillator



Antag ideal op. först. }  $\Rightarrow \epsilon = 0$   
 Neg. återkopplad

Antag  $C$  känd, sök relation mellan  $R_1$  och  $R_2$  samt oscillationsfrekv.



Beräkna slingförst.  $T = \frac{U_o}{U_{in}}$

$$U_- = U_o \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$U_+ = U_{in} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = U_{in} \frac{R_3 // \frac{1}{sC}}{R_3 // \frac{1}{sC} + R_3 + \frac{1}{sC}}$$

$$U_- = U_+ \quad \text{ty} \quad \varepsilon = 0$$

$$\text{Bilda kvot} \quad \frac{U_o}{U_{in}} = \dots = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{sCR_3}{s^2C^2R_3^2 + 3sCR_3 + 1}$$

Vid sinusformad oscillation:

$$s = j\omega$$
$$T(j\omega_0) = 1 \quad \begin{cases} \text{Re}\{T(j\omega_0)\} = 1 \\ \text{Im}\{T(j\omega_0)\} = 0 \end{cases}$$

$$T = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{j\omega_0 R_3 C}{1 - \omega_0^2 C^2 R_3^2 + j3\omega_0 C R_3} = 1$$

Re-del i nämnare = 0

$$1 - \omega_0^2 C^2 R_3^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{R_3 C} \quad \text{svängningsvinkelfrekv.}$$

Kvar en kvot

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1} = 3$$

Räkna #6

## Andra ord. system

Utgå ifrån ett system med två poler,  
inga nollställen.

$$H(s) = \frac{K}{(s-p_1)(s-p_2)} = \{ \text{poler } s_1=p_1, s_2=p_2 \} = \frac{K}{s^2 - s(p_1+p_2) + p_1p_2}$$

Partialbråksuppdelning

$$H(s) = \frac{K}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{A}{s-p_1} + \frac{B}{s-p_2}$$

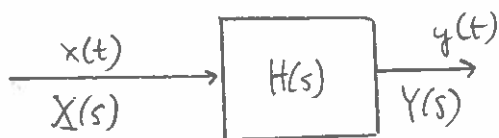
$$K = A(s-p_2) + B(s-p_1)$$

$$s^0: K = -Ap_2 - Bp_1$$

$$s^1: 0 = A + B$$

$$\text{Vi får } A = \frac{K}{p_1+p_2} = -B$$

$$\text{Invers Laplace: } \frac{1}{s+a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-at} \cdot \Theta(t)$$



$$\text{Relation: } Y(s) = H(s)X(s)$$

$$\text{Insignal: } x(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$$

$$y(t): \text{ Utsignal (impulsvar) } y(t) = h(t)$$

$$\text{med } X(s) = 1: Y(s) = H(s) \cdot 1$$

Inverstransformering ger impulsvarret

$$h(t) = Ae^{p_1t} - Ae^{p_2t} ; t > 0$$

Om  $p_1$  och  $p_2$  reella så måste  $p_1 < 0$  och  $p_2 < 0$ , annars går  $h(t) \rightarrow \infty$  då  $t \rightarrow \infty$  vilket innebär ett instabilt system.

För komplexa poler  $p_1 = a + jb$   $p_2 = p_1^* = a - jb$

$$h(t) = Ae^{(a+jb)t} - Ae^{(a-jb)t} ; t > 0$$

$$h(t) = Ae^{at} \cdot 2j \sin bt, \quad t > 0$$

$a = \operatorname{Re}\{p_1\} = \operatorname{Re}\{p_2\}$  måste vara  $< 0$  för ett stabilt system

$b = \operatorname{Im}\{p_1\}$  ger svängningsfrekv.

Med  $p_1 = \sigma + j\omega$

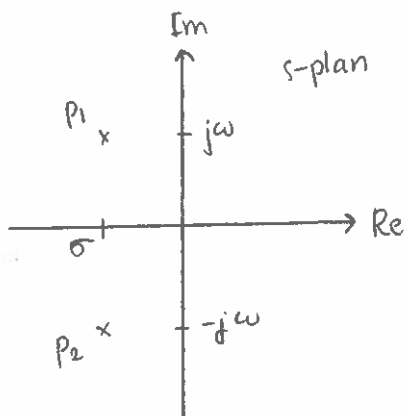
$$p_2 = \sigma - j\omega = p_1^*$$

$$K = 1$$

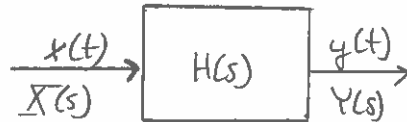
$$A = \frac{K}{p_1 - p_2} = \frac{1}{2j\omega}$$

$$h(t) = \frac{1}{\omega} e^{\sigma t} \sin \omega t, \quad t > 0$$

För stabilt system  $\sigma < 0$  poler  $p_1$  och  $p_2$  i VP.



Stegsvar:



Insignal: Ett steg  $\theta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} = \underline{X}(s)$

Utsignal (stegsvar):  $Y(s) = \frac{1}{s} H(s)$

Vi ser att  $y(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$

### Systemets frekvensfunktion

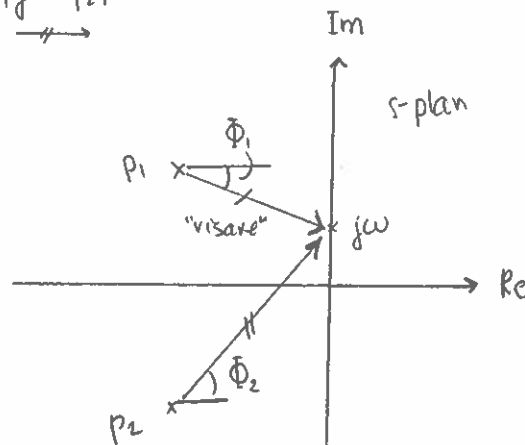
$$H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{K}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)}$$

$H(j\omega)$  studeras vanligen med Amplituddiagram  $|H(j\omega)|$   
och Fasdiagram  $\arg\{H(j\omega)\}$   
Med logaritmiska axlar  $\rightarrow$  Bodediagram

$$|H(j\omega)| = \frac{|K|}{\underbrace{|j\omega - p_1|}_{\text{---}} \underbrace{|j\omega - p_2|}_{\text{---}}}$$

$$\Phi_1 = \arg\{j\omega - p_1\}$$

$$\Phi_2 = \arg\{j\omega - p_2\}$$



Genom att studera hur längden på visarna  $j\omega - p_1$  och  $j\omega - p_2$  varierar med  $\omega$  kan man få en uppfattning hur  $|H(j\omega)|$  ser ut. Även förändringar i  $\arg\{H(j\omega)\}$  kan studeras i samma figur.

$$\arg\{H(j\omega)\} = \arg\{K\} - \Phi_1(\omega) - \Phi_2(\omega)$$



Massa exempel  
Undre gränsvinkel frekvens  
pulsfall s. 155

Sammanfattade kommentarer:  
- stigtid, pulsfall

Återkoppling (allmänt)

- Negativ återkoppling  
bandbredd

Noggrannhet

1:a, 2:a, 3:e ordn. system  
- s-plan, frekvensplan, tidsplan

Stabilitet s. 168

Slingförst. (och saxen!)

Massa exempel

Återkopplad förstärkare (rep.)

Oscillator s. 176

2:a ordn. system

Systemets frekvensfunktion s. 180

Lv7

Elektriska nät och system

Ants Silberberg  
Hamid

[ ESS 115 ]

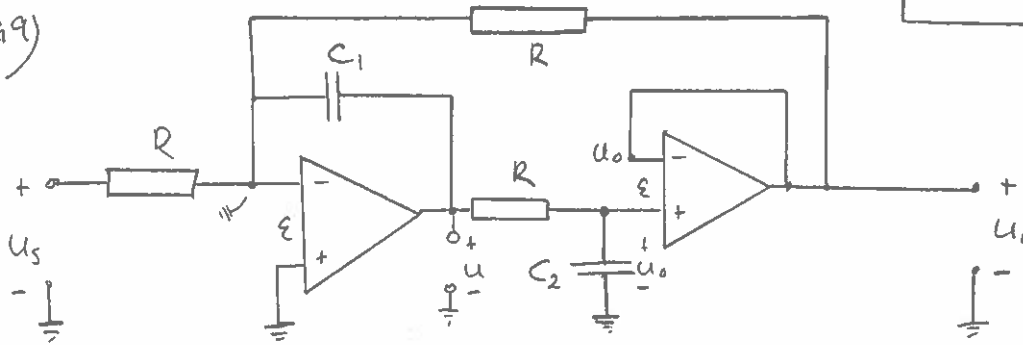
F2 lp2 2010





2010-11-05  
Måndag

G9)



$R = 1 \Omega, C_1 = 2F, C_2 = ?$

Ideal op-amps  
neg. feedback }  $\Rightarrow \epsilon = 0$

Step function as fast as possible  
without oscillating.

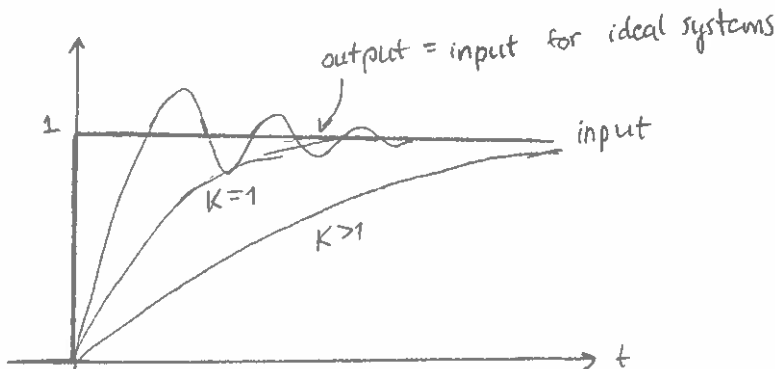
Second order system

$H(s) = \frac{\omega_0^2 H_0}{s^2 + s 2K\omega_0 + \omega_0^2}$

Poles:  $s_{1,2} = -\omega_0 (K \pm \sqrt{K^2 - 1})$

	poles
$K > 1$	real
$K = 1$	double
$K < 1$	imag.

(overdamped system)  
(critically damped system)  $\nearrow$  max fast step response without osc.  
(underdamped sys.)  $\rightarrow$  osc.



$$\begin{cases} \frac{u_s}{R} + \frac{u_0}{R} + u_s C_1 = 0 \Rightarrow u_s = -u_0 - u_s R C_1 \\ u_0 = u \frac{1/s C_2}{R + \frac{1}{s C_2}} = \frac{u}{1 + s R C_2} \Rightarrow u = u_0 (1 + s R C_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_s = -u_0 (1 + s R C_1 + s^2 R^2 C_1 C_2) \Rightarrow \frac{u_0}{u_s} = - \frac{1}{1 + s R C_1 + s^2 R^2 C_1 C_2}$$

$$H(s) = \frac{u_0}{u_s} = \frac{\frac{1}{R^2 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{s}{R C_2} + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}} \xrightarrow{\text{poles}} s_{1,2} = -\frac{1}{2 R C_2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2 R C_2}\right)^2 - \frac{1}{R^2 C_1 C_2}}$$

non-oscillatory sys.  
as fast as possible }  $\Rightarrow$  double pole

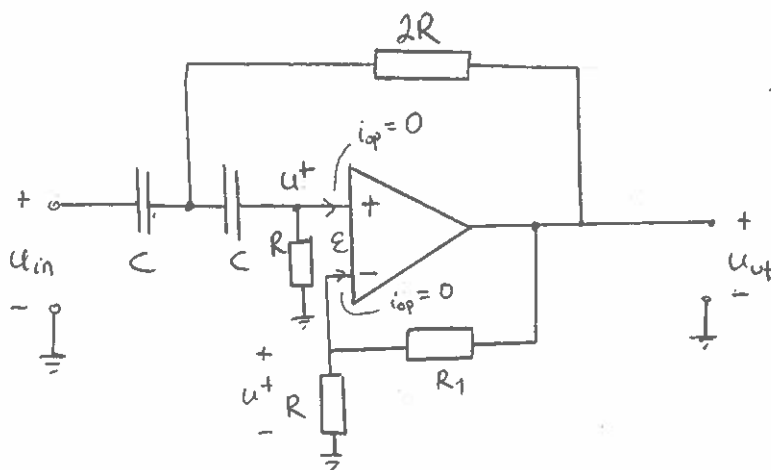
$$\frac{1}{(2 R C_2)^2} - \frac{1}{R^2 C_1 C_2} = 0 \rightarrow \frac{1}{4 C_2^2} = \frac{1}{C_1 C_2} \Rightarrow C_2 = \frac{C_1}{4} = \frac{2F}{4} = \underline{\underline{0.5F}}$$

alternative:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R^2 C_1 C_2} \quad (1) \quad 2k\omega_0 = \frac{1}{R C_2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 2k\sqrt{C_2} = \sqrt{C_1} \xrightarrow{k=1} C_2 = \frac{C_1}{4}$$

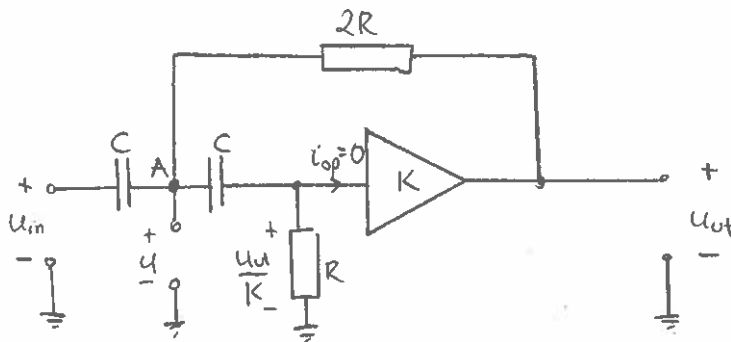
G15)



$R_i = ?$   
step response  
function non-osc.

ideal op-amp }  $\Rightarrow \epsilon = 0$   
neg. feedback }

$$u^+ = u_{out} \frac{R}{R+R_1} \quad K = \frac{u_{out}}{u^+} = \frac{R+R_1}{R}$$



KCL:  $\sum_A i = 0 \quad i = \frac{u}{R}$

$$(u_{in} - u) sC + \frac{u_{out} - u}{2R} = \frac{u}{R + \frac{1}{sC}}$$

$$\Rightarrow u_{in} \cdot sCR = u \left[ \frac{sCR}{1+sCR} + sCR + \frac{1}{2} \right] - \frac{u_{out}}{2}$$

$$\frac{u_{ut}}{K} = u \cdot \frac{R}{R + 1/sC} \Rightarrow u = u_{ut} \frac{1+sRC}{K \cdot sRC}$$

$$u_{in} \cdot sRC = u_{ut} \left( \frac{1}{k} (1 + 1 + sRC + \frac{1+sRC}{2sRC}) - \frac{1}{2} \right)$$

H(s)  
↓

$$H(s) = \frac{u_{ut}}{u_{in}} = \frac{sRC \cdot K \cdot 2sRC}{(2+sRC) \cdot 2sRC + 1 + sRC - KsRC} = K \frac{s^2 (RC)^2 \cdot 2}{1 + sRC(5-K) + s^2 \cdot 2(RC)^2}$$

$$\text{Poles: } s_{1,2} = -\frac{5-K}{2RC} \pm \sqrt{\underbrace{\left( \frac{5-K}{4RC} \right)^2 - \frac{1}{2R^2C^2}}_{\geq 0}}$$

non-osc. sys.  $\rightarrow$  real pole

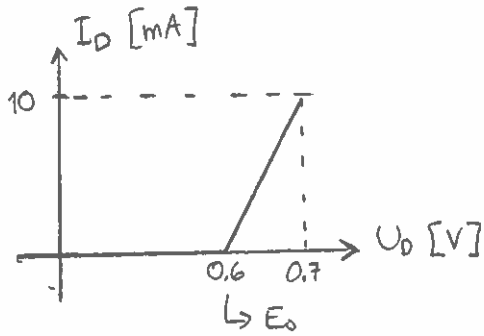
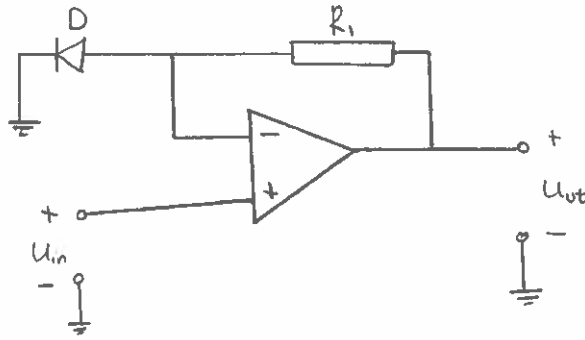
$$\left( \frac{5-K}{4RC} \right)^2 - \frac{1}{2R^2C^2} \geq 0 \rightarrow (5-K)^2 \geq 8 \Rightarrow 5-K \geq \pm \sqrt{8}$$

but  $5-K > 0$  otherwise we get poles in right half plane  
 $\rightarrow$  unstable filter

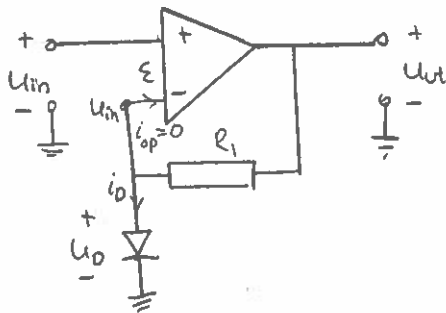
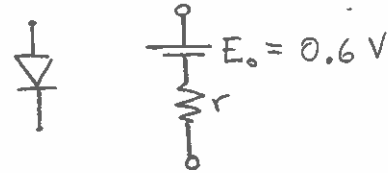
$$5-K \geq \sqrt{8} \rightarrow K \leq 5 - \sqrt{8}$$

$$K = \frac{R+R_1}{R} = 1 + \frac{R_1}{R} \leq 5 - \sqrt{8} \Rightarrow 0 \leq R_1 \leq R \underbrace{(4 - \sqrt{8})}_{1.17}$$

c8)



ideal op-amp  
op-amp:  $\pm 10\text{ V}$   
 $R_1 = 1\text{ k}\Omega$   
neg. feedback  $\rightarrow \epsilon = 0$

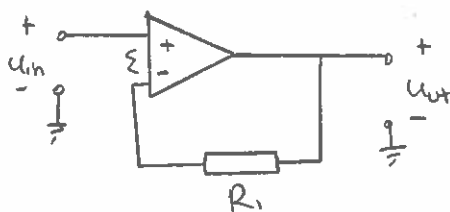


$$i_D = \begin{cases} 0 & U_D < E_0 \\ \frac{U_D - E_0}{r} & U_D > E_0 \end{cases}$$

$$r = \frac{0.7 - 0.6}{10 \times 10^{-3}} = 10\ \Omega$$

$$-U_{out} + R_1 i_D + U_D = 0 \Rightarrow U_{out} = R_1 i_D + U_D$$

①  $U_{in} < E_0 \rightarrow$  Diode is off (open circuit)



$$U_{out} = U_{in} \text{ for } -10 < U_{in} < E_0$$

$$\text{if } U_{in} < -10\text{ V} \Rightarrow U_{out} = -10\text{ V}$$

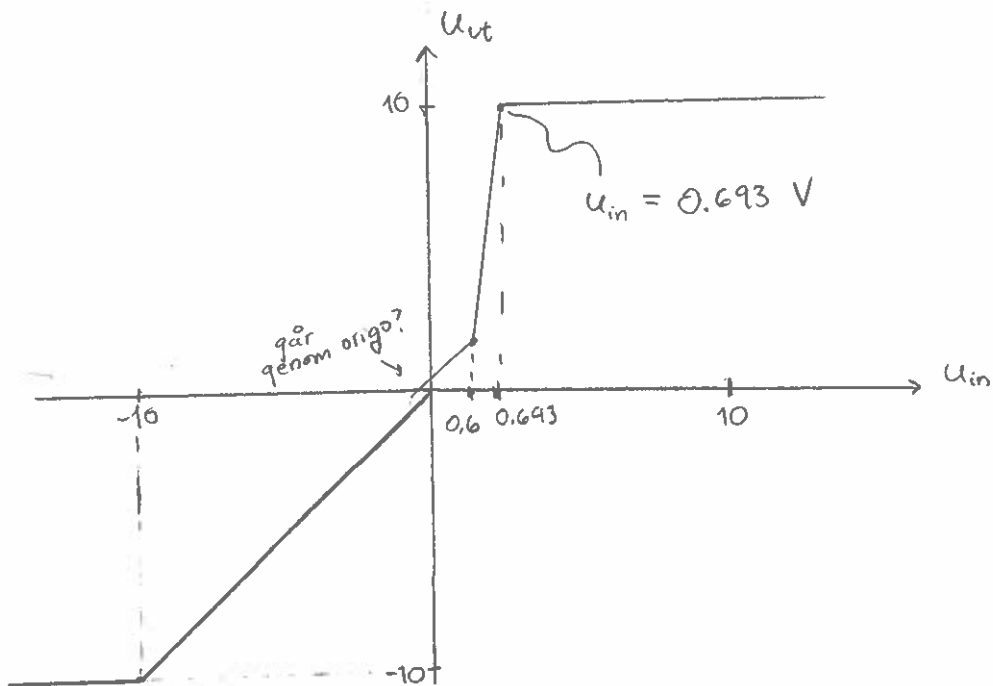
$$\textcircled{2} \quad u_{in} > E_0 \Rightarrow u_{ut} = R_1 \cdot i_D + u_D = R_1 \frac{u_D - E_0}{r} + u_D$$

$$= \{u_D = u_{in}\} = \left(\frac{R_1}{r} + 1\right) u_{in} - \frac{R_1}{r} E_0 = 101 u_{in} - 60$$

$$u_{ut(\max)} = +10 \Rightarrow u_{in} = \frac{u_{ut(\max)} + \frac{R_1 E_0}{r}}{\frac{R_1}{r} + 1} = \underline{\underline{0.693 \text{ V}}}$$

$$u_{ut} = \begin{cases} -10 \\ u_{in} \\ 101 \cdot u_{in} - 60 \\ +10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &u_{in} < -10 \text{ V} \\ &-10 \text{ V} \leq u_{in} < 0.6 \text{ V} \\ &0.6 \text{ V} \leq u_{in} < 0.693 \text{ V} \\ &u_{in} \geq 0.693 \text{ V} \end{aligned}$$



## Aktiva RC-filter

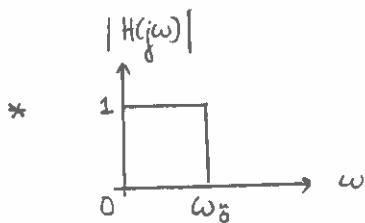
eller Frekvensselektiva förstärkare

Realiseras med

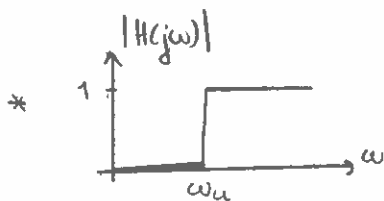
- \* Resistanser
- \* Kondensatorer (kapacitans)
- \* Op-först. (Aktiv komponent)

Vi behöver (som tur är) ej använda spolar för att realisera induktanser. Spolar är stora, tunga, svårtillverkade samt svåra att ge ideala egenskaper (som en ren induktans).

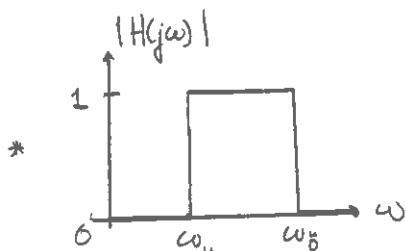
Exempel på ideala filterkaraktärstikar



Lågpåssfilter, LP

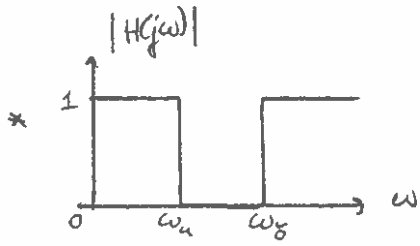


Högpåssfilter, HP

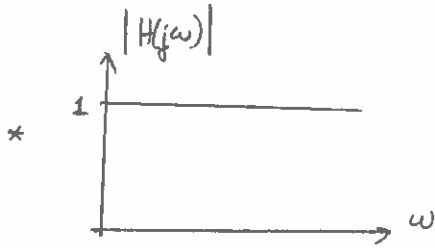


Båndpassfilter, BP

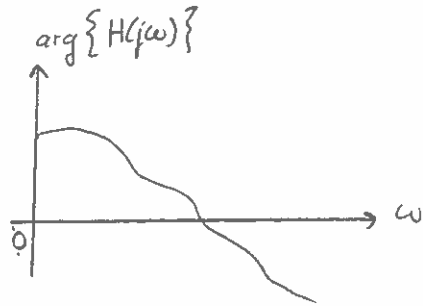




Bandspärrfilter, BS

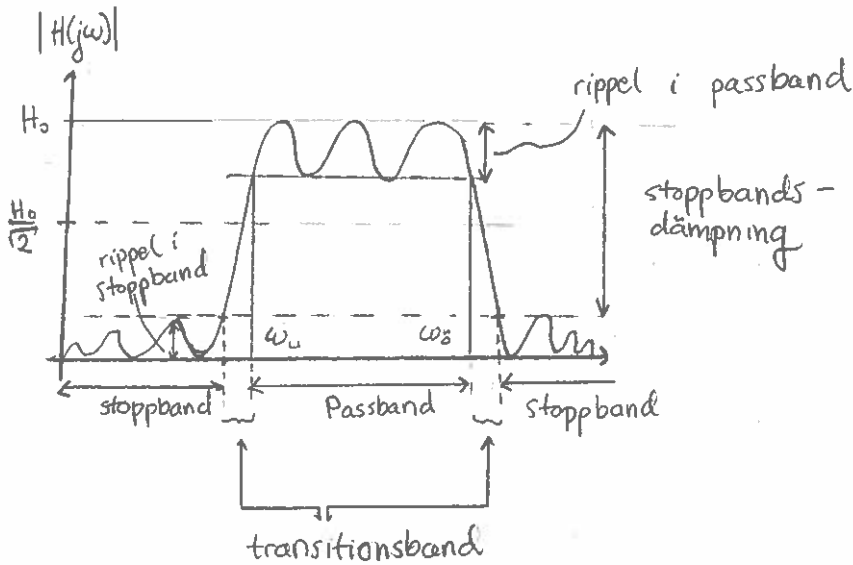


Allpassfilter, AP



Här är faskurvan intressant.

Verklig filterkaraktäristik (ex. med bandpass)



När man ska konstruera ett verkligt filter börjar man lämpligen med motsvarande överf.f.fkn  $H(s)$  (Laplace form)

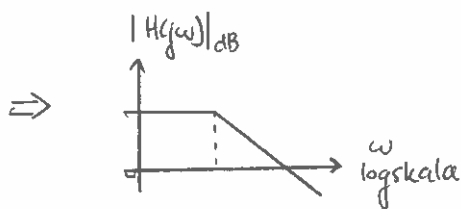
$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_M s^M + a_{M-1} s^{M-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_1 s + b_0} =$$

$$= \frac{a_M (s-z_1)(s-z_2) \dots (s-z_M)}{b_N (s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_N)}$$

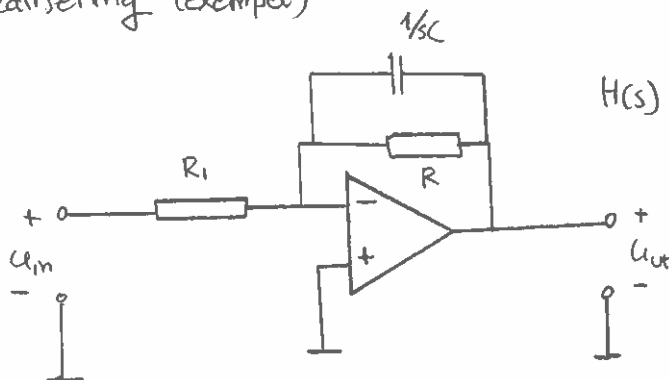
\* Första ordn. filter

$$H(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + b_0}$$

□ LP - filter  $H(s) = \frac{a_0}{b_1 s + b_0}$  ( $a_1 = 0, b_1 = 1$ )  $H(s) = \frac{a_0}{s + b_0}$

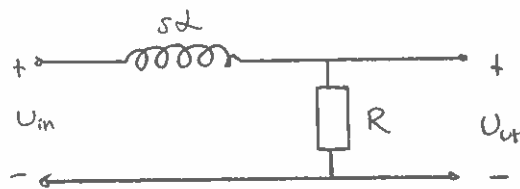


Realisering (exempel)



$$H(s) = \frac{U_{ut}}{U_{in}} = - \frac{1}{R_1 C} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

dämpför



Spänningsdelning ger

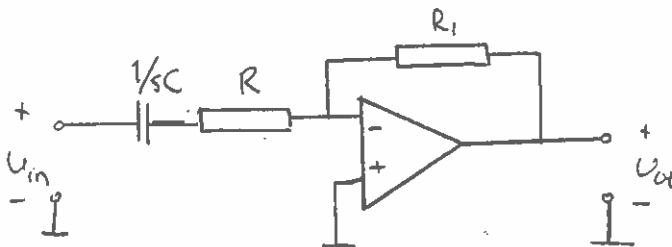
$$U_{ut} = U_{in} \frac{R}{R+sL} \Rightarrow \frac{U_{ut}}{U_{in}} = \frac{\frac{R}{L}}{s + \frac{R}{L}}$$

Samma form på överf. fkn. med en RL-krets

□ HP-filter

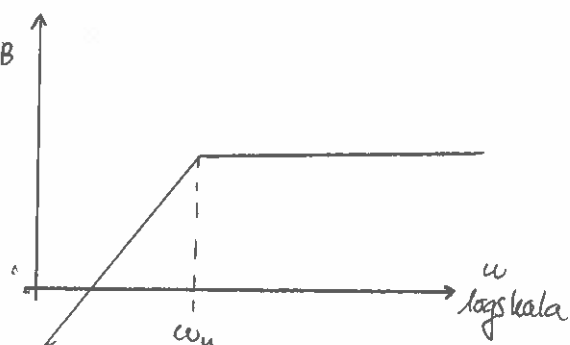
$$H(s) = \{a_0=0, b_1=1\} = \frac{a_1 s}{s+b_0}$$

Realisering (exempel)



$$\text{ger } H(s) = -\frac{R_1}{R} \frac{s}{s + 1/RC}$$

med  $|H(j\omega)|_{dB}$

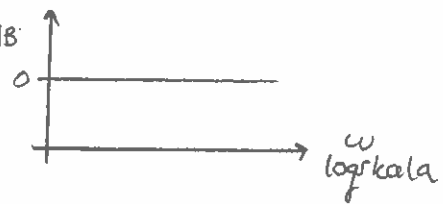


□ Allpassfilter

$$a_1 = b_1 = 1 \quad a_0 = -b_0$$

$$H(s) = \frac{s - a_0}{s + a_0}$$

med  $|H(j\omega)|_{dB}$



### Andra ordningens filter

Tecknas generellt som  $H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$

1. Lågpäss  $a_2 = a_1 = 0$

2. Bandpass  $a_2 = a_0 = 0$

3. Högpäss  $a_1 = a_0 = 0$

4. Bandspärr  $a_1 = 0$

5. Allpass Typ:  $H(s) = \frac{s^2 - b_1 s + b_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$

← [kan ej fås med 1:a ordn. system!]

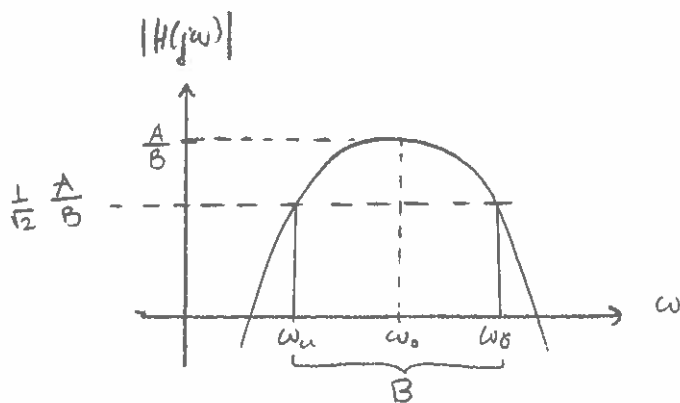
Titta närmare på bandpassfilter!

$$H(s) = \frac{a_1 s}{s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{A s}{s^2 + B s + \omega_s^2} \quad \text{med belopp, } |H(j\omega)|$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega A}{\sqrt{(\omega_s^2 - \omega^2)^2 + (\omega B)^2}}$$

Egenskaper hos  $|H(j\omega)|$

- $|H(j\omega)|_{\max} = \frac{A}{B}$
- $|H(j\omega)|_{\max}$  erhålls för  $\omega = \omega_0$
- Bandbredden  $B = \omega_s - \omega_u$



$$|H(j\omega)| = \frac{\omega A}{\omega B} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \underbrace{\frac{1}{(\omega B)^2} (\omega_0^2 - \omega^2)^2}_{=1}}}}$$

sök brytvinkel frekvensen  
∴ de vinkel frekvenser  $\omega$  där

$$|H(j\omega)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{A/B}{\sqrt{2}}$$

Då måste  $\frac{1}{(\omega B)^2} \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)^2 = 1$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = (\omega B)^2$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) = \pm \omega B$$

TVÅ 2:a grads ekv. ger totalt 4 lösningar.  
Välj de två positiva lösningarna vilket ger  $B = \omega_s - \omega_u$

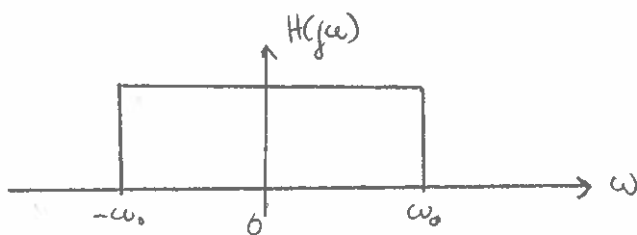
Et bekvämt sätt att realisera godtyckliga rationella överföringsfunktioner,  $H(s) = \frac{A'(s)}{B'(s)}$  är att kaskadkoppla första och andra ordningens förstärkarsteg.

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \dots H_n(s)$$

Varje förstärkarsteg måste då ha en hög inimpedans och en låg utimpedans. Förstärkningen skall ej belastas varandra (vara "oberoende" av varandra).

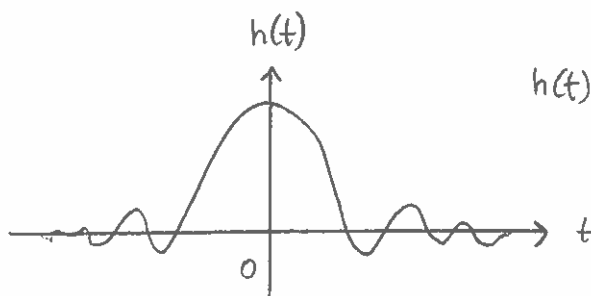
### Idealt LP-filter

Beskrivning i frekvensdomänen



$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Invers Fouriertransform ger  $h(t)$  enligt



$h(t)$  är systemets impulssvar.

$h(t)$  är icke kausalt samt det har oändligt utsträckning.  
Ej praktiskt realiserbart.

## Filterapproximationer

2010-11-07  
Tisdag

Utgå från amplitudkaraktistiken.

Metod: Försök få  $|H(j\omega)|^2$  att efterlikna ett idealt lågpasfilter.  
Sök lämpligt  $H(s)$ .

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H^*(j\omega) = H(j\omega)H(-j\omega) \quad (\text{eftersom } H(s) \text{ skall ha reella koefficienter})$$

$$\text{och } |H(j\omega)|^2 = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\omega}$$

Butterworth approx. till ett idealt LP-filter

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}} \quad n=1,2,3,\dots \quad \text{filtrets ordningstal}$$

Egenskaper:

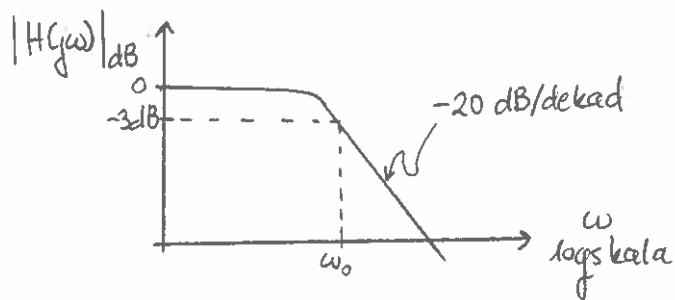
$$1) \quad |H(j\omega)|_{\omega=0} = 1 \quad \text{ober. av } n$$

$$|H(j\omega)|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{Brytvinkelfrekvens } \omega=\omega_0, \text{ ober. av } n$$

$$|H(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad \text{ober, av } n$$

2)  $|H(j\omega)|$  är monotont avtagande för ökande  $\omega$   
Max värde vid  $\omega = 0$ .

3) Asymptotisk lutning hos  $|H(j\omega)|$  för  $\omega \gg \omega_0$   
är  $-20 \cdot n$  dB/dekad



4) De första  $(2n-1)$  derivatorna till  $|H(j\omega)|^2$  är  
noll vid  $\omega = 0$ .

⇒ Maximalt slät amplitudkaraktäristik



Beräkna polernas placering till Butterworthfiltret.

$$|H(j\omega)|^2 = H(s)H(-s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}} \quad \text{sätt } \omega = \frac{s}{j}$$

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\omega_0}\right)^{2n}} \quad \left(\frac{s}{j\omega_0}\right)^{2n} = -1 = e^{j(2\pi k + \pi)}$$

$$\frac{s}{j\omega_0} = e^{j\frac{2\pi k + \pi}{2n}} \quad s = j\omega_0 e^{j\frac{2\pi k + \pi}{2n}} \quad \left\{ j = e^{j\frac{\pi}{2}} \right\}$$

$$s = \omega_0 e^{j\left(\frac{2\pi k + \pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$$

Ex  $n=3$

$$\theta = \arg\{s\} = \frac{2\pi k + \pi}{6} + \frac{\pi}{2}$$

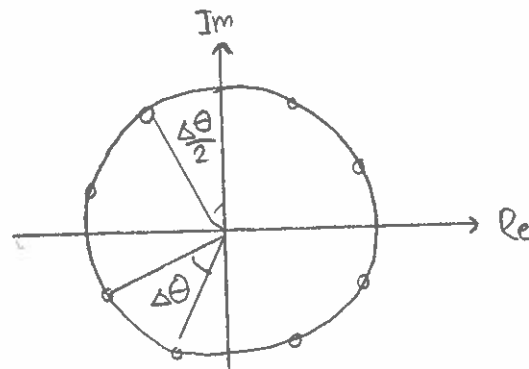
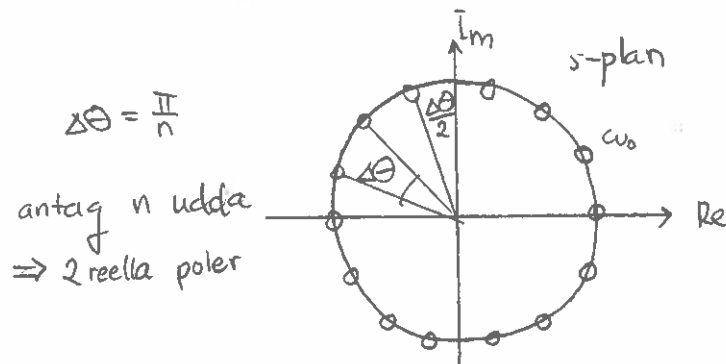
$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{n} \quad \theta_{\text{offset}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$$

Ex  $n=4$

$$\theta = \frac{2\pi k + \pi}{8} + \frac{\pi}{2} \quad \Delta\theta = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{n}$$

$$\theta_{\text{offset}} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$$

Polerna blir placerade på en cirkel med radien  $\omega_0$  i s-planet.



$n$ -jämnt  
 $\Rightarrow$  inga reella poler

Till  $H(s)$ , välj de  $n$  st. poler som ligger i VHP.  
 (krav för stabilitet)

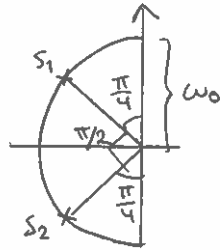
Normaliserade ( $\omega_0 = 1$ ) Butterworthfilter finns ofta  
 angivna i tabellverk.

Exempel: Butterworth LP,  $n=2$

$$H(s) = \frac{H_0 \omega_0^2}{s^2 + 2k\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{H_0 \omega_0^2}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$$



$$s_{1,2} = \omega_0 \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Lös andragrads ekv.

$$s_{1,2} = -k\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{k^2 - 1}$$

$$\circ^\circ k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

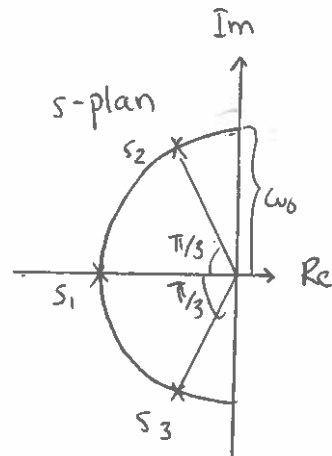
Exempel  $n=3$

$$H(s) = \frac{H_0}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}$$

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{3}$$

Poler:  $s_1 = -\omega_0$ , reell

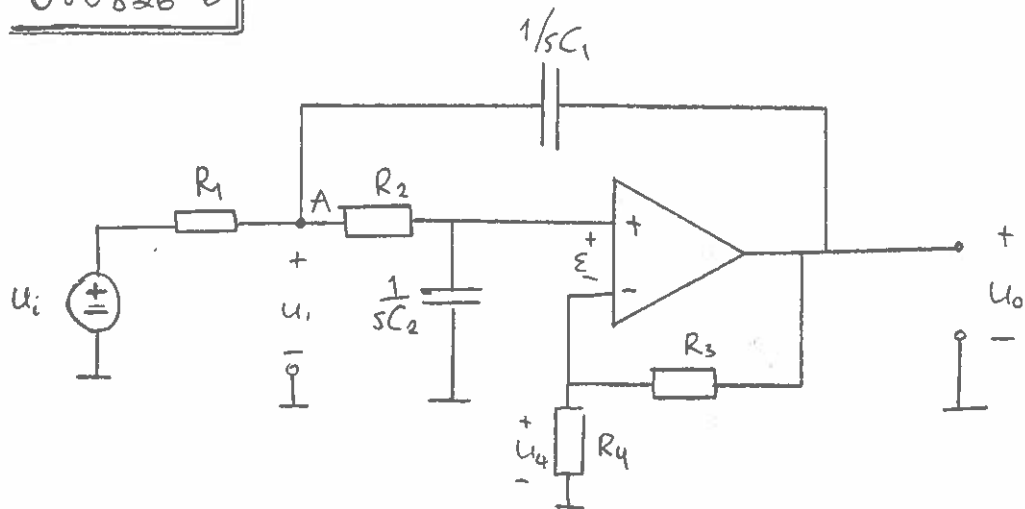
$$s_{2,3} = -\frac{\omega_0}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0$$



Detta filter kan realiseras med en kaskad-koppling av ett första ordn. system (pol =  $s_1$ ) och ett andra ordn. system (polar =  $s_2$  och  $s_3$ )

Tentauppg.

080826-6



Ideal op. först. }  $\Rightarrow \epsilon = 0$   
 Neg. återkoppl. }  $i_{op} = 0$

a) Beräkna överföringsfunktionen  $\frac{u_o}{u_i}$

Kretsekv.  $\left\{ \begin{array}{l} u_4 = u_o \frac{R_4}{R_3 + R_4} \quad (1) \\ \frac{u_i - u_1}{R_1} + \frac{u_o - u_1}{1/sC_1} - \frac{u_4}{1/sC_2} = 0 \quad (2) \leftarrow i_{C_2} = i_{R_2} \\ u_4 = u_1 \frac{1/sC_2}{R_2 + 1/sC_2} \quad (3) \end{array} \right.$

(1), (3)  $\Rightarrow u_1 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} (1 + sR_2C_2) u_o$

(2) eliminera  $u_4$  och  $u_1$ . Efter lite hantverk fås

$$\frac{u_o}{u_i} = \frac{1 + \frac{R_3}{R_4}}{1 + s(R_1C_1 + R_2C_2 - \frac{R_1R_3}{R_4}C_1) + s^2R_1R_2C_1C_2}$$

[s] = per tidsenhet  $s^{-1}$

[RC] = tidsenhet s

$$b) R_1 = R_2 = R \quad C_1 = C_2 = C$$

$$\frac{u_o}{u_i} = \frac{\left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) \frac{1}{R^2 C^2}}{s^2 + s \frac{1}{RC} \left(2 - \frac{R_3}{R_4}\right) + \frac{1}{(RC)^2}}$$

Kritiskt dämpad  $\rightarrow$  Dubbelpol  $\Rightarrow \frac{R_3}{R_4} = 0$

Vi får

$$\frac{u_o}{u_i} = \frac{\frac{1}{R^2 C^2}}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)^2}$$

c) Butterworth fallet

därför allmänna uttrycket  $H(s) = \frac{H_0}{s^2 + 2k\omega_0 s + \omega_0^2}$   
med  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ . Vi ska ha  $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$

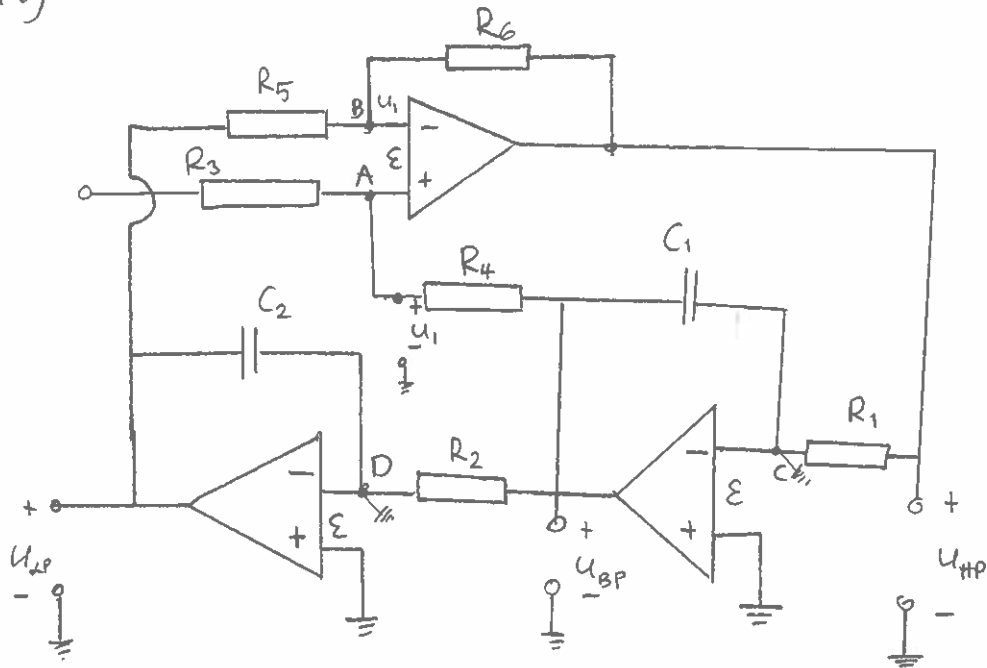
$$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 - \frac{R_3}{R_4} \quad \frac{R_3}{R_4} = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0.556$$

lend tis

Problems: G19: op-amp, [E3, D6]: BJT

2010-12-08  
Onsdag

G19)



"state variable", second order HP  
BP  
LP } filter

$$C_1 = C_2 = 0.1 \mu\text{F} \quad R_5 = R_6 = 10 \text{ k}\Omega \quad R_3 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R = R_1 = R_2 = ? \quad R_4 = ?$$

condition: Butterworth LP filter ideal op-amps. cut-off freq. = 100 Hz

$$\left. \begin{array}{l} \text{ideal op-amps} \\ \text{neg. feedback} \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon = 0$$

$$\text{KCL}_A: \frac{u_s - u_1}{R_3} + \frac{u_{BP} - u_1}{R_4} = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{u_s R_4 + u_{BP} R_3}{R_3 + R_4}$$

$$\text{KCL}_B: \frac{u_{LP} - u_1}{R_5} + \frac{u_{HP} - u_1}{R_6} = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{u_{LP} R_6 + u_{HP} R_5}{R_5 + R_6}$$

$$\text{KCL}_C: \frac{u_{BP}}{u_{HP}} = -\frac{1}{s R_1 C_1}$$

$$\text{KCL}_D: \frac{u_{LP}}{u_{BP}} = -\frac{1}{s R_2 C_2}$$

$$\frac{u_{LP}}{u_{HP}} = \frac{1}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2} \quad "u_1 = u_1"$$

$$\frac{u_s R_4 - u_{LP} s R_2 R_3 C_2}{R_3 + R_4} = \frac{u_{LP} R_6 + u_{LP} s^2 R_1 R_2 R_5 C_1 C_2}{R_5 + R_6}$$

$$\Rightarrow \frac{u_s R_4}{R_3 + R_4} = u_{LP} \left[ \frac{s R_2 R_3 C_2}{R_3 + R_4} + \frac{R_6}{R_5 + R_6} + \frac{s^2 R_1 R_2 R_5 C_1 C_2}{R_5 + R_6} \right]$$

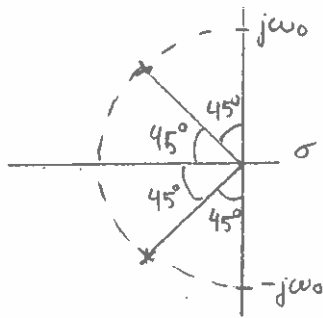
$$\frac{u_{LP}}{u_s} = \frac{\frac{R_5 + R_6}{R_3 + R_4} \cdot \frac{R_4}{R_1 R_2 R_5 C_1 C_2}}{s^2 + s \frac{R_5 + R_6}{R_3 + R_4} \frac{R_3}{R_1 R_5 C_1} + \frac{R_6}{R_1 R_2 R_5 C_1 C_2}} = \left\{ \begin{array}{l} R = R_1 = R_2 \\ R_3 = R_5 = R_6 \\ C = C_1 = C_2 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\frac{2R_3}{R_3 + R_4} \cdot \frac{R_4}{R^2 R_3 C^2}}{s^2 + s \cdot \frac{2R_3}{R_3 + R_4} \cdot \frac{1}{RC} + \frac{1}{(RC)^2}} = \frac{k \omega_0^2}{s^2 + s 2\alpha \omega_0 + \omega_0^2} \Rightarrow$$

*kan vara i K ist., spelar ej roll*

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha \omega_0 = \frac{2R_3}{R_3 + R_4} \cdot \frac{1}{RC} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{(RC)^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \\ \omega_0 = \frac{1}{RC} \end{array} \right.$$

2<sup>nd</sup> order Butterworth filter

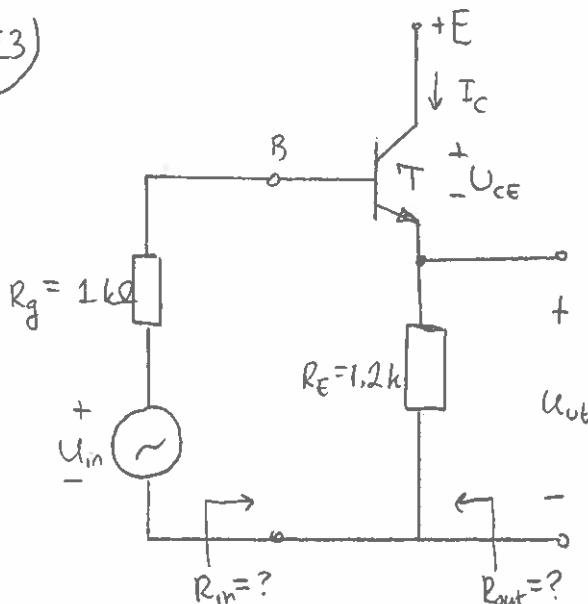


Poles:  $s_{1,2} = -\omega_0(\alpha \pm j\sqrt{1-\alpha^2})$   
 $= -\omega_0(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\frac{1}{\sqrt{2}})$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\begin{cases} \omega_0 = 2\pi \cdot 100 \text{ rad/s} \\ R_3 = 10 \text{ k}\Omega \\ C = 0.1 \mu\text{F} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{1}{\omega_0 C} = \underline{15.9 \text{ k}\Omega} = R_1 = R_2 \\ R_4 = R_3(\frac{1}{\alpha} - 1) = R_3(\sqrt{2} - 1) = \underline{4.1 \text{ k}\Omega} \end{cases}$

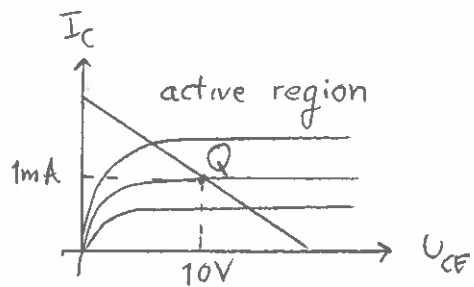
E3)



neglect  $\begin{cases} h_{oe} \\ h_{re} \end{cases}$

input and output resistance?  
"emitter follower"

BC167B  
operating point  $\begin{cases} I_c = 1 \text{ mA} \\ U_{CE} = 10 \text{ V} \end{cases}$





Datasheet:

with  $I_c = 2\text{mA}$ ,  $U_{CE} = 5\text{V}$

with  $I_c = 1\text{mA}$ ,  $U_{CE} = 5\text{V}$

$$\begin{cases} h_{11} = 4.5\text{ k}\Omega \\ h_{12} = 2 \times 10^{-4} \\ h_{21} = 330 \\ h_{22} = 30\ \mu\text{S} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{11} = 1.8 \\ H_{12} = 1.4 \\ H_{21} = 0.93 \\ H_{22} = 0.63 \end{cases}$$

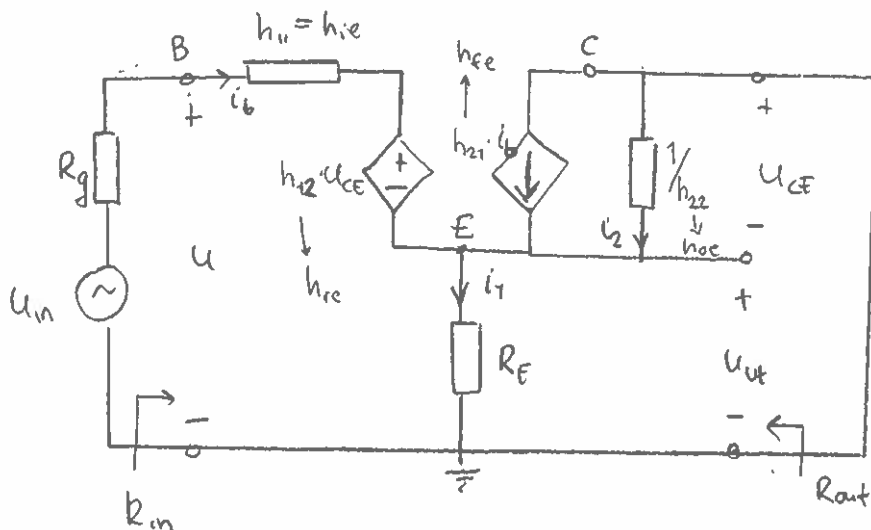
with  $I_c = 2\text{mA}$ ,  $U_{CE} = 10\text{V}$

$$\begin{cases} H_{11} = 1.1 \\ H_{12} = 0.92 \\ H_{21} = 1.1 \\ H_{22} = 0.75 \end{cases}$$

with  $I_c = 1\text{mA}$ ,  $U_{CE} = 10\text{V}$

$$\begin{cases} h_{11} = 4.5\text{ k} \times 1.8 \times 1.1 = 8.9\text{ k}\Omega \\ h_{12} = 2 \times 10^{-4} \times 1.4 \times 0.92 = 2.6 \times 10^{-4} \\ h_{21} = 330 \times 0.93 \times 1.1 = 338 \\ h_{22} = 30 \times 0.63 \times 0.75 = 14\ \mu\text{S} \end{cases}$$

Small signal model



R<sub>in</sub>

$$R_{in} = \frac{u}{i_b}$$

$$\text{KVL: } u = i_b \cdot h_{11} + h_{12} \cdot u_{ce} + i_1 \cdot R_E \quad (1)$$

$$\text{KVL: } i_1 \cdot R_E + i_2 \cdot \frac{1}{h_{22}} = 0 \Rightarrow i_2 = -i_1 R_E h_{22} \quad (2)$$

$$\text{KCL: } i_1 = i_b(1+h_{21}) + i_2 = i_b(1+h_{21}) - i_1 R_E h_{22} \Rightarrow i_1 = \frac{i_b(1+h_{21})}{1+R_E h_{22}} \quad (3)$$

$$u_{ce} + u_{ut} = 0 \quad u_{ce} = -u_{ut} = -i_1 R_E \quad (4)$$

$$(1) \Rightarrow u = i_b \cdot h_{11} - i_1 h_{12} \cdot R_E + i_1 R_E = i_b \cdot h_{11} + i_1 R_E (1-h_{12})$$

$$(3) \Rightarrow u = i_b \cdot h_{11} + i_b \frac{R_E(1-h_{12})(1+h_{21})}{1+R_E h_{22}}$$

$$R_{in} = \frac{u}{i_b} = h_{11} + \overset{\text{neglect} \rightarrow 0.9998}{\frac{R_E(1-h_{12})(1+h_{21})}{1+R_E h_{22}}} = \underline{\underline{409 \text{ k}\Omega}}$$

$\underbrace{1+R_E h_{22}}_{0.017}$

R<sub>out</sub>

1)  $u_{in} = 0$

2) apply a test source on the output  $R_{out} = \frac{u_{out}}{i_{out}}$

$$\text{KCL: } i_{out} = i_1 - i_b(1+h_{21}) - i_2$$

$$\text{KVL: } i_b(h_{11} + R_g) + h_{12}u_{ce} + R_E i_1 = 0$$

$$\text{KVL: } u_{ce} = -i_1 R_E$$

$$\text{KVL: } i_2 \frac{1}{h_{22}} + i_1 R_E = 0 \Rightarrow i_2 = -i_1 R_E h_{22}$$

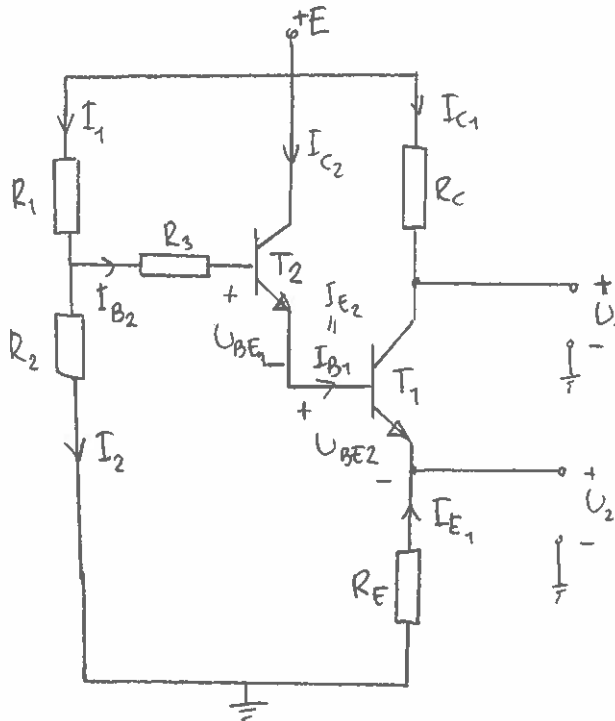
$$\left. \begin{aligned} i_{out} &= i_1 \left( 1 + \frac{R_E}{h_{11} + R_g} (1 + h_{21})(1 - h_{12}) + R_E h_{22} \right) \\ u_{out} &= i_1 R_E \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{out} = \frac{R_E}{\underbrace{1 + R_E h_{22}}_{\approx 0} + \frac{R_E}{h_{11} + R_g} (1 + h_{21})(1 - h_{12}) \approx 1} = 29 \Omega$$

emitter follower

- Gain  $\approx 1$
- low  $R_{out}$
- high  $R_{in}$
- suitable for driving capacitive loads in high freq.

06)



$$U_{BE1} = U_{BE2} = 0.7 \text{ V}$$

$$\beta_1 = 100$$

$$\beta_2 = 50$$

$$R_1 = 82 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 10 \text{ k}$$

$$R_3 = 100 \text{ k}$$

$$E = 24 \text{ V}$$

$$R_c = 1 \text{ k}$$

$$R_E = 100$$

$$\begin{cases} R_2 I_2 = I_{B2} \cdot R_3 + 2U_{BE} - I_{E1} \cdot R_E \\ -I_{E1} = I_{B1} (1 + \beta_1) = I_{B2} (1 + \beta_2) (1 + \beta_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_2 I_2 = I_{B2} [R_3 + R_E (1 + \beta_2) (1 + \beta_1)] + 2U_{BE} \quad (*) \\ E = R_1 I_1 + R_2 I_2 = R_1 (I_2 + I_{B2}) + R_2 I_2 = I_2 (R_1 + R_2) + I_{B2} R_1 \\ R_2 \times (I_2) = \left( \frac{E - I_{B2} R_1}{R_1 + R_2} \right) \times R_2 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{(*)} \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} = I_{B2} \left[ R_3 + R_E (1 + \beta_1) (1 + \beta_2) + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right] + 2U_{BE}$$

$$\Rightarrow I_{B2} = \frac{\frac{E R_2}{R_1 + R_2} - 2U_{BE}}{R_3 + R_E (1 + \beta_1) (1 + \beta_2) + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = 1.94 \mu A$$

$$I_{C2} = \beta_2 I_{B2} = 96.8 \mu A$$

$$I_{B1} = I_{B2} + I_{C2} = 98.8 \mu A$$

$$I_{C1} = \beta_1 I_{B1} = 9.88 \text{ mA}$$

$$I_{E1} = -I_{C1} - I_{B1} = -9.98 \text{ mA}$$

$$I_2 = 0.259 \text{ mA}$$

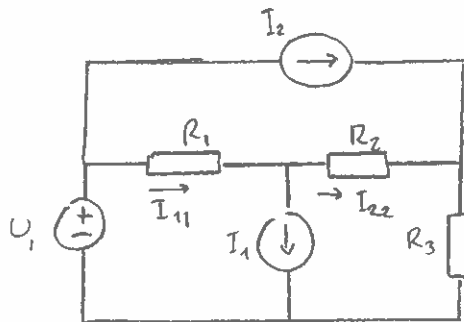
$$I_1 = I_2 + I_{B2} = 0.261 \text{ mA}$$

$$U_1 = E - R_C I_{C1} = 14.1 \text{ V}$$

$$U_2 = -I_{E1} \cdot R_E = 1 \text{ V}$$

/end ons, sista räkneöv.

1)



$$R_1 = R_2 = 1 \Omega$$

$$R_3 = 2 \Omega$$

$$U_1 = 10 \text{ V}$$

$$I_1 = 5,0 \text{ A}, \quad I_2 = 4,0 \text{ A}$$

$$\text{KCL: } I_{11} = I_{22} + I_1$$

$$\text{KVL: } U_1 = R_1 I_{11} + R_2 I_{22} + R_3 (I_2 + I_{22})$$

$$U_1 = R_1 (I_{22} + I_1) + R_2 I_{22} + R_3 (I_2 + I_{22})$$

$$U_1 = I_{22} (R_1 + R_2 + R_3) + R_1 I_1 + R_3 I_2$$

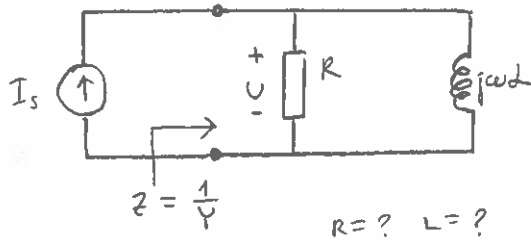
$$I_{22} = \frac{U_1 - R_1 I_1 - R_3 I_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \dots = -\frac{3}{4} \text{ A}$$

$$I_{R_3} = I_2 + I_{22} = \frac{13}{4} \text{ A}$$

Effekt i  $R_3$ :

$$P_{R_3} = R_3 I_{R_3}^2 = 2 \cdot \left(\frac{13}{4}\right)^2 = \dots = \frac{169}{8} \text{ W}$$

2)



komplex effekt

$$S = 11,72 + j11,72 \text{ VA}$$

$$\omega = 5,0 \text{ rad/s}$$

$$i_s(t) = 1,25 \cos(\omega t - 15^\circ) \text{ A}$$

$$I_s = 1,25 \angle -15^\circ$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} \quad U = I_s \cdot Z, \quad I_s = \frac{U}{Z}$$

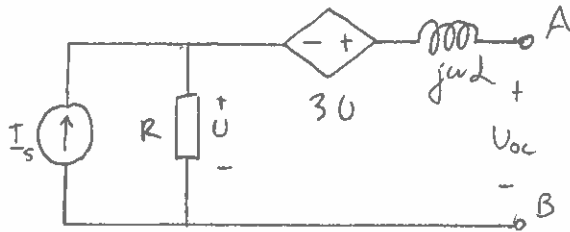
$$S = \frac{1}{2} U I_s^* = \frac{1}{2} Z I_s I_s^* = \frac{1}{2} Z |I_s|^2$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{|I_s|^2}{2 \cdot S} \cdot \frac{S^*}{S^*} = \frac{|I_s|^2}{2 |S|^2} \cdot 11,72 (1-j) = \frac{1,25^2}{2 \cdot 2 \cdot 11,72} (1-j) = \frac{1}{30} (1-j)$$

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{30} + \frac{1}{j30} \Rightarrow R = 30 \Omega$$

$$\omega L = 30 \Rightarrow L = \frac{30}{\omega} = \frac{30}{5} = 6 \text{ H}$$

3)



$$R = 10 \Omega$$

$$L = 10 \text{ mH}$$

$$I_s(t) = 2.0 \cos(1000t) \text{ A}$$

$$I_s = 2.0 \angle 0^\circ \quad \omega = 1000 \text{ rad/s}$$

$$j\omega L = j10 \Omega$$

□ Tomgångsspänning  $U_{oc}$

Ingen ström genom induktansen

$$U_{oc} = 3U + U = 4U$$

$$U = R I_s = 10 \cdot 2 = 20$$

$$U_{oc} = 80 \text{ V}$$

□ Kortslutningsström

$$\text{KCL: } I_s = I_{sc} + \frac{U}{R}$$

$$\text{KVL: } -U - 3U + I_{sc} j\omega L = 0$$

$$j\omega L I_{sc} = 4U$$

$$U = (I_s + I_{sc})R$$

$$j\omega L I_{sc} = 4(I_s + I_{sc})R$$

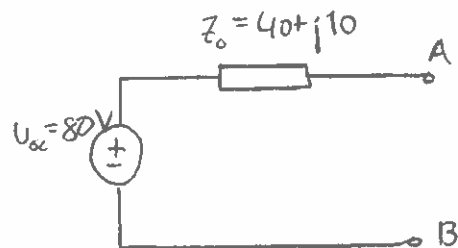
$$I_{sc} (4R + j\omega L) = 4R I_s$$

$$I_{sc} = \frac{4R I_s}{4R + j\omega L} = \frac{80}{40 + j10}$$

$$Z_o = \frac{U_{oc}}{I_{sc}} = \frac{80}{\frac{80}{40 + j10}} = 40 + j10$$

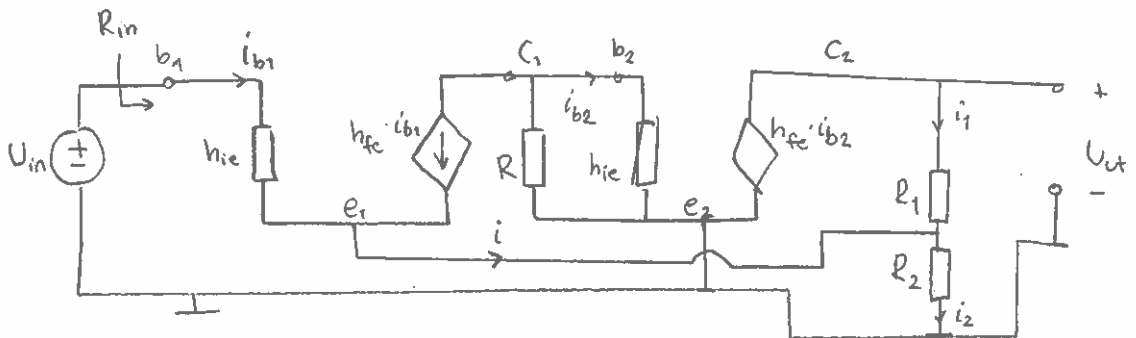
in impedans

Ekvivalent tvåpol (Thevenin):



#### 4) Småsignalschema

Förstärkning? Inimpedans?



Kretsekv.

$$\begin{cases} i = i_{b1} + h_{fe} i_{b1} = i_{b1} (1 + h_{fe}) \\ i_2 = i + i_1 = i_{b1} (1 + h_{fe}) - i_{b2} \cdot h_{fe} \\ i_{b2} = -h_{fe} i_{b1} \frac{R}{R + h_{ie}} \quad (\text{strömdelning}) \end{cases}$$

$$i_2 = i_{b1} (1 + h_{fe}) - i_{b2} h_{fe} \Rightarrow i_2 = i_{b1} (1 + h_{fe}) + h_{fe}^2 i_{b1} \frac{R}{R + h_{ie}} =$$

$$= i_{b1} \left[ (1 + h_{fe}) + h_{fe}^2 \frac{R}{R + h_{ie}} \right]$$

$$U_{in} = i_{b1} \cdot h_{ie} + i_2 R_2 = i_{b1} \left[ h_{ie} + R_2 (1 + h_{fe}) + h_{fe}^2 \frac{R_2 R}{R + h_{ie}} \right]$$

Inresistans  $R_{in} = \frac{U_{in}}{i_{in}} = \frac{U_{in}}{i_{b1}} = h_{ie} + R_2 (1 + h_{fe}) + h_{fe}^2 \frac{R_2 R}{R + h_{ie}}$

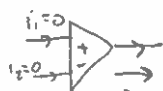
$$U_{out} = R_1 i_1 + R_2 i_2 = -h_{fe} i_{b2} R_1 + R_2 \left[ (1 + h_{fe}) i_{b1} + h_{fe}^2 i_{b1} \frac{R}{R + h_{ie}} \right]$$

$$= i_{b1} \left[ h_{fe}^2 \frac{R_1 R}{R + h_{ie}} + R_2 (1 + h_{fe}) + \frac{R_2 R}{R + h_{ie}} h_{fe}^2 \right]$$

Bilda kvot

$$\frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{R_2 (1 + h_{fe}) + h_{fe}^2 \frac{R(R_1 + R_2)}{R + h_{ie}}}{h_{ie} + R_2 (1 + h_{fe}) + h_{fe}^2 \frac{R R_2}{R + h_{ie}}} = \dots = 4,95 \text{ ggr}$$

/end El.nät



brukar alltid vara ström från op. fört.



Exempel

Aktiva RC-filter

Verklig filterkaraktistik

Första ordn. filter

LP-filter, HP-filter, allpassfilter

Andra ordningens filter

Idealt LP-filter

Filterapproximationer

Butterworth

Exempel och tentauppgifter