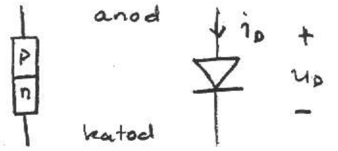
Elektriska nät och system

förelsäningar + övningar

35:-

Diod :  eller 

struktur :



Dopad halvledarkristall (Si).

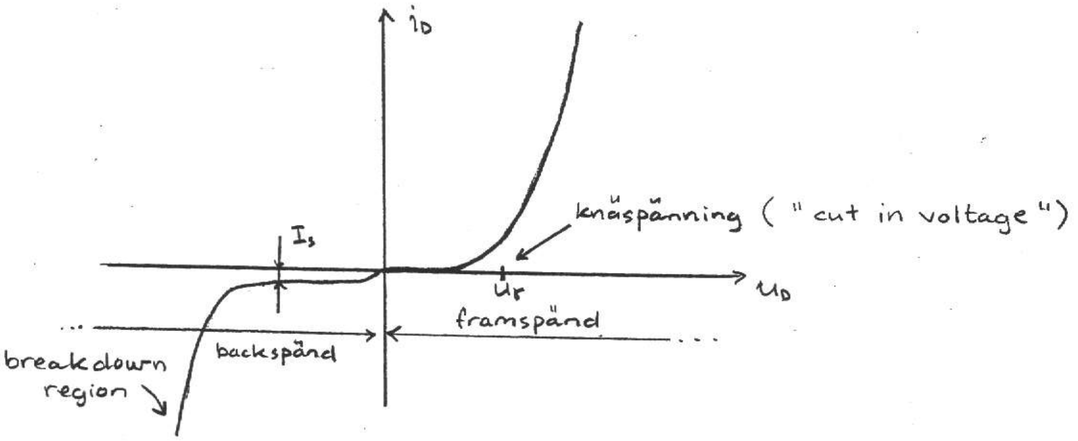
p: dopad med "acceptoratomer" ⟹ ger "fria hål"

n: " " "donatoratomer" ⟹ ger "fria elektroner"

Fria laddningsbärare ökar markant vid dopning.

[Läs 3.3 i S&S för genomgång av halvledarfysik]

karakteristik : $i_D = I_s(e^{\frac{u_D}{\eta V_T}} - 1)$ [A]



$V_T = \frac{kT}{q} \approx \frac{T}{11600}$

k: Boltzmans konstant

q: elektrisk laddning

T: temperatur [K]

Vid rumstemp. (20°) : T = 293 K ⟹ $V_T \approx 25\,mV$ (termisk spännin

I_s : Reverse saturation current (från teoretiska beräkningar

I_0 : Verklig backström

I_s och I_0 beror på dopningsgrad och på övergångens yta, starkt temperaturberoende.

u_γ : Cut in voltage

material :

	u_γ	I_0
Si	0,6 – 0,7 V	nA
Ge	0,2 V	μA

$\eta \approx 1-2$ (beror på material och struktur)

temperaturberoende:

framspänd diod: $\left.\frac{du_D}{dT}\right|_{i_D=\text{konst.}} = -2\,\text{mV}/°\text{C}$

backspänd diod: verklig backström, I_0, dubbleras för varje 10°C av temperaturen

dynamisk resistans (r_d):

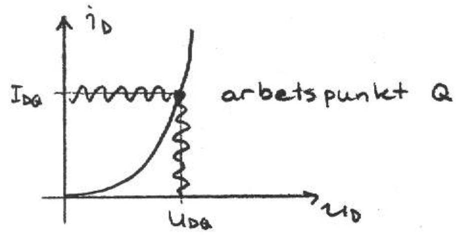
Framspänd diod. Antag $i_D >> I_s$, vilket ger $i_D \approx I_s e^{\frac{u_D}{\eta V_T}}$.

$$g_d = \left.\frac{di_D}{du_D}\right|_Q = \frac{d}{du_D}\left(I_s e^{\frac{u_D}{\eta V_T}}\right) = \underbrace{I_0 e^{\frac{u_D}{\eta V_T}}}_{I_{DQ}} \cdot \frac{1}{\eta V_T} = \frac{I_{DQ}}{\eta V_T}$$

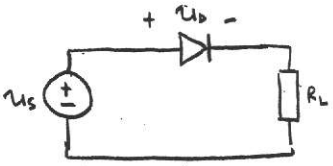
$$r_d = \frac{1}{g_d} = \frac{\eta V_T}{I_{DQ}} \quad , \quad V_T = \frac{kT}{q} = \{T = 500\,K\} = \frac{300}{11600} = 26\,\text{mV}$$

$$\Rightarrow r_d = \frac{\eta \cdot 26\text{mV}}{I_{DQ}}$$

Ex: $\left.\begin{matrix}\eta = 2\\ I_0 = 1\text{mA}\end{matrix}\right\} \Rightarrow r_d = 52\,\Omega$

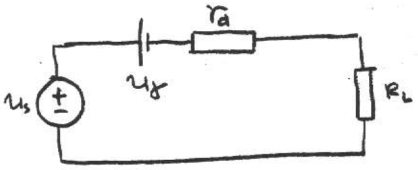


Betrakta

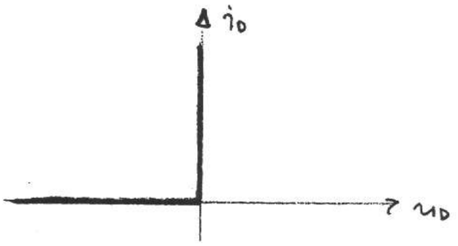


ekvivalent schema

Om diod alltid ledande och små variationer av u_D runt $u_{DQ} > u_\gamma$ $\Bigg\} \Longrightarrow$



ideal diod:

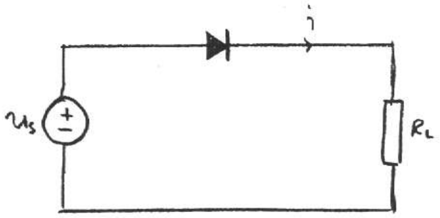


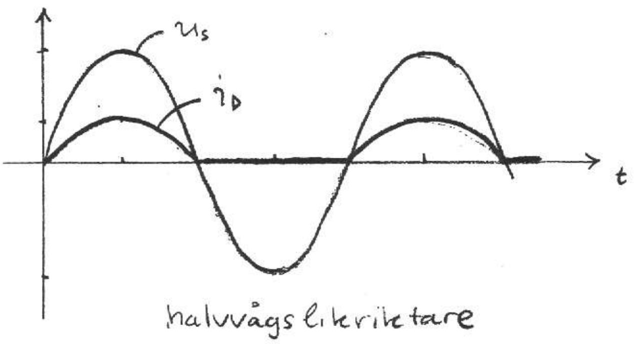
$u_D < 0 \Rightarrow i_D = 0$

$i_D > 0 \Rightarrow u_D = 0$

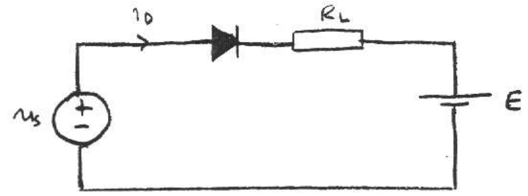
OBS! leder endast ström i en riktning

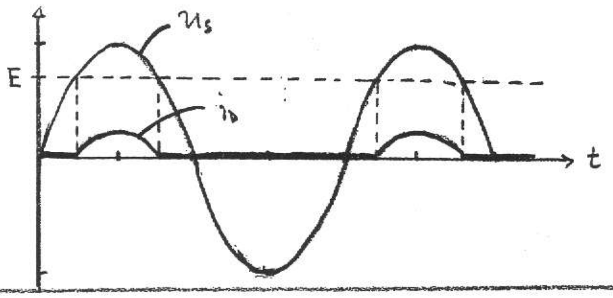
Några diodkretsar:

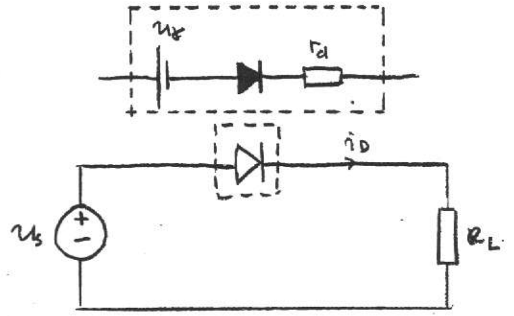


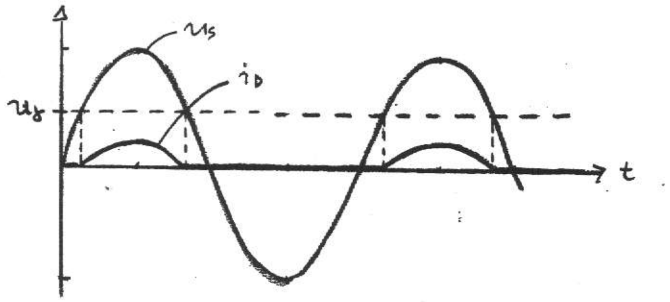


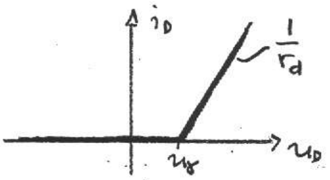
halvvågs likriktare





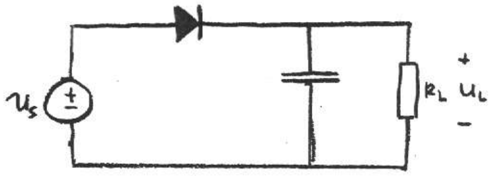




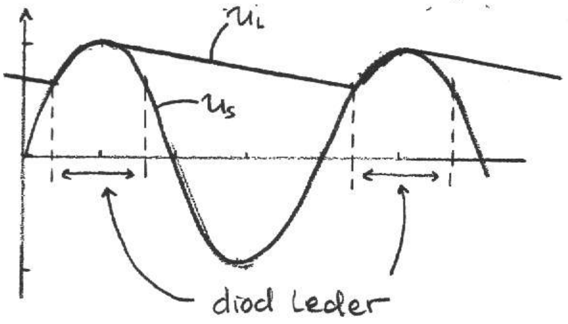


styckvis linjär
diodmodell

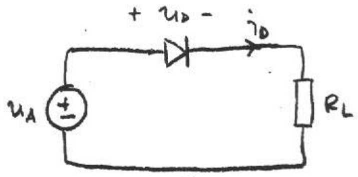
Likriktare med filter



$u_s = A\sin\omega t$

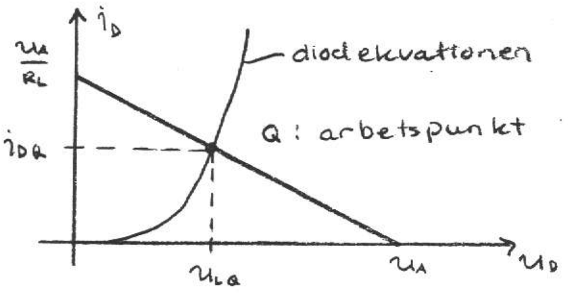


Arbetspunkt Q:

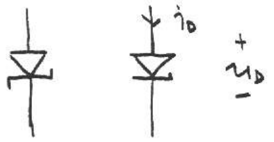


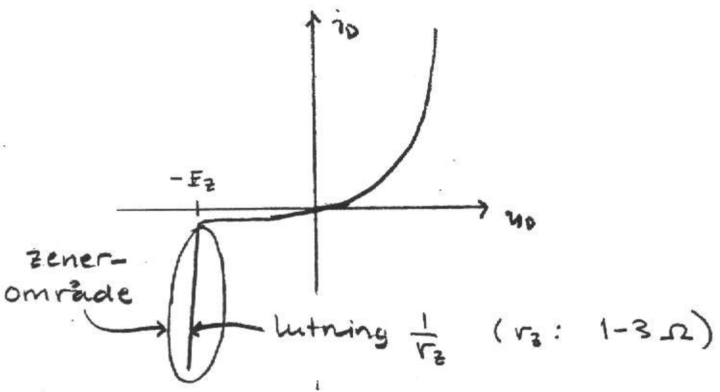
KVL: $u_A = u_D + i_D \cdot R_L$

$$i_D = -\frac{u_D}{R_L} + \frac{u_A}{R_L}$$

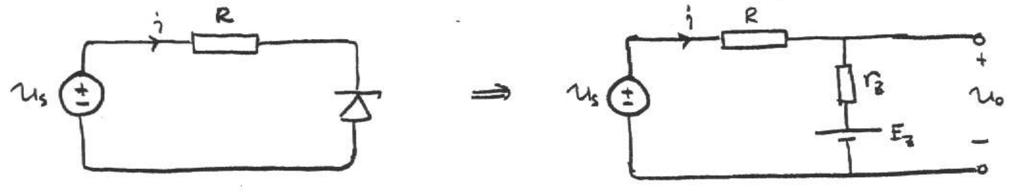


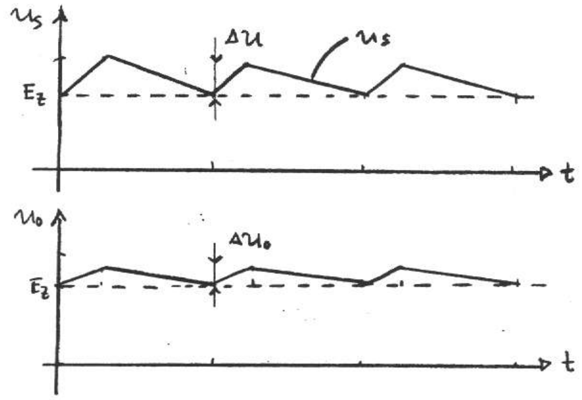
Zenerdioden:





Ex. (I zenerområdet - ekv. schema)





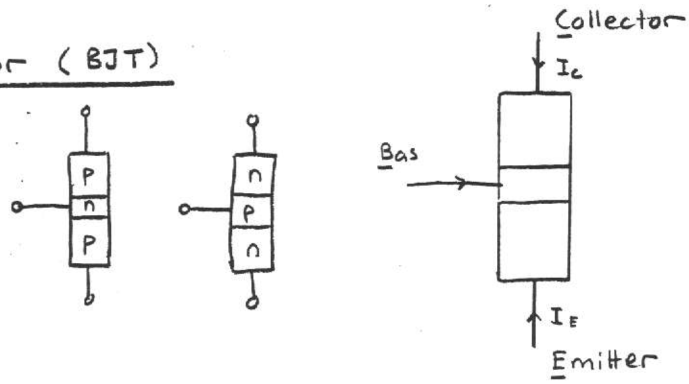
$$i = \frac{u_s - E_z}{R + r_z}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta i &= \frac{\Delta u}{R + r_z} \\ \Delta u_0 &= \Delta i \cdot r_z \end{aligned}\right\} \quad \frac{\Delta u_0}{\Delta u} = \frac{r_z}{R + r_z}$$

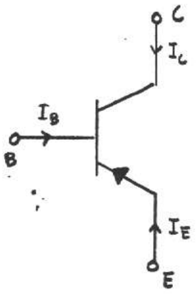
$$\text{t.ex.} \left.\begin{aligned} r_z &= 2\,\Omega \\ R &= 1\,\text{k}\Omega \end{aligned}\right\} \quad \frac{\Delta u_0}{\Delta u} = \frac{1}{500}$$

Bipolär transistor (BJT)

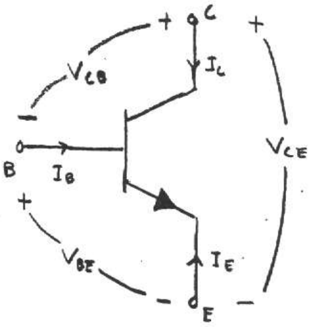
struktur :



symbol:



pnp



npn

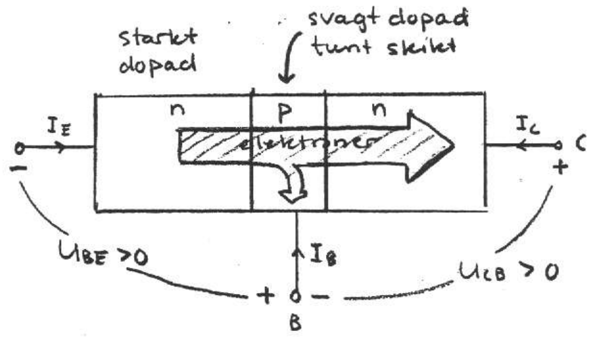
Transistorn har tre tillstånd:

Aktiv (Active): BE-dioden framspänd
BC-dioden backspänd

Strypt (Cut Off): Båda pn-övergångar backspända

Bottnad (Saturated): Båda pn-övergångar framspända

Laddningstransport: npn-transistor i aktiva området
(enkel modell)



EB-övergång ledande − elektroner från emitter till bas.

Basregion tunn − elektroner känner av positiv collectorpotential och dras mot collector

$$\begin{cases} I_B + I_C + I_E = 0 \\ I_C = -\alpha I_E \end{cases}$$

$$I_C = -\alpha(-I_B - I_C)$$

$$(1-\alpha)I_C = \alpha I_B$$

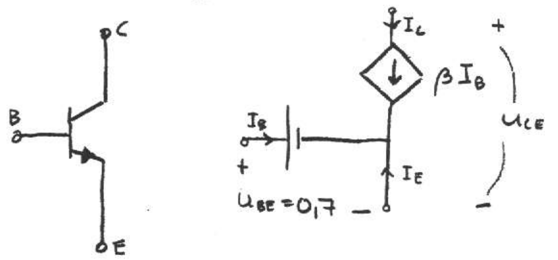
$$I_C = \frac{\alpha}{1-\alpha} I_B = \beta I_B \quad , \quad \beta = \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{ strömförstärkning}$$

$\alpha \approx 0,95 - 0,99$
$\beta \approx 50 - 250$

Storsignalmodeller:

npn

aktiv

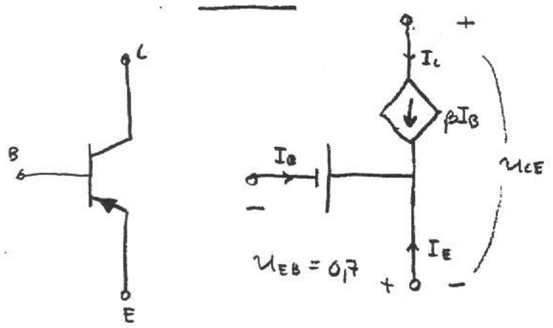


$I_B > 0$

$u_{CE} > u_{CEsat} = 0,2$

pnp

aktiv

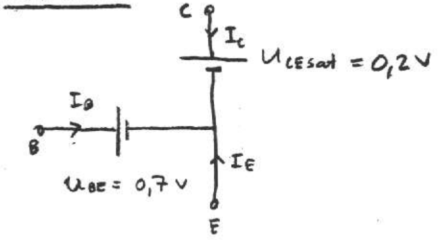


$I_B < 0$

$u_{CE} < u_{CEsat} = -0,2$

npn

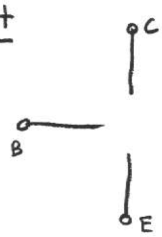
bottnad



$I_B > 0$

I gränsfall (från aktiv till bottning):
$I_C = \beta I_B$

strypt



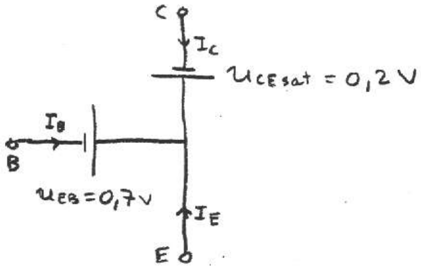
$I_B = I_C = I_E = 0$

$u_{BE} < \sim 0{,}5\,V$

I gränsfallet $u_{BE} = 0{,}7\,V$

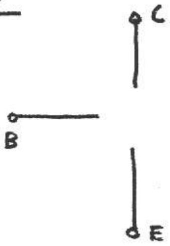
pnp

bottnad



I gränsfallet: $I_C = \beta I_B$

strypt

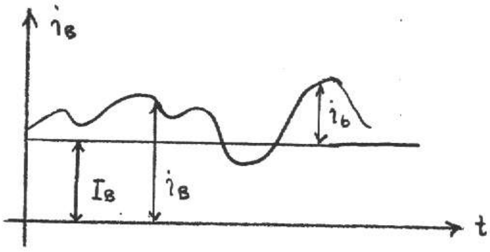


$I_B = I_C = I_E = 0$

$u_{BE} < -0{,}5\,V$

I gränsfallet $u_{BE} = -0{,}7\,V$

Beteckningar



- *Totala momentana värden: $i_B, u_{BE}, i_C, \ldots$
- *Pålagrade värden: $i_b, u_{be}, i_c, \ldots$
- *Fixa värden (DC): $I_B, U_{BE}, I_C, \ldots$

$i_B = I_B + i_b$

$u_{BE} = U_{BE} + u_{be}$ osv.

Bipolära transistorn:

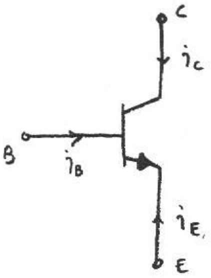
Samband mellan ström och spänning:

Utgå från Shockleys ekvation (npn-transistor).

$$-i_E = I_{ES}\left(e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1\right)$$

I_{ES} mellan 10^{-12} och 10^{-16} A

$V_T \approx 25\,mV$ i rumstemp.



KCL: $i_B + i_C + i_E = 0$

Def.: $\alpha = \dfrac{i_C}{-i_E}$ (α positiv och strax under 1)

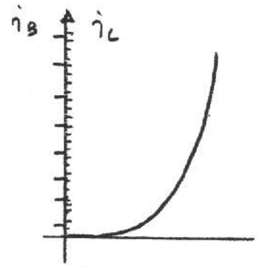
$$i_C = \alpha I_{ES}\left[e^{u_{BE}/V_T} - 1\right]$$

Antag u_{BE} > några tiondels volt ⇒ aktiva området ⇒ ettan försummas

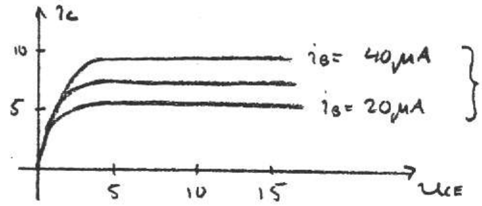
$$i_c \approx I_s e^{u_{BE}/V_T} \quad \text{och med} \quad \beta = \frac{i_c}{i_B} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$i_B = \frac{I_s}{\beta} e^{\frac{u_{BE}}{V_T}}$$

ingångskarakteristik $i_B = f(u_{BE})$ (npn-transistor)



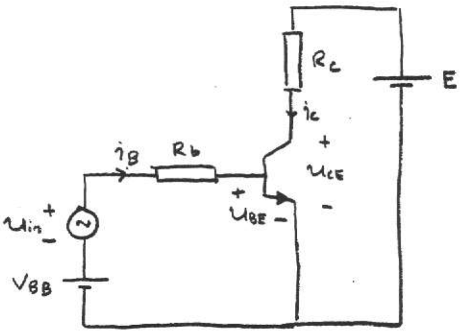
utgångskarakteristik



i_B konstant för varje kurva

i_c styrs av u_{BE}

Förstärkning

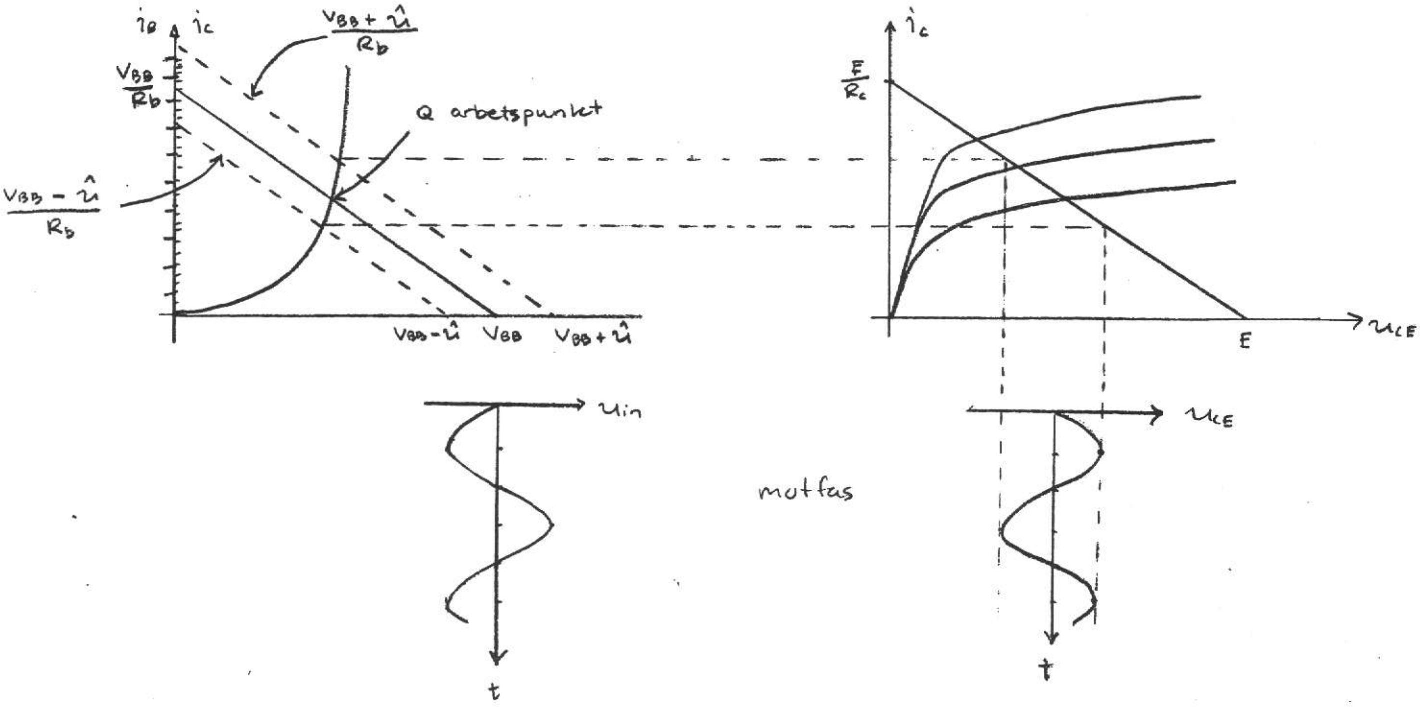


$u_{in}(t) = \hat{u}\sin wt$

ingånssidan: $u_{in} + V_{BB} = i_B R_B + u_{BE}$

$$\Rightarrow \quad i_B(t) = \frac{V_{BB} + u_{in}(t)}{R_b} - \frac{u_{BE}(t)}{R_b}$$

utgångssidan: $E = R_c i_c + u_{CE}$



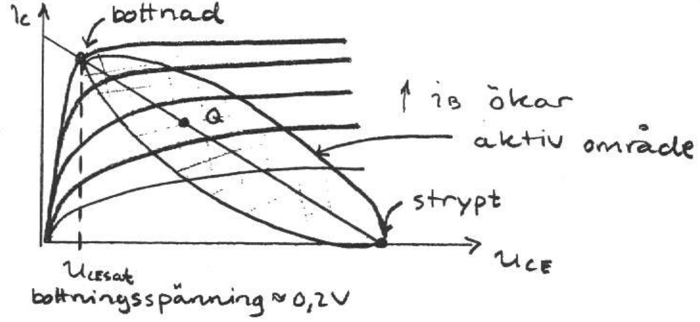
Storsignalberäkning:

Beräkna arbetspunkten $Q(I_c, u_{CE})$

Småsignalberäkning:

Beräkning av variationer i ström/spänning runt Q.

Transistorns tillstånd - utgångskarakteristik

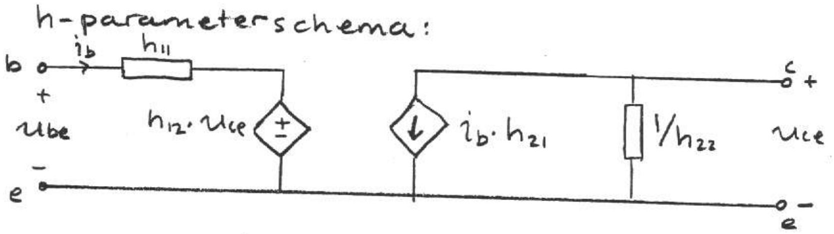


In- och utgångskarakteristik för en pnp-transistor liknar npn-fallet, men byt tecken på alla strömmar och spänningar.

Transistorns småsignalschema

- Beskriver små signalvariationer runt ett jämviktsläge (Q).
  (Linearisering runt arbetspunkten)
- Oberoende av transistortyp (npn, pnp).

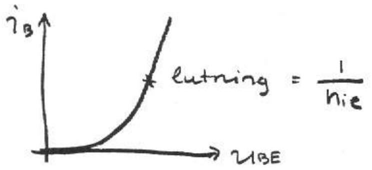
h-parameterschema:



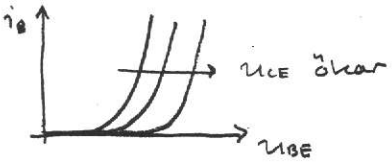
$$u_{be} = h_{11} i_b + h_{12} \cdot u_{ce}$$
$$i_c = h_{21} i_b + h_{22} \cdot u_{ce}$$

$$\begin{bmatrix} u_{be} \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_b \\ u_{ce} \end{bmatrix}$$

$$h_{11} = h_{ie} = \left. \frac{\Delta u_{BE}}{\Delta i_B} \right|_{u_{CE} = \text{konst.}}$$

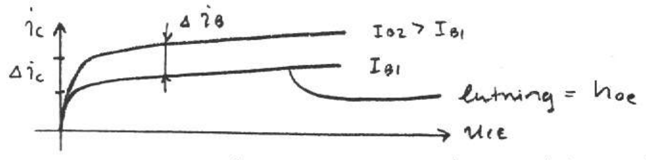


$$h_{12} = h_{re} = \left. \frac{\Delta u_{BE}}{\Delta u_{CE}} \right|_{i_B = \text{konst.}}$$



$$h_{21} = h_{fe} = \left. \frac{\Delta i_c}{\Delta i_B} \right|_{u_{CE} = \text{konst.}}$$

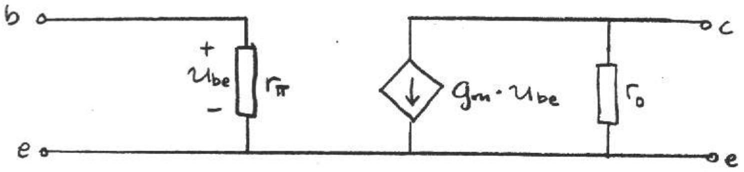
strömförstärkning (småsignalfallet)



$$h_{22} = h_{oe} = \left. \frac{\Delta i_c}{\Delta u_{CE}} \right|_{i_B = \text{konst.}}$$

utadmittans (orsakas av basviddsmodulation)

Förenklad hybrid-π modell (låga frekvenser)



Från transistorns utgångskarakteristik:

$$i_c = I_s e^{\frac{u_{BE}}{V_T}}$$

$$u_{BE} = U_{BE} + u_{be}$$

$$i_c = I_s e^{\frac{U_{BE}+u_{be}}{V_T}} = \underbrace{I_s e^{\frac{U_{BE}}{V_T}}}_{I_c} \cdot e^{\frac{u_{be}}{V_T}}$$ (små signalvariationer $u_{be} \ll V$

serieutv. $i_c = I_c(1 + \frac{u_{be}}{V_T}) = I_c + \underbrace{I_c \frac{u_{be}}{V_T}}_{i_c}$

$$i_c = \frac{I_c}{V_T} \cdot u_{be} = g_m \cdot u_{be}$$

Inimpedans $\left(\frac{u_{in}}{i_{in}}\right)$:

$$r_\pi = \frac{u_{be}}{i_b} = \frac{u_{be}}{\frac{i_c}{\beta}} = \frac{\beta}{g_m} = \frac{\beta V_T}{I_c} = \frac{V_T}{I_B}$$


$g_m \cdot u_{be} = g_m \cdot i_b \cdot r_\pi = g_m \cdot r_\pi \cdot i_b = \beta \cdot i_b = h_{fe} \cdot i_b = h_{21} \cdot i_b$

Samband mellan π- och h-parametrar:

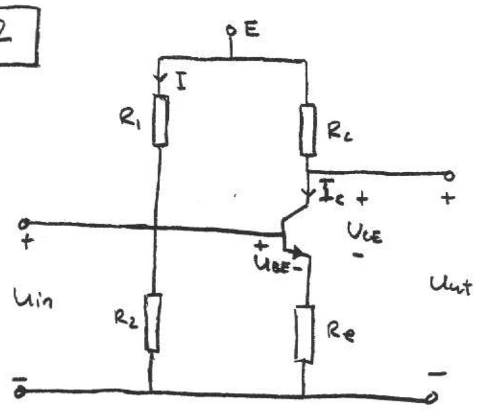
$h_{11} = h_{ie} = r_\pi$

$h_{21} = h_{fe} = g_m \cdot r_\pi \implies g_m = \frac{h_{fe}}{h_{ie}}$

$h_{22} = h_{oe} = \frac{1}{r_o}$

Samma småsignal för npn och pnp men använd $g_m = \frac{|I_c|}{V_T}$

C2



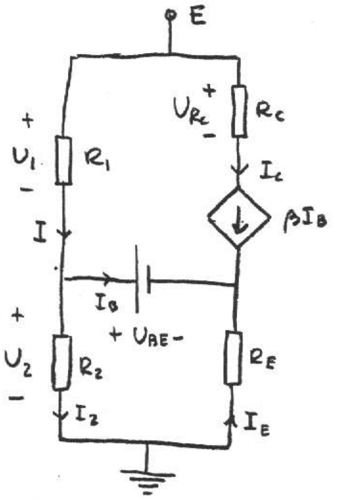
Beräkna R_1, R_2, R_3

$$\left.\begin{aligned} I_c &= 2{,}5 \text{ mA} \\ U_{CE} &= 3\text{V} \end{aligned}\right\} Q$$

$U_{BE} = 0{,}7$ V , $E = 6$V

$\beta = 300$, $I \approx 0{,}3$ mA , $R_e = 200\ \Omega$

Inför storsignalschema !



För transistorn gäller

$$\begin{cases} I_B + I_c + I_E = 0 \\ I_c = \beta I_B \end{cases}$$

$$-I_E = I_B + I_c = I_c\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$$

Kretsekv. $U_2 = U_{BE} - I_E R_E = U_{BE} + I_c\left(\frac{1}{\beta}+1\right)R_E =$

$$= 0{,}7 + 2{,}5 \cdot 10^{-3}\left(\frac{1}{300}+1\right)200 = 1{,}2 \text{ V}$$

$$I_2 = I - I_B = I - \frac{I_c}{\beta}$$

$$U_2 = R_2 I_2 \Rightarrow R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U_2}{I - \frac{I_c}{\beta}} = \ldots = \underline{4{,}1 \text{ k}\Omega}$$

$$U_1 = E - U_2 = R_1 I$$

$$R_1 = \frac{E - U_2}{I} = \frac{6 - 1{,}2}{0{,}3 \cdot 10^{-3}} = \underline{16 \text{ k}\Omega}$$

$$E = U_{Rc} + U_{CE} + U_{RE}$$

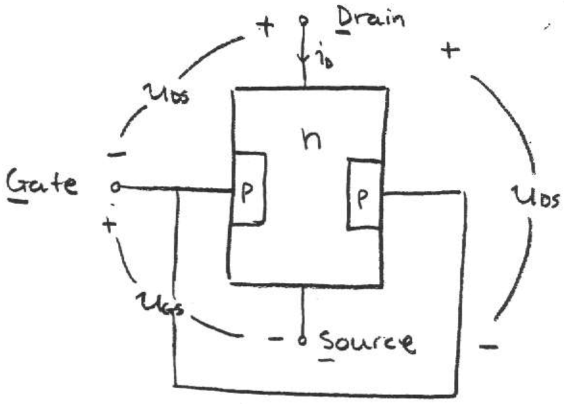
$$U_{Rc} = E - U_{CE} - U_{RE} = E - U_{CE} + I_E R_E = E - U_{CE} - I_c\left(\frac{1}{\beta}+1\right)R_E$$

$$U_{Rc} = I_c R_c$$

$$R_c = \frac{E - U_{CE} - I_c\left(\frac{1}{\beta}+1\right)R_E}{I_c} = \ldots = \underline{1 \text{k}\Omega}$$

JFET (Junction Field Effekt Transistor)

Bara en typ av laddningsbärare (unipolär)



* Arbetar med backspända pn-övergångar

* Hög inimpedans

Funktion:

1) $U_{GS} = 0$

Applicera $U_{DS} > 0$ ⇒ i_D flyter från D till S genom kanal med fria laddningsbärare

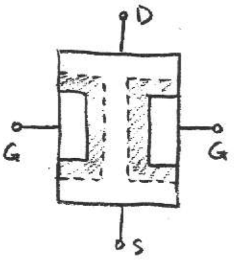
2) $U_{GS} < 0$

U_{DS} liten

Utarmningsområdet mellan Gate och kanal växer.

Kanal med fria laddningsbärare minskar.

Kanal försvinner vid $U_{GS} = U_P$ (Pinch off-spänning).



3) U_{GS} hålls konstant ($U_P < U_{GS} < 0$).

Låt U_{DS} öka.

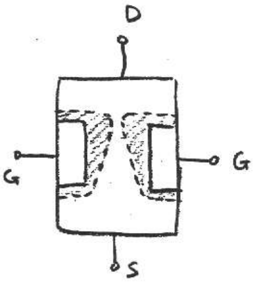
kontinuerligt spänningsfall längs kanalen.

Spänningen mellan en punkt i kanalen och G varierar.

Kraftigare utarmning mot D:

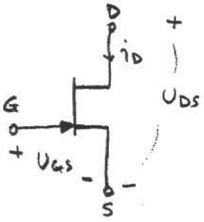
U_{DS} ökar mer ⇒ Pinch off

i_D mättas

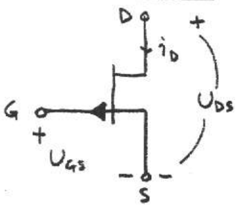


Två typer:

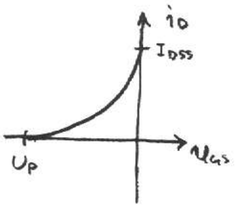
n-kanal

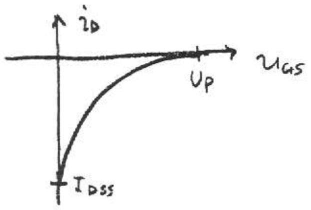


p-kanal

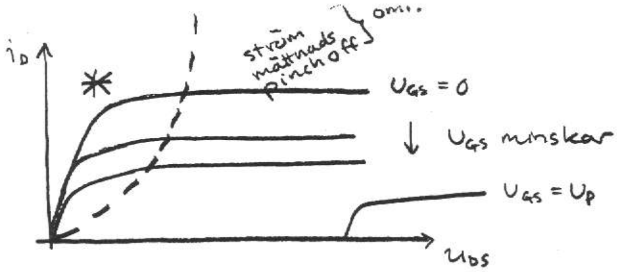


I strömområde :
(mättnadsområde)
(Pinch off-område)





Karakteristik



* Triod-
Resistans- } område
Ohm-

Ohmområde

$r_{DS} \approx \frac{U_{DS}}{i_D}$

$r_{DS} = f(u_{GS})$

Strömområde

$i_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{U_{GS}}{U_P}\right)^2$

n-kanal : $U_{GS} > U_P$

p-kanal : $U_{GS} < U_P$

$i_G = 0$

$I_{DSS} = i_D$ för $U_{GS} = 0$

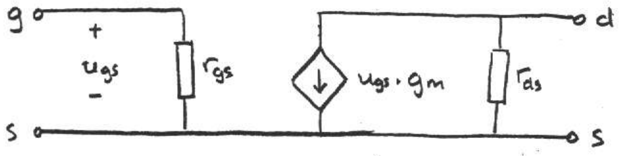
Cut off

$i_D = 0$

n-kanal: $U_{GS} < U_P$

p-kanal: $U_{GS} > U_P$

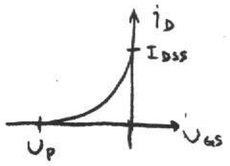
JFET - småsignalschema (samma för n- och p-kanal)



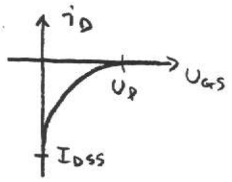
Ofta sätts r_{ds} och r_{gs} lika med ∞.

Karakteristik - strömområde:

n-kanal



p-kanal



$$g_m = \left.\frac{\partial i_D}{\partial U_{GS}}\right|_{U_{DS} = \text{konst.}}$$

$$g_m = \frac{\partial}{\partial U_{GS}}\left(I_{DSS}\left(1 - \frac{U_{GS}}{U_P}\right)^2\right) = \frac{-2I_{DSS}}{U_P}\left(1 - \frac{U_{GS}}{U_P}\right)$$

g_m = transkonduktans

Typiska värden:

$r_{ds} = 0{,}1 - 1\ M\Omega$ (utimpedans)

$r_{gs} > 10^8\ \Omega$ (inimpedans)

$g_m = 0{,}1 - 10\,mA/V$

Differentialförstärkare

Funktion:

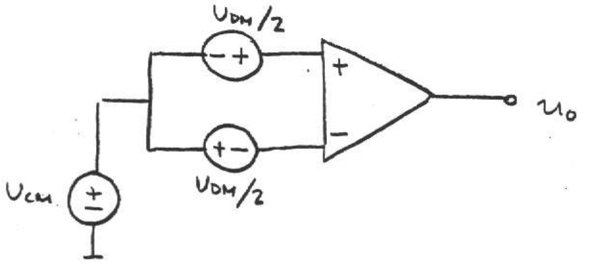
- Förstärker skillnadssignaler (DM-signal) [DM = Differential Mode]
- Dämpar summasignaler (CM-signal) [CM = Common Mode]

A_{DM} : förstärkning av skillnadssignaler

A_{CM} : " " summasignaler

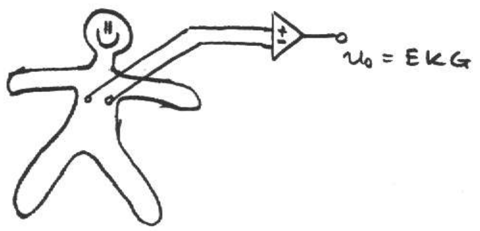
Kvalitetsmått (Common Mode Rejection Ratio):

$CMRR = \left|\frac{A_{DM}}{A_{CM}}\right|$ skall vara så stor som möjligt

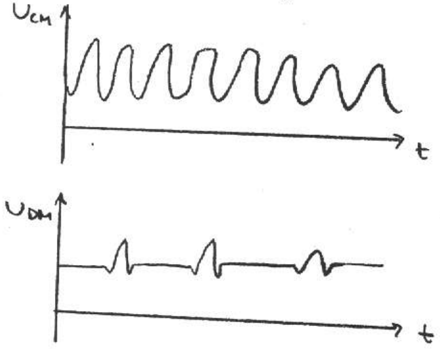


Ex:

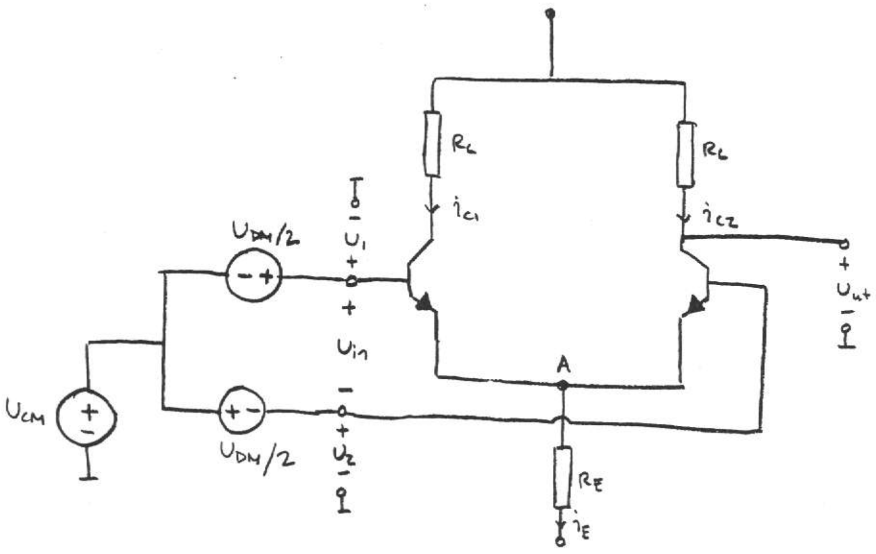
EKG-signal



Diff. först. används för att undertrycka störningar (CM-signal)



Differentialförstärkarsteg:



lika transistorer

$i_{c1} = I_c + i_{c1}$

$i_{c2} = I_c + i_{c2}$

$i_E = \frac{i_{c1} + i_{c2}}{\alpha} = I_E + i_e$

$I_E = \frac{2 I_c}{\alpha} \approx 2 I_c$

$i_e \approx i_{c1} + i_{c2}$

DM-förstärkning:

Beräkna $A_{DM} = \left.\frac{u_{ut}}{u_{DM}}\right|_{u_{CM}=0}$ där $U_{DM} = u_1 - u_2$

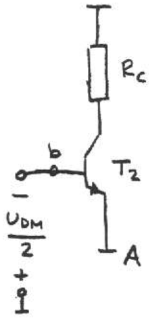
Strömmen ökar lika mycket i T_1 som den minskar i T_2 (eller tvärtom).
Ingen ström genom R_E

$i_e = i_{c1} + i_{c2} = \{ i_{c1} = -i_{c2} \} = 0$

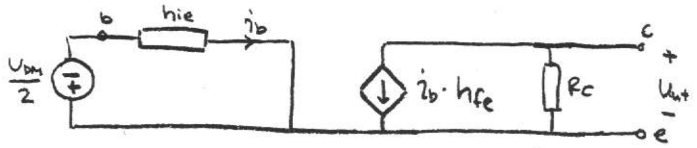
$i_E = I_E + i_e = I_E$

Spänningen i A konstant ⟹ "virtuell jord"

Vi räknar endast på ett steg (t.ex. högra delen)



småsignalschema



$$\begin{cases} -\frac{U_{DM}}{2} = i_b \cdot hie \\ U_{ut} = -i_b \cdot h_{fe} \cdot R_c \end{cases} \qquad A_{DM} = \frac{U_{ut}}{U_{DM}} = \frac{h_{fe} R_c}{2 hie}$$

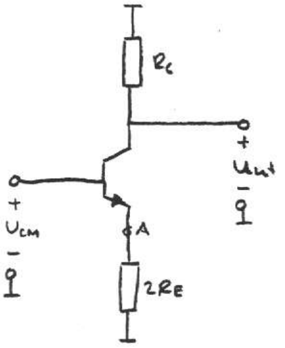
CM-förstärkning:

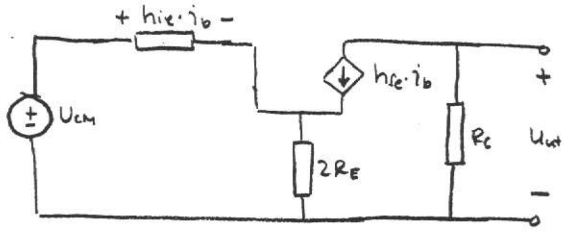
Beräkna $A_{CM} = \left.\frac{u_{ut}}{U_{CM}}\right|_{U_{DM}=0}$ där $U_{CM} = u_1 = u_2$

strömmen ökar (minskar) lika mycket i T_1 och T_2

Strömmen genom R_E ökar med $\approx 2 \cdot i_c$

Vi behöver bara räkna på ett steg om R_E byts mot $2R_E$.





$U_{CM} = hie \cdot i_b + 2R_E(1+h_{fe}) i_b$

$U_{ut} = -h_{fe} \cdot i_b \cdot R_c$

$$A_{DM} = \frac{U_{ut}}{U_{CM}} = -\frac{h_{fe} \cdot R_c}{hie + (1+h_{fe}) \cdot 2R_E} = \begin{Bmatrix} h_{fe} >> 1 \\ h_{fe} \cdot 2R_E >> hie \end{Bmatrix} \approx -\frac{R_c}{2R_E}$$

$$CMRR = \left| \frac{A_{DM}}{A_{CM}} \right| = \frac{h_{fe} R_c}{2 hie} \cdot \frac{2R_E}{R_c} = \frac{h_{fe} R_E}{hie}$$

Stort R_E ger stort CMRR?

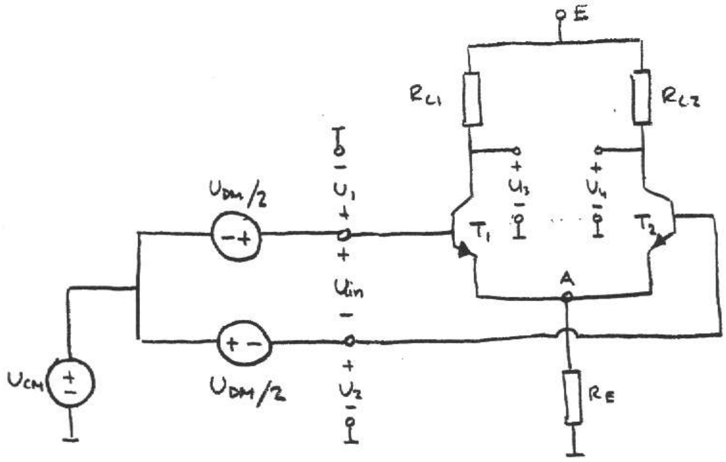
R_E kan endast ändras i begränsad omfattning ty arbetspunkten för T_1 och T_2 påverkas.

Hur gör man?

se strömspeglar i S&S.

Ersätt R_E med en transistorkrets. T.ex. en strömspegel

C14



$R_{C1} = R_C - \frac{\Delta R}{2}$

$R_{C2} = R_C + \frac{\Delta R}{2}$

lika transistor

$u_{in} = u_1 - u_2$

a) Symmetrisk ingång

$u_{ut} = u_3 - u_4$

DM-signal ($U_{CM}=0$)

$u_1 = -u_2 = \frac{U_{DM}}{2}$

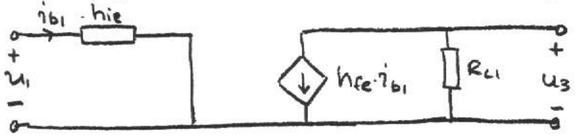
U_{DM} ökar ⇒

- u_1 ökar ⇒ i_{B1} ökar ⇒ i_{C1} ökar med Δi_C
- u_2 minskar ⇒ i_{B2} minskar med Δi_C

} ingen strömändring genom R_E

A virtuell jord.

småsignalschema (utnyttja symmetri):



$$\begin{cases} u_1 = i_{b1} \cdot h_{ie} \\ u_3 = -h_{fe} \cdot i_{b1} \cdot R_{C1} \end{cases}$$

$$u_3 = -u_1 \frac{h_{fe} \cdot R_{C1}}{h_{ie}} = -\frac{U_{DM}}{2} \cdot \frac{h_{fe} R_{C1}}{h_{ie}} \quad (1)$$

p.s.s. för andra steget

$(u_1 \rightarrow u_2,\ u_3 \rightarrow u_4,\ R_{C1} \rightarrow R_{C2})$

$$u_4 = -u_2 \frac{h_{fe} \cdot R_{C2}}{h_{ie}} = \frac{U_{DM}}{2} \cdot \frac{h_{fe} \cdot R_{C2}}{h_{ie}} \quad (2)$$

$$u_{ut} = u_3 - u_4 = -\frac{U_{DM}}{2} \cdot \frac{h_{fe}}{h_{ie}} (R_{C1} + R_{C2}) = -U_{DM} \frac{h_{fe}}{h_{ie}} \cdot R_C$$

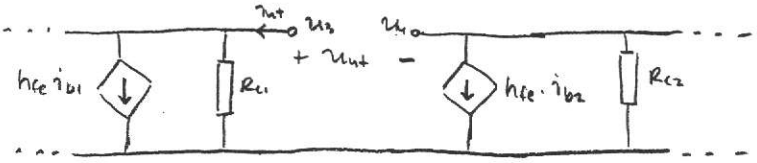
$$A_{DM} = \frac{u_{ut}}{U_{DM}} = -\frac{h_{fe} R_C}{h_{ie}}$$

Inimpedans

$$R_{in} = \frac{u_{in}}{i_{in}} = \frac{u_{in}}{i_{b1}} = \frac{U_{DM}}{i_{b1}} = \frac{2u_1}{i_{b1}} = \{u_1 = i_{b1} \cdot h_{ie}\} = 2h_{ie}$$

Utimpedans

$$R_{ut} = \left.\frac{u_{ut}}{i_{ut}}\right|_{u_{in}=0} = \left\{ \begin{matrix} u_{in} = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 = 0 \\ i_{b1} = i_{b2} = 0 \end{matrix} \right\} = R_{C1} + R_{C2} = 2R_1$$



CM - signal ($U_{DM} = 0$)

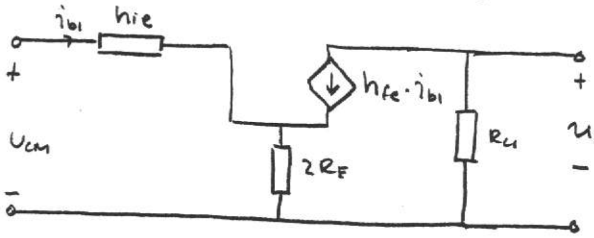
$u_1 = u_2 = u_{CM}$

u_{CM} ökar ⇒

- u_1 ökar ⇒ i_{b1} ökar ⇒ i_{c1} ökar med Δi_c
- u_2 " ⇒ i_{b2} " ⇒ i_{c2} " " "

} ström ökar med $2\Delta i_c$ genom R_E

småsignalschema (CM-signal) - betrakta ett steg



$$\begin{cases} U_{cm} = i_{b1}\cdot h_{ie} + i_{b1}(1+h_{fe})2R_E \\ u_3 = -h_{fe}\cdot i_{b1}\cdot R_{c1} \end{cases}$$

$$u_3 = \frac{-h_{fe}\cdot R_{c1}\cdot U_{cm}}{h_{ie}+(1+h_{fe})2R_E},$$

p.s.s för andra steget ($u_3 \to u_4$, $R_{c1} \to R_{c2}$)

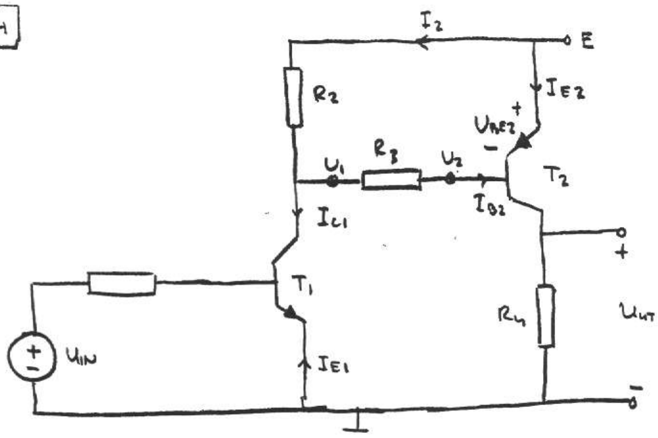
$$u_4 = \frac{-h_{fe}R_{c2}U_{cm}}{h_{ie}+(1+h_{fe})2R_E}$$

$$u_{ut} = u_3 - u_4 = U_{cm}\frac{h_{fe}\overbrace{(R_{c2}-R_{c1})}^{\Delta R}}{h_{ie}+(1+h_{fe})2R_E}$$

$$CMRR = \left|\frac{A_{DM}}{A_{CM}}\right| = \frac{h_{fe}R_c}{h_{ie}}\cdot\frac{h_{ie}+(1+h_{fe})2R_E}{h_{fe}\Delta R} = \frac{R_3}{\Delta R}\left(1+\frac{(1+h_{fe})2R_E}{h_{ie}}\right)$$

b) $u_{ut} = u_4$ (annars som tidigare)

$\boxed{C4}$



För T_1 och T_2 gäller $\beta = 50$

$$E_0 = \frac{E}{10} = |U_{BE}|$$

$$R_1 = R_3 = 20R$$

$$R_2 = R_4 = R$$

T_2 strypt

Gränsfallet då T_2 precis slutar leda ström

$$\begin{cases} U_{EB2} = E_0 \\ I_{B2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} U_2 = E - E_0 \\ U_1 = U_2 \quad \text{ty } I_{B2} = 0 \\ I_2 = \dfrac{E - U_1}{R_2} \\ I_{C1} = I_2 \quad \text{ty } I_{B2} = 0 \\ I_{C1} = \beta I_{B1} \end{array}\right\}$$

$$U_{IN} = I_{B1}R_1 + \overbrace{U_{BE1}}^{E_0} =$$

$$= R_1 \frac{I_2}{\beta} + E_0 =$$

$$= \frac{R_1}{\beta} \cdot \frac{E - (E - E_0)}{R_2} + E_0 =$$

$$= E_0 \left(1 + \frac{R_1}{\beta R_2}\right) = 0{,}14E$$

T_2 bottnad

$$U_{CE2} = 0$$

$$I_{C2} = -\frac{E}{R_4}$$

$$I_{B2} = \frac{I_{C2}}{\beta} = -\frac{E}{\beta R_4}$$

$$U_2 = E - E_0$$

$$U_1 = I_{B2} \cdot R_3 + U_2$$

$$U_1 = \frac{-E R_3}{\beta R_4} + E - E_0$$

$$\left.\begin{array}{l} I_2 = \dfrac{E - U_1}{R_2} \\ I_{C1} = I_2 - I_{B2} \\ I_{B1} = \dfrac{I_{C1}}{\beta} \end{array}\right\}$$

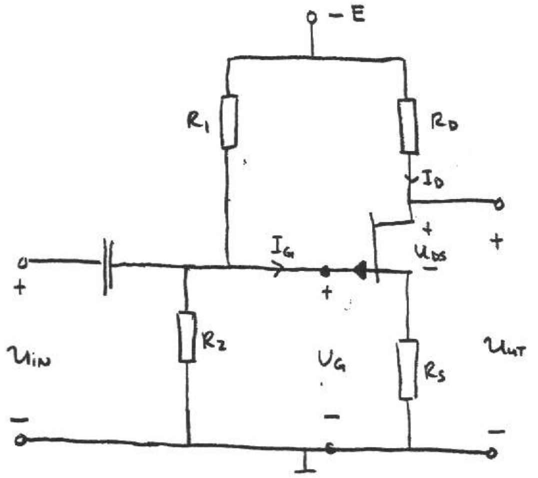
$$I_{B1} = \frac{I_2 - I_{B2}}{\beta} = \frac{\frac{E - U_1}{R_2} - I_{B2}}{\beta} = \frac{\frac{1}{R_2}\left(E + \frac{ER_3}{\beta R_4} - E + E_0\right) + \frac{E}{\beta}}{\beta}$$

$$= \left\{E_0 = \frac{E}{10}\right\} = \ldots = \frac{E}{\beta}\left[\frac{1}{\beta R_4}\left(\frac{R_3}{R_2} + 1\right) + \frac{1}{10R_2}\right]$$

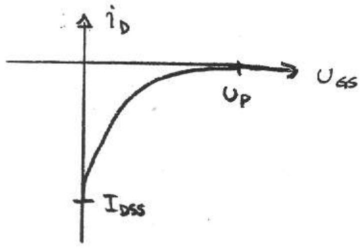
$$U_{IN} = I_{B1}R_1 + E_0 = \ldots = 0{,}308\,E$$

kontroll: Bottnar resp. stryps T_1 och T_2 ?

$\boxed{C11}$



p-kanal JFET
i sitt mättnadsområde



$I_{DSS} = -4mA$

$U_P = 4V$

$$i_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{U_{GS}}{U_P}\right)^2$$

hög inimpedans ⇒

$$\begin{cases} I_G = 0 \\ U_G = -E\dfrac{R_2}{R_1+R_2} = \text{- - -} = -8V \\ U_G = U_{GS} + I_D R_S = U_{GS} + R_S I_{DSS}\left(1 - \dfrac{U_{GS}}{U_P}\right)^2 \end{cases}$$

Beräkna U_{GS} (2:a grads. ekv.)

Lösningar:

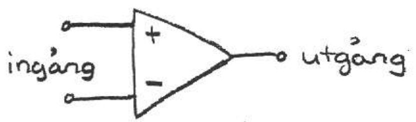
$U_{GS} = 1$ ty $0 < U_{GS} < U_P$

$i_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{U_{GS}}{U_P}\right)^2 = \text{- - -} = -2,25\,mA$

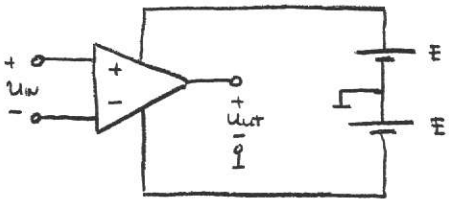
Härur fås U_{DS}.

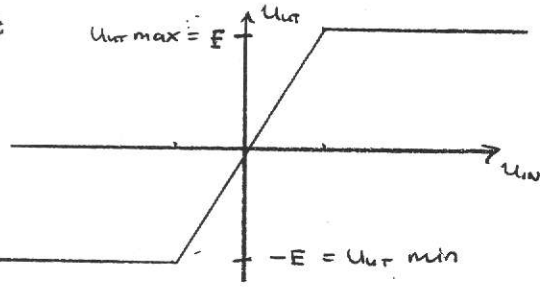
Operationsförstärkare

Symbol



- Används för att förstärka små elektriska signaler
- Aktiv komponent
  - har effektförstärkning
  - kretsen måste förses med effekt





Typiskt värde på E är 15 V

Normalt markeras inte ± E anslutningar i symbol för op. först.

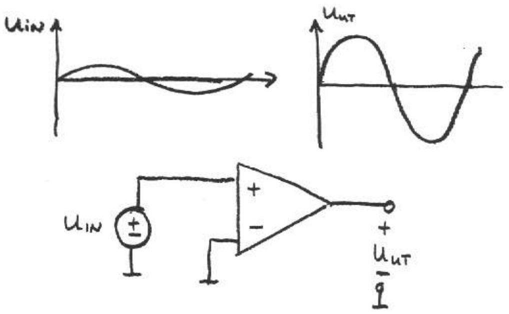
Förstärkning $F = \frac{u_{UT}}{u_{IN}}$ (ggr) eller

$$F_{dB} = 20 \log\left(\frac{u_{UT}}{u_{IN}}\right) \quad (dB)$$

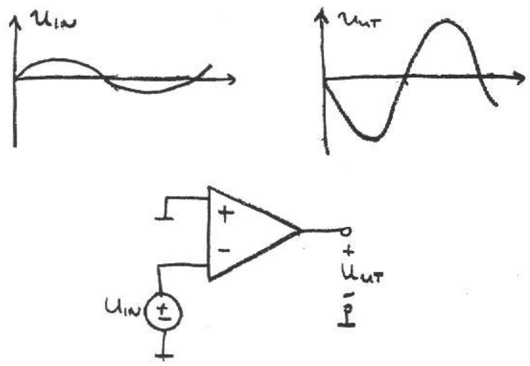
F kallas "open loop gain", "differential gain".

Begrepp

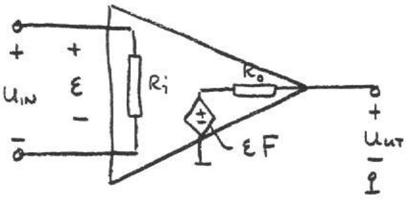
Icke inverterande först.



Inverterande först.



Enkel småsignalmodell av operationsförstärkare:



Vi kan förenkla modellen av en operationsförstärkare ytterligare:

Ideal op. först.

Ingångsimpedans $R_i = \infty$

Utgångsimpedans $R_o = 0$

Spänningsförstärkning $F = \infty$

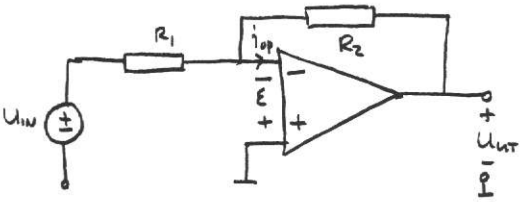
Bandbredd $B = \infty$

Kan en sådan krets vara användbar ?

Studera en inv. först.

Antag först att $F \neq \infty$ men $R_i = \infty$ och $R_o = 0$.

En krets med negativ återkoppling :



Beräkna $\dfrac{U_{UT}}{U_{IN}}$.

$$\begin{cases} U_{UT} = \varepsilon \cdot F \\ i_1 + i_2 = i_{op} = 0 \quad ; \text{ty } R_i = \infty \\ \dfrac{U_{IN} + \varepsilon}{R_1} + \dfrac{U_{UT} + \varepsilon}{R_2} = 0 \end{cases}$$

Eliminera ε:

$$\frac{U_{IN}}{R_1} + \frac{U_{UT}}{R_1 F} + \frac{U_{UT}}{R_2} + \frac{U_{UT}}{R_2 F} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{U_{IN}}{R_1} = -U_{UT} \frac{R_2 + FR_1 + R_1}{R_1 R_2 F}$$

$$\frac{U_{UT}}{U_{IN}} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{F}{1 + \dfrac{FR_1}{R_1 + R_2}} = -\frac{R_2/R_1}{1 + \dfrac{R_1 + R_2}{FR_1}}$$

Om F stort : $\dfrac{R_1 + R_2}{FR_1} \ll 1$ och $\dfrac{U_{UT}}{U_{IN}} \approx -\dfrac{R_2}{R_1}$

$\dfrac{U_{UT}}{U_{IN}} = -\dfrac{R_2}{R_1}$ då $F \to \infty$ OBS! Kretsens först. oberoende av F

Eliminera U_{UT} :

$$\frac{U_{IN}}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{F \cdot \varepsilon}{R_2} + \frac{\varepsilon}{R_2} = 0$$

$$\frac{U_{IN}}{R_1} = -\varepsilon \frac{R_1 + R_2 + FR_1}{R_1 R_2}$$

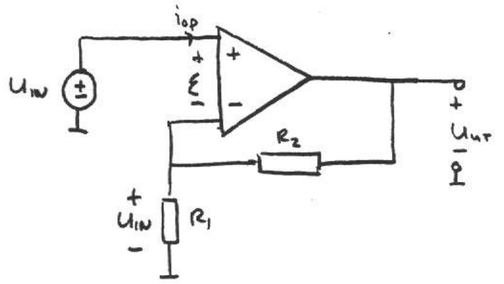
$$\varepsilon = -U_{IN} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot F} \to 0 \text{ då } F \to \infty$$

Allmänt gäller att om utgången på en ideal op. först. återkopplas till minusingången, blir $\varepsilon = 0$.

Man säger att minusingången blir virtuellt jordad.

OBS! Det flyter ingen ström mellan ingångarna

Icke inverterande först.



Antag ideal op.-först. $R_i = \infty \Rightarrow i_{op} = 0$

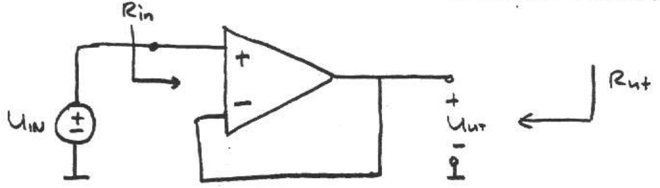
$$\left.\begin{matrix}\text{Neg. återkopplad} \\ F = \infty\end{matrix}\right\} \Rightarrow \varepsilon = 0$$

spänningsdelning ger $u_{IN} = u_{UT} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow \frac{u_{UT}}{u_{IN}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$

$R_{in} = \frac{u_{IN}}{i_{IN}} = \frac{u_{IN}}{i_{op}} = \infty$

$R_{ut} = \frac{u_{UT}}{i_{UT}} \Bigg|_{\text{nollställ ober. källor}} = R_o = 0$

Spänningsföljare (impedansomvandlare)



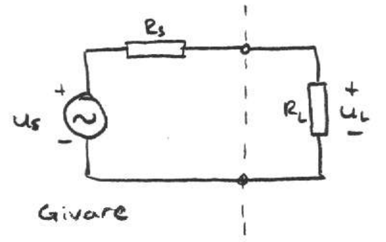
$$\left.\begin{matrix}\text{ideal op-först.} \\ \text{neg. återk.}\end{matrix}\right\} \varepsilon = 0$$

Förstärkning $\frac{u_{UT}}{u_{IN}} = 1$, ty $\varepsilon = 0$

$R_{in} = R_i = \infty$

$R_{ut} = R_o = 0$

Ex. En mätsituation.



① Ideal givare (källa)

$R_s = 0$ och $u_L = u_s$ ober. av R_L

② Obelastad källa ($R_L = \infty$) inget spänningsfall över R_s

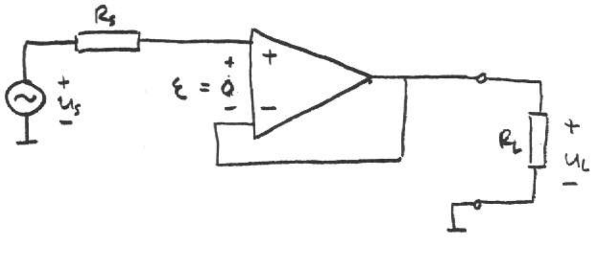
$u_L = u_s$ ober. av R_s

③ I verkligheten är $R_s > 0$ och $R_L < \infty$

$u_L = u_s \frac{R_L}{R_L + R_s}$ u_L beror av R_L.

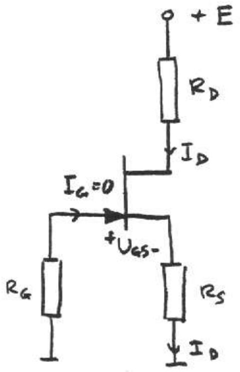
Vad göra?

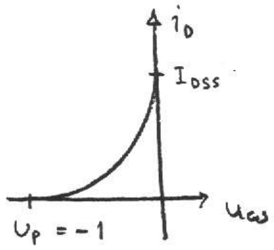
Använd spänningsföljare



$u_L = u_s$ ober. av R_L

D9





$$g_m = \frac{\partial i_D}{\partial u_{GS}}$$

KVL:
$$\underbrace{R_G I_G}_{=0} + U_{GS} + I_D R_S = 0$$

$$I_D = -\frac{U_{GS}}{R_S}$$

$$I_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{U_{GS}}{U_P}\right)^2 - \frac{U_{GS}}{R_S}$$

Beräkna U_{GS}.

$$U_{GS}^2 - U_{GS}U_P\left(2 - \frac{U_P}{R_S I_{DSS}}\right) + U_P^2 = 0$$

$$U_{GS} = U_P\left[\left(1 - \frac{U_P}{2R_S I_{DSS}}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{U_P}{2R_S I_{DSS}}\right)^2 - 1}\right]$$

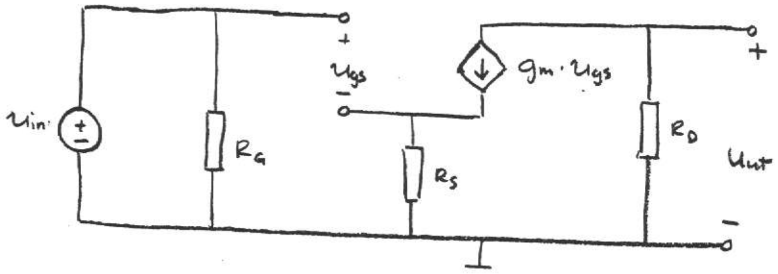
Numeriskt:

($u_{GS1} = -2{,}42\,V \Longrightarrow I_{D1} = 12\,mA$) transistorn strypt

$u_{GS2} = -0{,}413\,V \Longrightarrow I_{D2} = 2{,}07\,mA$

$$g_m = \frac{\partial i_D}{\partial u_{GS}} = -\frac{2I_{DSS}}{U_P}\left(1 - \frac{U_{GS}}{U_P}\right) = \ldots = 7{,}04\ mA/V$$

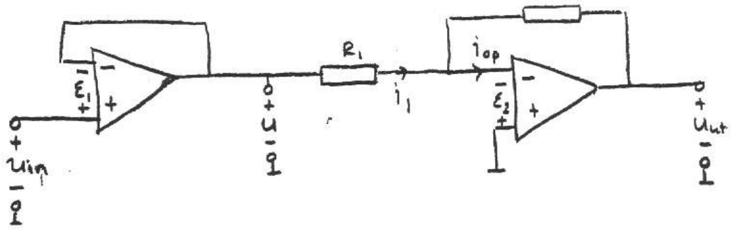
småsignalschema:



$$\begin{cases} u_{in} = u_{gs} + g_m u_{gs} R_s \\ u_{ut} = -g_m \cdot u_{gs} \cdot R_D \end{cases}$$

$$\frac{u_{ut}}{u_{in}} = -\frac{g_m R_D}{1 + g_m R_s}$$

A2



ideala op. först.
neg återk. } $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

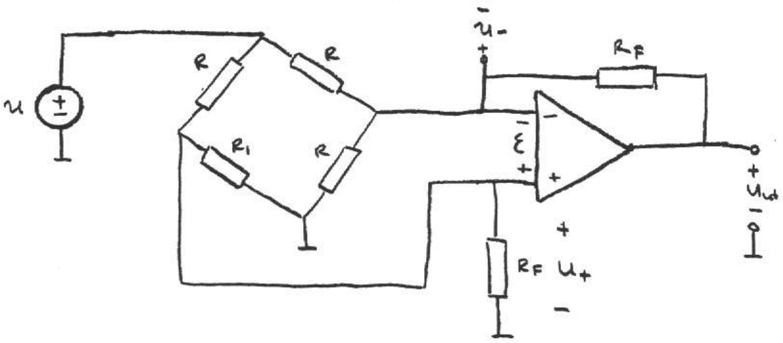
$u = u_{in}$ ty $\varepsilon_1 = 0$

$i_{op} = 0 \quad R_i = \infty$

$i_1 + i_2 = 0 \iff \frac{u}{R_1} + \frac{u_{ut}}{R_2} = 0$

$\Rightarrow \frac{u_{ut}}{u_{in}} = \frac{u_{ut}}{u} = -\frac{R_2}{R_1}$

A5

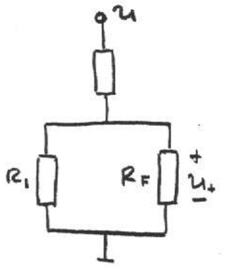


$R_1 = R + \Delta R$

ideal op. först.
neg. återk. } $\varepsilon = 0$

Beräkna $u_{ut} = f(\Delta R)$

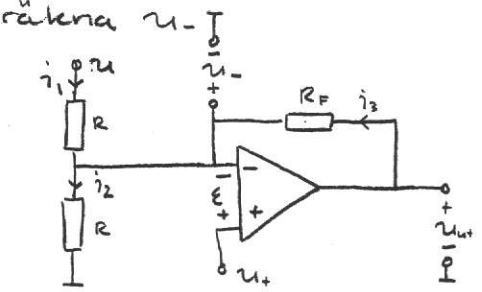
Beräkna u_+



spänningsdelning:

$$u_+ = u \frac{R_1 /\!/ R_F}{R + R_1 /\!/ R_F} = \ldots = u \frac{R_1 R_F}{R(R_1 + R_F) + R_1 R_F}$$

Beräkna u_-



$i_3 = \frac{u_{ut} - u_-}{R_F}$

$i_2 = \frac{u_-}{R}$

$i_1 = \frac{u - u_-}{R}$

$$i_1 - i_2 = -i_3 \iff \frac{u - u_-}{R} - \frac{u_-}{R} = -\frac{u_{ut} - u_1}{R_F}$$

$\Rightarrow \frac{u_{ut}}{R_F} = u_-\left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_F}\right) - \frac{u}{R}$ men $u_- = u_+$ ty $\varepsilon = 0$

$$\frac{u_{ut}}{R_F} = u\left[\frac{R_1 R_F}{R(R_1 + R_F) + R_1 R_F} \cdot \frac{2R_F + R}{R R_F} - \frac{1}{R}\right] = \ldots = u R_F \frac{R_1 R_F - R R_F}{R(R R_1 + R_F(R + R_1))} =$$

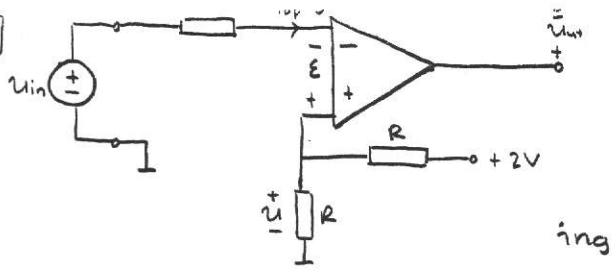
$$= \{R_1 = R + \Delta R\} = u R_F^2 \cdot \frac{R + \Delta R - R}{R\left[\underbrace{R(R + \Delta R)} + R_F(2R + \underbrace{\Delta R})\right]}$$

skippa

$R_F >> R \quad , \quad R >> \Delta R$

$\Rightarrow u_{ut} \approx u \frac{R_F}{2R^2} \Delta R$

A15



$R_1 = R = 1k\Omega$

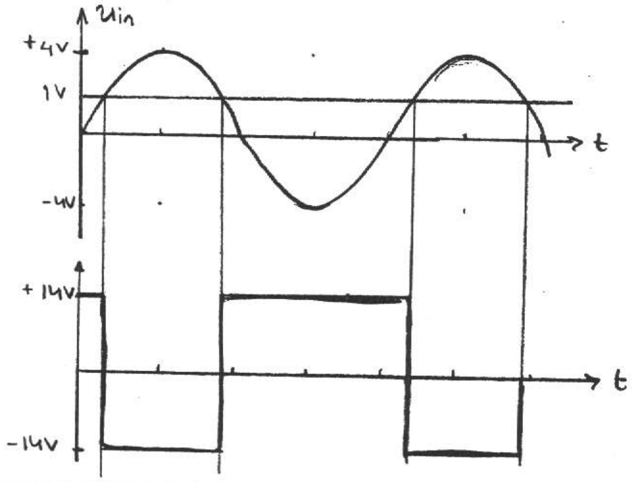
ideal op.först. $F = \infty$

utstyrningsomr. $\pm E = \pm 14V$

ingen återkoppling $\Rightarrow$ $\varepsilon \neq 0$

$$\begin{cases} \varepsilon = u - u_{in} \\ u = 2\frac{R}{R+R} = 1V \end{cases} \qquad u_{ut} = \varepsilon F$$

Utgången (u_{ut}) kommer att vara antingen +14V eller −14V beroende på om ε är större eller mindre än 0.



$\varepsilon > 0 \quad u_{in} < u = 1V$

$\varepsilon < 0 \quad u_{in} > u = 1V$

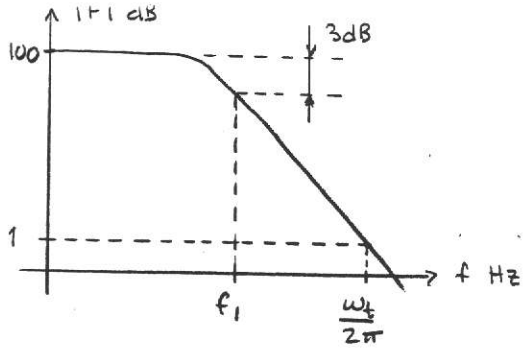
Verklig operationsförstärkare

Typiska data	741	356
ingångssteg	bipolära	JFET
spänningsförst. $\neq \infty$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$
bandbredd $\neq \infty$	3Hz	
CMRR $\neq \infty$	90dB	
inimpedans $\neq \infty$	2MΩ	1TΩ
utimpedans $\neq 0$	75Ω	
temperaturberoende		

öppna förstärkningen:

1) hög, men begränsad
2) avtar med ökad frekvens
3) frekvenskarakteristik kännetecknas av en dominant pol

$$F = \frac{F_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}} = \frac{F_0}{1 + j\frac{f}{f_1}}$$



F_0 : max. först.

f_1 : "brytfrekvens"

3 dB – frekvens

band bredd

$\omega = 2\pi f$

$\omega >> \omega_1 \Rightarrow |F| \approx \frac{F_0 \omega_1}{\omega}$

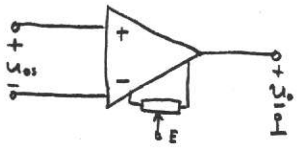
$|F(\omega)| \cdot \omega = F_0 \omega_1 =$ konst.

ω_t = unity gain bandwidth

$\omega = \omega_t$ för $|F(\omega_t)| = 1$

$1 \cdot \omega_t = F_0 \omega_1$

Input offset voltage

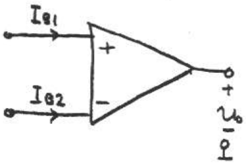


Den spänning u_{os} som krävs för att justera u_0 till 0 V.

Input offset voltage drift

$\frac{\Delta u_{os}}{\Delta T}$ Temperaturberoende hos u_{os} (741 typiskt 15µV/°C)

Input bias current I_B



$I_B = \frac{I_{B1} + I_{B2}}{2}\Big|_{u_0 = 0}$, dvs den ström som krävs för att ingångsstegets transistorer skall fungera (ligga i sin arbetspunkt).

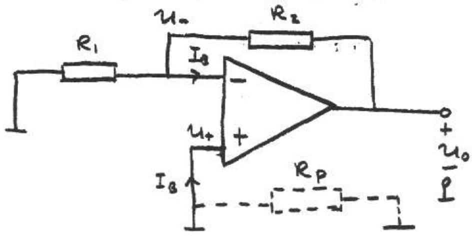
Input offset current

$I_{os} = |I_{B1} - I_{B2}|_{u_0 = 0}$

Typiska värden 741 : $I_B \approx 80$nA

356 : $I_B \approx 30$pA

Exempel: Antag ideal op.först. m.a.p. Input offset voltage och Input offset current.
($u_0 = 0$ då $u_+ = u_-$ samt $I_B = I_{B1} = I_{B2}$)



$$\left.\begin{array}{l} F = \infty \\ \text{neg. återk.} \end{array}\right\} \varepsilon = 0$$

I_B måste gå igenom R_2.

$u_0 = I_B \cdot R_2$

Utspänningen u_0 blir "biaserad" beroende på I_B.
Hur kan vi undanröja detta problem?
Inför ett motstånd (R_p) vid + ingången.

$$\begin{cases} u_+ = -I_B R_p = u_- \\ I_{R1} = \dfrac{u_-}{R_1} = \dfrac{-I_B R_p}{R_1} \end{cases}$$

$$u_0 = R_2(I_B + I_{R1}) + u_+ = R_2\left(I_B - \frac{I_B R_p}{R_1}\right) - I_B R_p = I_B \underbrace{\left(R_2 - \frac{R_2 R_p}{R_1} - R_p\right)}_{=0} = 0$$

$$R_2 = \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right) R_p$$

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

För att erhålla $u_0 = 0$ (då $u_{in} = 0$) måste $R_p = R_1 // R_2$

Slew Rate (SR) = maximala ändringshastigheten hos op. först. utsignal ("stora signaler").

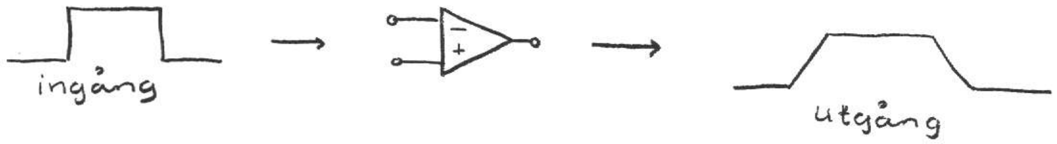
Uttrycks vanligen i V/µs (741: typiskt värde 0,1–1 V/µs)

$$SR = \left.\frac{dU_0}{dt}\right|_{max}$$

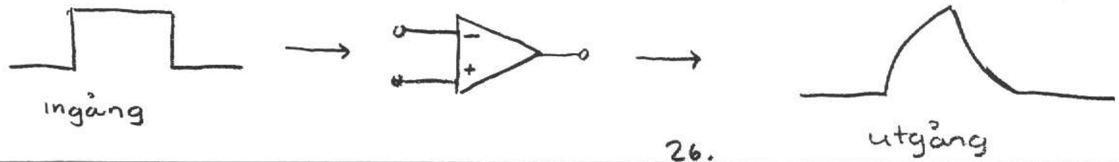
Orsaken till SR är att ingångssteget bottnar och då kommer den sk. "dominantpolskondensatorn" att laddas med en konstant ström $V_c = \dfrac{It}{c}$

Detta fenomen är inte lika med begränsad bandbredd.

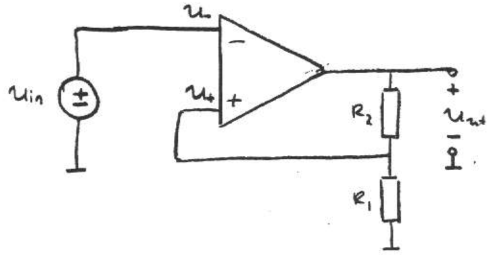
Slew Rate:



Begränsad bandbredd:



Icke-linjära tillämpningar (ej neg. återk.) med ideal op. först.



OBS! Ej neg. återk. ($\varepsilon \neq 0$)

Utstyrningsområde ± E. Annar ideal op.

① Antag $u_{in} < u_+$ $(\varepsilon > 0)$ $\Rightarrow$ $u_{ut} = +E$ och $u_+ = u_{ut}\frac{R_1}{R_1+R_2}$ (stabit läge

② Öka u_{in}. Då $u_{in} = E\frac{R_1}{R_1+R_2}$ blir $\varepsilon < 0$ och vi får omslag.

$u_{ut} = -E$ och $u_+ = -E\frac{R_1}{R_1+R_2}$

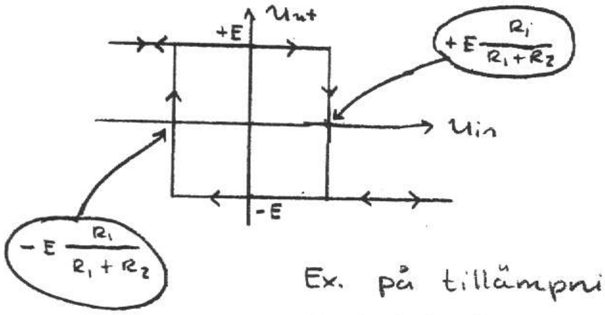
$\therefore$ $u_{in} > -E\frac{R_1}{R_1+R_2}$ och $u_{ut} = -E$ (nytt stabit läge)

③ Minska u_{in}.

Då $u_{in} = u_+ = -E\frac{R_1}{R_1+R_2}$ sker omslag igen $(\varepsilon > 0)$ och $u_{ut} = E$

samt $u_+ = E\frac{R_1}{R_1+R_2}$. Vi är åter i läge ①.

Denna krets kallas Schmitt-trigger.

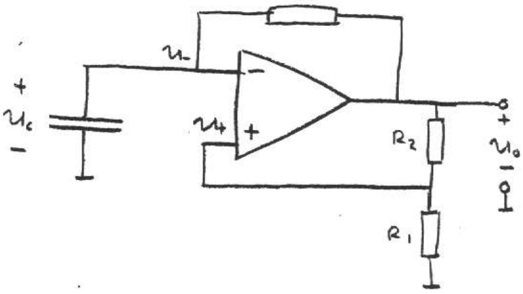


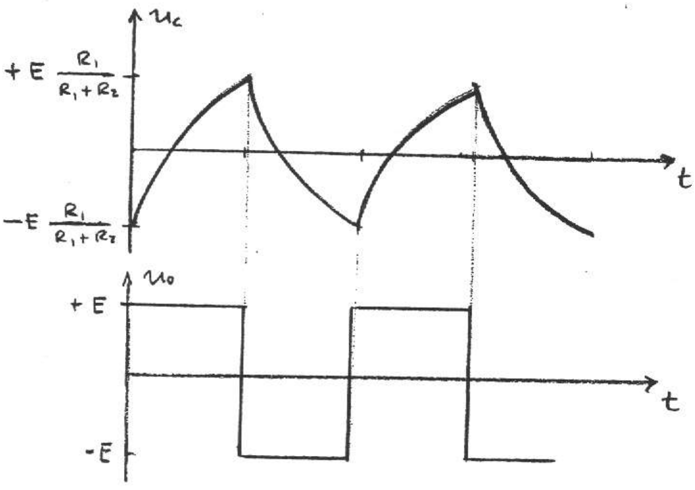
Hysteres:

Omslag då $u_{in} = \pm E\frac{R_1}{R_1+R_2}$

Ex. på tillämpning:
Detektering av pulser överförda via lång brusig ledning.

Astabil multivibrator med Schmitt-trigger





$u_{ut} = \pm E$

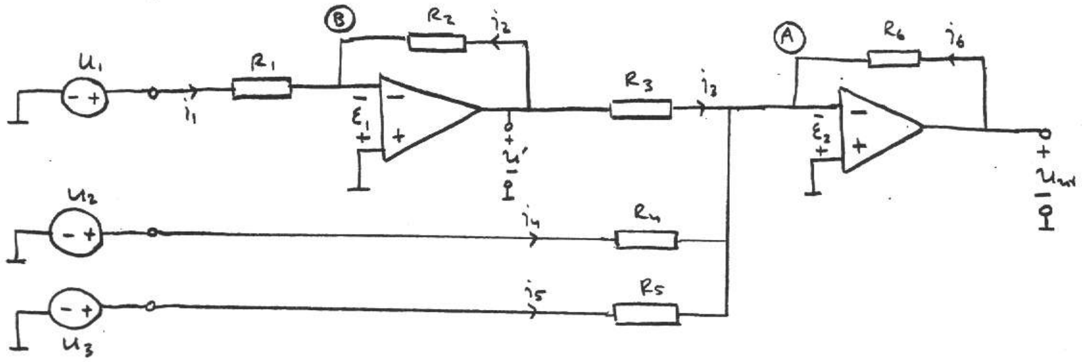
$u_+ = \pm E\frac{R_1}{R_1+R_2}$

Kondensatorn laddas via resistansen $\tau = RC$.

Omslag då $u_c = u_+$

Op. först. , fler applikationer

A8



$$\left.\begin{array}{l} F = \infty \\ \text{neg. återk.} \end{array}\right\} \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$$

strömsummering i Ⓐ:

$$i_3 + i_4 + i_5 = -i_6 \iff \frac{u'}{R_3} + \frac{u_2}{R_4} + \frac{u_3}{R_5} = -\frac{u_{ut}}{R_6}$$

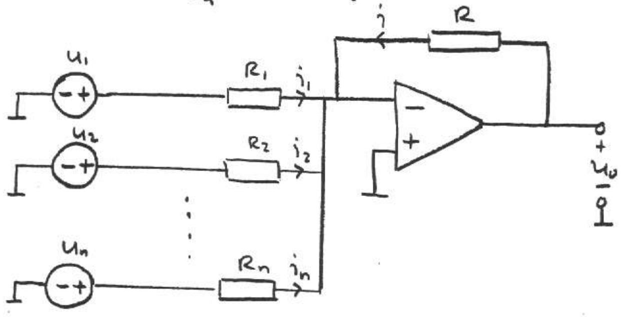
strömsummering i Ⓑ:

$$i_1 + i_2 = 0 \iff \frac{u_1}{R_1} + \frac{u'}{R_2} = 0 \implies u' = -u_1\frac{R_2}{R_1}$$

$$-u_1\frac{R_2R_6}{R_3R_1} + u_2\frac{R_6}{R_4} + u_3\frac{R_6}{R_5} = -u_{ut}$$

$$u_{ut} = u_1\frac{R_2R_6}{R_3R_1} - u_2\frac{R_6}{R_4} - u_3\frac{R_6}{R_5} = \{\text{numeriskt}\} = 6u_1 - 4u_2 - 1{,}5u_3$$

Allmänt:



strömsummering:

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = -i$$

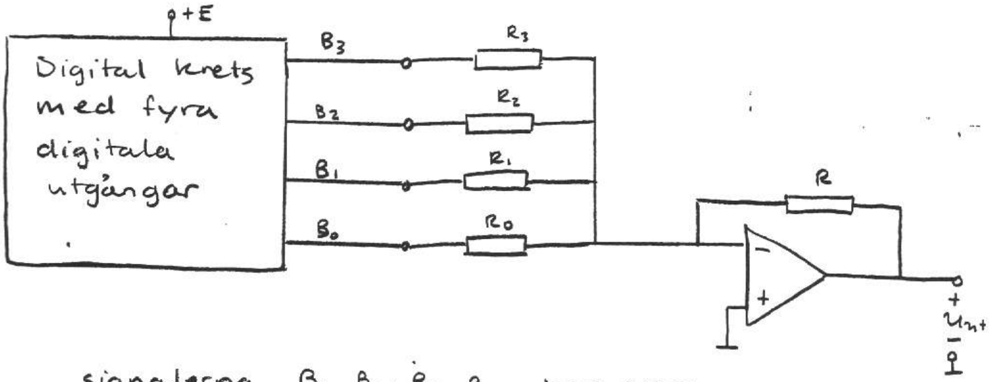
$$\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + \dots + \frac{u_n}{R_n} = -\frac{u_0}{R}$$

$$u_0 = -\left(u_1\frac{R}{R_1} + u_2\frac{R}{R_2} + \dots + u_n\frac{R}{R_n}\right)$$

summator!

u_0 = summa av delbidrag från olika oberoende källor med godtyckliga variationer

Exempel på summator   D/A omvandlare



signalerna B_0, B_1, B_2, B_3 kan vara

0V (låg) "nolla"

1V (hög) " etta"

ideal op. först.

$$u_{ut} = -R\left(\frac{B_3}{R_3} + \frac{B_2}{R_2} + \frac{B_1}{R_1} + \frac{B_0}{R_0}\right)$$

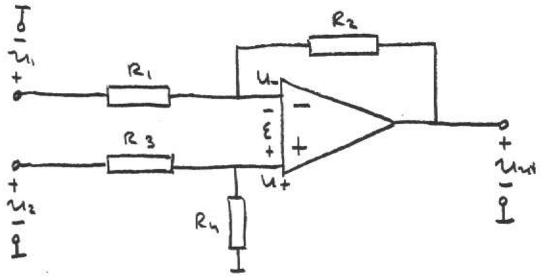
Med $R_0 = R$, $R_1 = R/2$, $R_2 = R/4$, $R_3 = R/8$

$$u_{ut} = -(8B_3 + 4B_2 + 2B_1 + B_0)$$

Utspänningen u_{ut} prop. mot det binära talet $B_3B_2B_1B_0$

Instrumentförst.

(Förstärker skillnaden mellan två signaler, u_1 och u_2)



ideal op. först.

$$\left.\begin{array}{l} F = \infty \\ \text{neg. återk.} \end{array}\right\} \varepsilon = 0 \Rightarrow u_- = u_+$$

$$R_i = \infty \Rightarrow i_{op} = 0$$

$$\begin{cases} u_+ = u_2 \dfrac{R_4}{R_3 + R_4} \\ \dfrac{u_1 - u_-}{R_1} + \dfrac{u_{ut} - u_-}{R_2} = 0 \\ u_- = u_+ \end{cases}$$

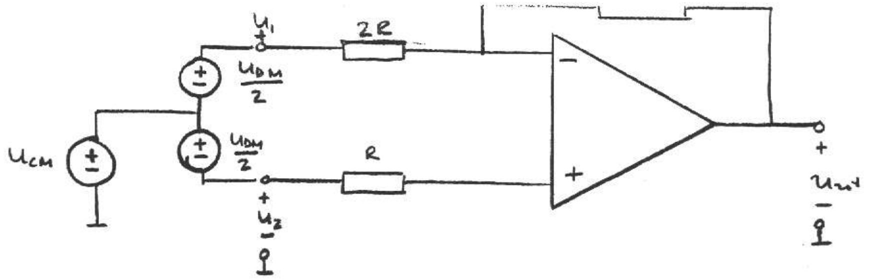
$$\frac{u_1}{R_1} - \frac{u_2}{R_1} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = -\frac{u_{ut}}{R_2} + \frac{u_2}{R_2} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$u_{ut} = u_2\left[\frac{R_4}{R_3 + R_4}\left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)\right] - u_1 \frac{R_2}{R_1}$$

Välj $R_1 = R_3$ och $R_2 = R_4$

ger $u_{ut} = \dfrac{R_3}{R_1}(u_2 - u_1)$

A4



$$CMRR = \left|\frac{F_{DM}}{F_{CM}}\right|$$

$$F_{DM} = \frac{u_{ut,DM}}{u_{DM}}$$

$$F_{CM} = \frac{u_{ut,CM}}{u_{CM}}$$

ideal op.först. }
neg. återk. } $\varepsilon = 0$

Bestäm $u_{ut} = f(u_1, u_2)$

$u = u_2 \frac{R}{R+R} = \frac{u_2}{2}$ (spänningsdelning) (1)

$\frac{u_1 - u}{2R} + \frac{u_{ut} - u}{20R} = 0$ (strömsummering) (2)

(2) $10u_1 - 10u + u_{ut} - u = 0$

$u_{ut} = 11u - 10u_1 = \frac{11}{2}u_2 - 10u_1$

F_{DM} :

$u_{CM} = 0$, $u_1 = -u_2$

$$u_{ut,DM} = \frac{11}{2}\left(-\frac{u_{DM}}{2}\right) - 10\frac{u_{DM}}{2} = -\frac{31}{4}u_{DM}$$

$$F_{DM} = \frac{u_{ut,DM}}{u_{DM}} = -\frac{31}{4}$$

F_{CM} :

$u_{DM} = 0$

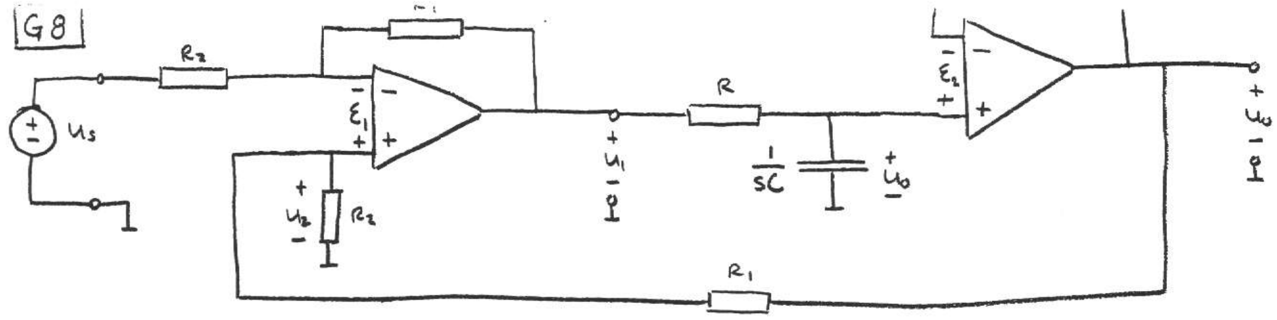
$u_1 = u_2 = u_{CM}$

$$u_{ut,CM} = \frac{11}{2}u_{CM} - 10u_{CM} = -\frac{9}{2}u_{CM}$$

$$F_{CM} = \frac{u_{ut,CM}}{u_{CM}} = -\frac{9}{2}$$

$CMRR = \left|\frac{F_{DM}}{F_{CM}}\right| = \frac{31/4}{9/2} = \frac{31}{18}$ (lågt värde)

G8



Beräkna överföringsfunktionen $H(s) = \frac{u_0}{u_s}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{ideala op.först.}\\ \text{neg. återk.}\end{array}\right\} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$$

$R_i = \infty \Longrightarrow i_{op} = 0$

$$u_2 = u_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

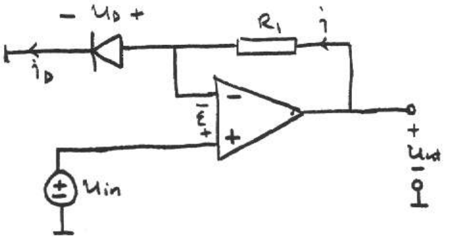
$$u_0 = u_1 \frac{1/sC}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{u_1}{1 + sRC} \Longrightarrow u_1 = u_0(1 + sRC)$$

$$\frac{u_s - u_2}{R_2} + \frac{u_1 - u_2}{R_1} = 0 \Longrightarrow \frac{u_s}{u_2} = u_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{u_1}{R_1}$$

$$u_s = u_2 \frac{R_1 + R_2}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} u_1 = u_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} u_0 (1 + sRC) = -u_0 \frac{R_2}{R_1} sRC$$

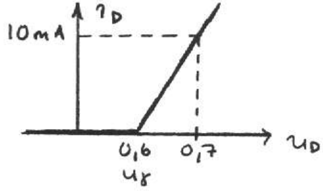
$$\frac{u_0}{u_s} = -\frac{R_1}{sR_2RC}$$ integrator!

B8

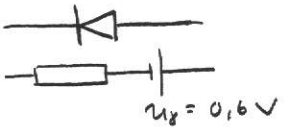


ideal op.först.
neg. återk. } $\varepsilon = 0$

diodkarakteristik (styckvis linjär modell):



modell då $u_D > u_\gamma$



$$r_D = \frac{0,7-0,6}{0,01-0} = 10\ \Omega$$

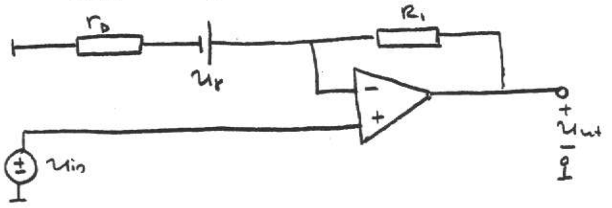
Fall ①: Diod spärrad

$u_D < u_\gamma \Rightarrow i_D = 0$ men $u_D = u_{in}$

$u_{in} < u_\gamma \Rightarrow i_D = i = 0$ och $u_{ut} = u_{in}$

Fall ②: Diod leder

$u_{in} \geqslant u_\gamma$



$$\begin{cases} i = i_D & (1) \\ u_{ut} = R_1 \cdot i + u_{in} & (2) \\ u_{in} = u_\gamma + i_D r_D & (3) \end{cases}$$

$$(3) \quad i_D = \frac{u_{in} - u_\gamma}{r_D}$$

$$(2) \quad i = i_D = \frac{u_{ut} - u_{in}}{R_1}$$

$$\frac{u_{in} - u_\gamma}{r_D} = \frac{u_{ut} - u_{in}}{R_1}$$

$$\frac{u_{in}}{r_D} + \frac{u_{in}}{R_1} - \frac{u_\gamma}{r_D} = \frac{u_{ut}}{R_1}$$

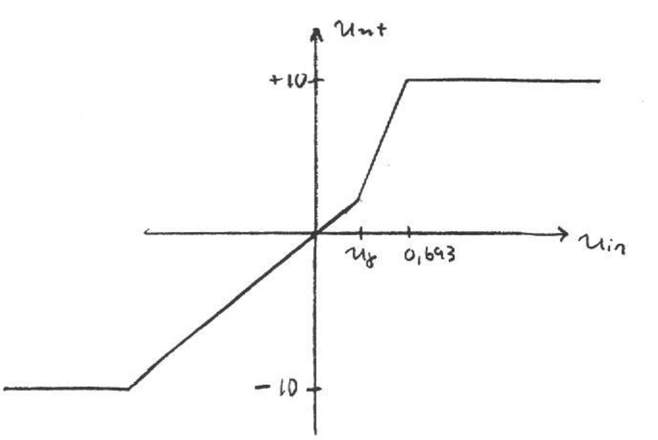
$$u_{ut} = u_{in}\left(\frac{R_1}{r_D} + 1\right) - u_\gamma \frac{R_1}{r_D} = 101 u_{in} - 60$$

När bottnar utsignalen?

(∵ $u_{ut} = 10$ V för $u_{in} = u'$)

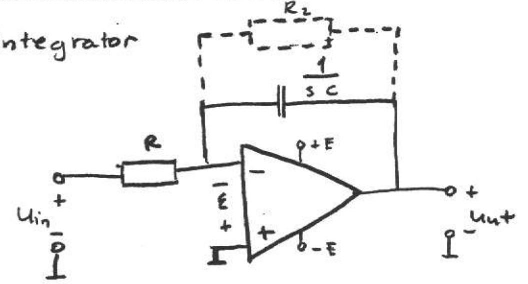
$$10 = 101u' - 60$$

$$u' = \frac{10+60}{101} \approx 0,693 \text{ V}$$



Första ordningens system-egenskaper i frekvensplanet

ideal integrator



ideal op.-först.
neg. återk.
} $\varepsilon = 0$

summera strömmar

$$\frac{U_{in}}{R} + \frac{U_{ut}}{\frac{1}{sC}} = 0$$

$$\frac{U_{ut}}{U_{in}} = \frac{-1}{sRC}$$

$$U_{ut} = -\frac{1}{sRC} U_{in}$$

inv. transf. $\Rightarrow$ $U_{ut}(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t U_{in}(t')dt' + U_0$

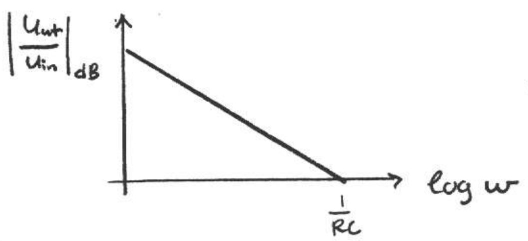
olämplig koppling med "verklig" operationsförstärkare.

Bias (DC) strömmar kommer att ladda upp kondensatorn C, och U_{ut} driver mot E.

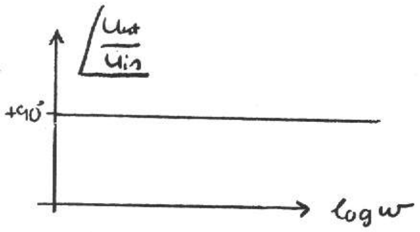
Användbar integrator: Lägg till R_2 (se fig ovan)

$s = j\omega$

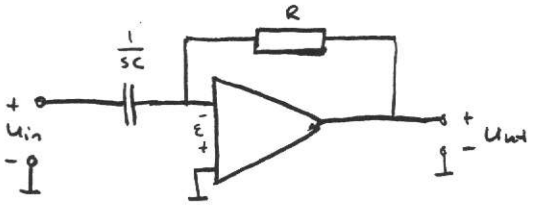
$$\left.\frac{U_{ut}}{U_{in}}\right|_{s=j\omega} = -\frac{1}{j\omega RC} = \frac{j}{\omega RC}$$



$\angle \frac{U_{ut}}{U_{in}} = +90^\circ \Rightarrow$



Ideal derivator



$\varepsilon = 0$

summera strömmar

$$\frac{u_{in}}{\frac{1}{sC}} + \frac{u_{ut}}{R} = 0$$

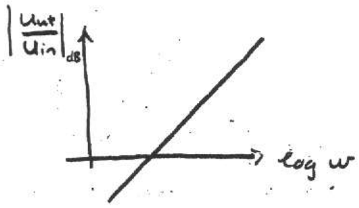
$$\frac{u_{ut}}{u_{in}} = -sRC \quad \text{invers transform} \Rightarrow \quad u_{ut}(t) = -RC\frac{du_{in}(t)}{dt}$$

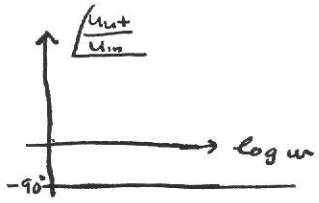
Frekvensegenskaper

$s = j\omega$

$$\left.\frac{u_{ut}}{u_{in}}\right|_{s=j\omega} = -j\omega RC$$

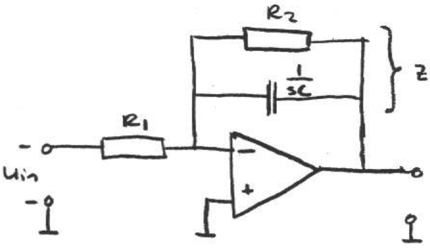
$$\left|\frac{u_{ut}}{u_{in}}\right| = \omega RC \qquad \angle\frac{u_{ut}}{u_{in}} = -90^\circ$$





Första ordningens lågpass filter

(samma krets som "användbar" integrator)



$Z_2 = R_2 // \frac{1}{sC}$

summera strömmar : $\frac{u_{in}}{R_1} + \frac{u_{ut}}{Z_2} = 0$

$$\frac{u_{ut}}{u_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{1+sR_2C} = G(s)$$

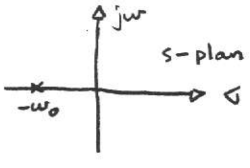
En pol i $s = -\frac{1}{R_2C}$

Låt oss titta på det allmänna uttrycket

$$G(s) = \frac{K}{1+\frac{s}{\omega_0}}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Pol: $s = -\omega_0$

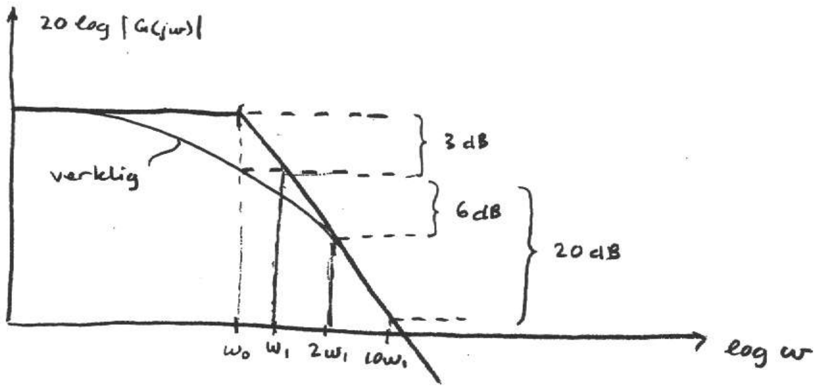


ω_0 är brytvinkelfrekvens till $G(j\omega)$ [här också 3dB-frekvens]

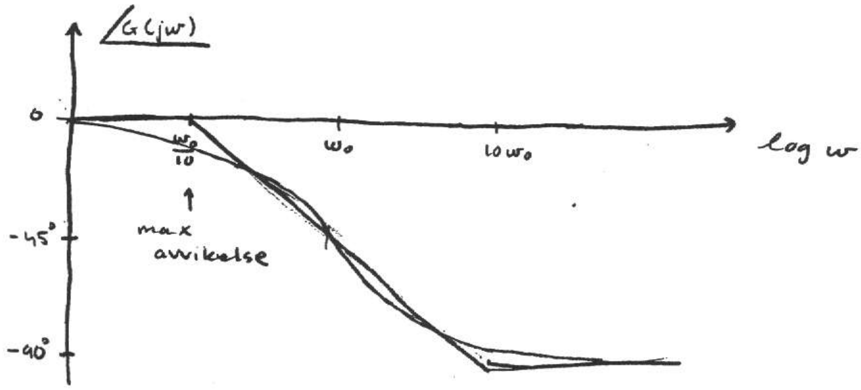
$$\frac{|G(j\omega_0)|}{|G(j\omega)|_{max}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\hat{=}\; -3dB$$

Bodediagram : Belopp $|G(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$

Fas $\angle G(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$



Fasdiagram



Första ordn. lågpassfilter

Bodediagram

$\omega \to 0$: $|G(j\omega)| = K$, $\angle G(j\omega) = 0$ asymptot 1

$\omega >> \omega_0$: $|G(j\omega)| = \dfrac{K\omega_0}{\omega}$, $\angle G(j\omega) = -90°$ asymptot 2

$\omega = \omega_0$: $|G(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{2}}$, $\angle G(j\omega) = -45°$
(brytvinkel)

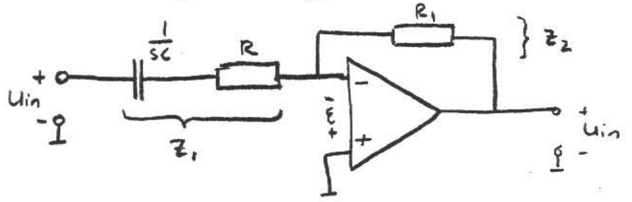
$\omega_1 >> \omega_0$: $20 \log \left|\dfrac{G(j\omega_1)}{G(j2\omega_1)}\right| = 20 \log \dfrac{2\omega_1}{\omega_1} = 6dB$ (lutning -6dB/oktav)

$20 \log \left|\dfrac{G(j\omega_1)}{G(j10\omega_1)}\right| = 20 \log \dfrac{10\omega_1}{\omega_1} = 20dB$ (lutning -20dB/oktav)

brytfrekvens ($\omega = \omega_0$)

$$20 \log \left|\frac{K}{\sqrt{1+1}}\right| = 20 \log \frac{|K|}{\sqrt{2}} = 20 \log |K| - \overbrace{20 \log \sqrt{2}}^{3dB}$$

Första ordningens högpassfilter – exempel på realisering



$\left.\begin{array}{l}\text{ideal op.-först.}\\ \text{neg. återkoppling}\end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon = 0$

Summera strömmar

$$\frac{U_{in}}{Z_1} + \frac{U_{ut}}{Z_2} = 0$$

$$\frac{U_{ut}}{U_{in}} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_1}{R + \frac{1}{sC}} = -\frac{R_1}{R}\frac{s}{s + 1/RC}$$

På allmän form:

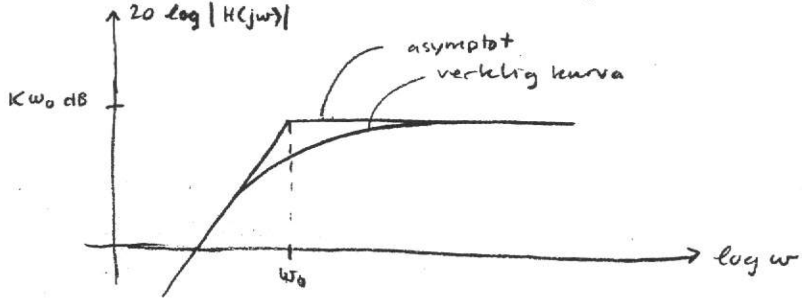
$$H(s) = \frac{Ks}{1 + \frac{s}{\omega_0}} = \frac{\text{" nollställe i origo "}}{\text{" pol i } s = -\omega_0 \text{ "}}$$

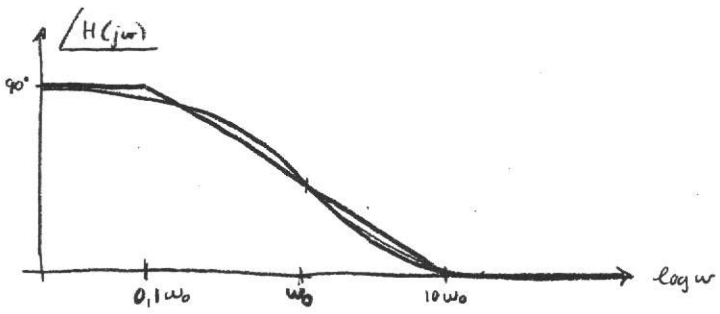
$$H(j\omega) = \frac{Kj\omega}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{K\omega_0}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$$

Belopp: $|H(j\omega)| = \frac{K\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$

Fas: $\underline{/H(j\omega)} = 90° - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

Grafisk beskrivning (Bodediagram)





Första ordningens hogpassfilter

$|H(j\omega)|_{\omega=\infty} = K\omega_0$ konstant (asymptot 1)

$|H(j\omega)|_{\omega\ll\omega_0} \approx K\omega$ (asymptot 2)

$$|H(j\omega)|_{\omega=\omega_0} = \frac{K\omega_0}{\sqrt{2}} \cdot 20\log(K\omega_0) - \underbrace{20\log\sqrt{2}}_{3\,dB}$$

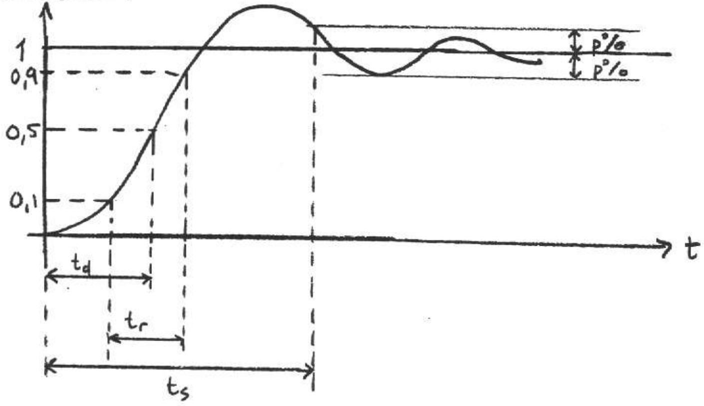
$$\angle G(j\omega)|_{\omega\to 0} = 90°$$

$$\angle G(j\omega)|_{\omega\to\infty} = 90° - 90° = 0$$

$$\angle G(j\omega)|_{\omega=\omega_0} = 90° - 45° = 45°$$

Förstärkares egenskaper i tidsplanet

stegsvar:



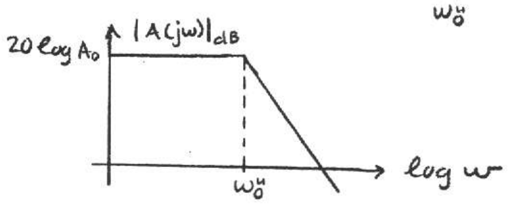
t_d: delay time (0 → 50%)

t_r: rise time (10 → 90%)

t_s: setting time
Den tid det tar för u_{ut} att svänga in inom ett felband ± p% av slutvärdet

stigtid: studera en första ordningens lågpasslänk.

$$\frac{U_{ut}(s)}{U_{in}(s)} = A(s) = \frac{A_0}{1+\frac{s}{\omega_ö}}$$, där tidskonstanten $\tau = 1/\omega_ö$



$$\omega_ö = 2\pi f_ö = \frac{1}{\tau}$$

Vad blir stegsvaret?

$U_{in}(s) = \frac{1}{s}$

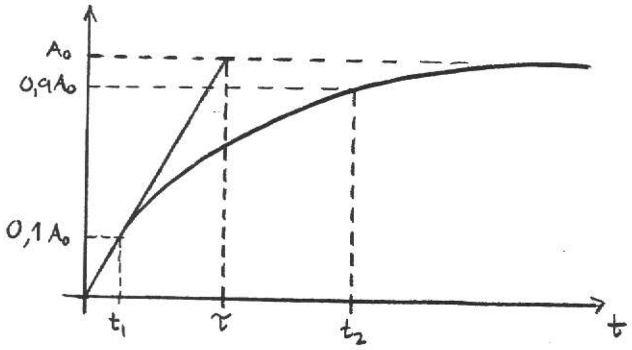
stegsvaret blir $U_{ut}(s) = U_{in}(s) \cdot A(s) = \dfrac{A_0}{s\tau(s+\frac{1}{\tau})}$

inverstransformera! $U_{ut}(t) = A_0(1 - e^{-t/\tau})$

stigtid $t_r = t_2 - t_1$

$t_2 : A_0 \cdot 0{,}9 = A_0(1 - e^{-t_2/\tau})$

$t_1 : A_0 \cdot 0{,}1 = A_0(1 - e^{-t_1/\tau})$



$$\left.\begin{aligned} e^{-t_2/\tau} &= 0{,}1 \\ e^{-t_1/\tau} &= 0{,}9 \end{aligned}\right\} \qquad \frac{0{,}9}{0{,}1} = \frac{e^{-t_1/\tau}}{e^{-t_2/\tau}}$$

$$\ln 9 = \ln e^{\frac{-t_1+t_2}{\tau}}$$

$$t_r = t_2 - t_1 = \tau \ln 9$$

$$\left.\frac{dU_{ut}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{A_0}{\tau}$$

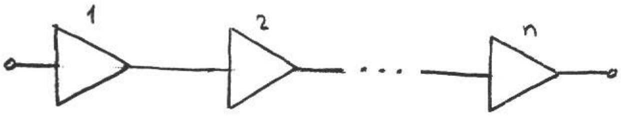
$$t_r \approx 2{,}2\tau = \frac{2{,}2}{\omega_{ö}} \approx \frac{0{,}35}{f_{ö}}$$

- t_r ober. av A_0
- t_r direkt prop. mot τ, dvs omvänt prop. mot övre gränsfrekvensen ($\omega_{ö}$)

Hög gränsfrekvens ger kort stigtid.

Kaskad av n st. lika första ordn. länkar

$$A(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}} \qquad \text{(en länk)}$$



$$G(j\omega) = [A(j\omega)]^n = \left[\frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}\right]^n$$

$$|G(j\omega_{ötot})| = \frac{A_0^n}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{ötot}}{\omega_1}\right)^2}\right)^n} = \frac{A_0^n}{\sqrt{2}}$$

$$1 + \left(\frac{\omega_{ötot}}{\omega_1}\right)^2 = 2^{1/n} \Rightarrow \boxed{\omega_{ötot} = \omega_1\sqrt{2^{1/n} - 1}}$$

Om n ökar kommer $\omega_{ötot}$ att minska

$$\boxed{f_{ötot} = f_1\sqrt{2^{1/n} - 1}}$$

Man kan visa att följande gäller

$$\boxed{f_{ötot} \cdot t_{rtot} \approx 0{,}35}$$

ober. av antalet steg som kaskadkopplas.

Kaskad av n stycken olika första ordningens länkar

$$|A(j\omega)|_{\omega=\omega_{\ddot{o}tot}} = \frac{A_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_{\ddot{o}tot}}{\omega_1}\right)^2}} \cdot \frac{A_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_{\ddot{o}tot}}{\omega_2}\right)^2}} \cdots \frac{A_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_{\ddot{o}tot}}{\omega_n}\right)^n}} = \frac{A_0^n}{\sqrt{2}}$$

Antag $\frac{\omega_{\ddot{o}tot}}{\omega_1} = \varepsilon_1 << 1$ osv, och $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \ldots \approx \omega_n$.

(Annars har vi en dominant pol)

Genom att serieutveckla $\frac{1}{1+\varepsilon_1^2} \cdot \frac{1}{1+\varepsilon_2^2} \cdots \frac{1}{\varepsilon_n^2}$ och försumma högre ordningens termer kan man visa att:

$$\frac{1}{\omega_{\ddot{o}tot}} \approx 1{,}1\sqrt{\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \ldots + \frac{1}{\omega_n^2}}$$

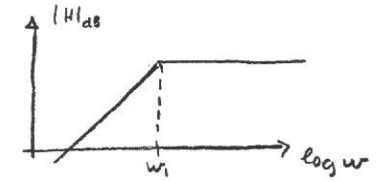
Genom att utnyttja $f_1 \cdot t_{r1} = 0{,}35$ och $f_{\ddot{o}tot} \cdot t_{rtot} \approx 0{,}35$ kan sambandet tecknas:

$$\boxed{t_{rtot} \approx 1{,}1\sqrt{t_{r1}^2 + t_{r2}^2 + \ldots + t_{rn}^2}}$$

Undre gränsvinkelfrekvens

Ett steg: $H(s) = \frac{sK}{1+\frac{s}{\omega_1}} = \left\{K = \frac{1}{\omega_1}\right\}$

$$H(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$$



Sök 3-dB frekvens $\omega = \omega_u$

$$\frac{\frac{\omega_u}{\omega_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_u}{\omega_1}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Skriv om: $H(j\omega) = \frac{K}{1 - j\frac{\omega_1}{\omega}}$

Tag belopp: $\frac{K}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{2}}$

Brytvinkelfrekvens $\omega_u = \omega_1$

∵ undre brytvinkelfrekvens

Kaskad av n st. lika steg

Sätt $K = 1$

$$G(j\omega) = \left[H(j\omega)\right]^n$$

$$|G(j\omega_{utot})| = \left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_1}{\omega_{utot}}\right)^2}}\right]^n = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

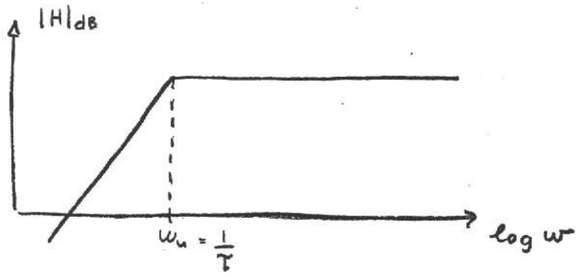
$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_{utot}}\right)^2 + 1 = 2^{1/n}$$

$$\omega_1^2 = (2^{1/n}-1)\cdot\omega_{utot}^2$$

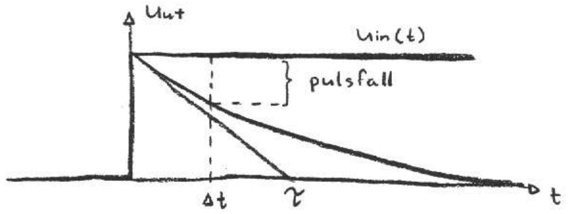
$$\boxed{\omega_{utot} = \frac{\omega_1}{\sqrt{2^{1/n}-1}}}$$

Pulsfall (speglar lågfrekvensegenskaper)

Ett steg :



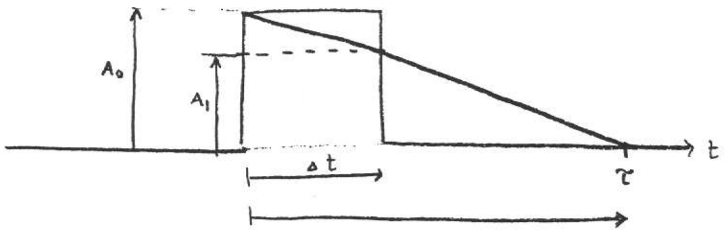
$$\left.\begin{aligned}\frac{u_{ut}(s)}{u_{in}(s)} &= \frac{s\tau}{1+s\tau}\\ u_{in}(s) &= \frac{A_0}{s}\end{aligned}\right\} \text{ stegsvar } u_{ut}(s) = \frac{A_0}{\frac{1}{\tau}+s} \subset u_{ut}(t) = A_0 e^{-t/\tau}$$



Om $\Delta t \ll \tau$ kan vi anta att amplituden faller linjärt.

$$u_{ut} = A_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

Om u_{in} en puls med duration $\Delta t \ll \tau$



Pulsfall : $A_0 - A_1$

Relativt pulsfall : $P_{rel} = \frac{A_0 - A_1}{A_0}\cdot 100$ %

Geometri ger

$$\frac{\Delta t}{A_0 - A_1} = \frac{\tau}{A_0} \quad ; \quad \boxed{P_{rel} = \frac{\Delta t}{\tau} 100 \text{ \%}}$$

Vid en pol blir $P_{rel} = \Delta t \cdot w_u \cdot 100$ % $\left(w_u = \frac{1}{\tau} \right)$

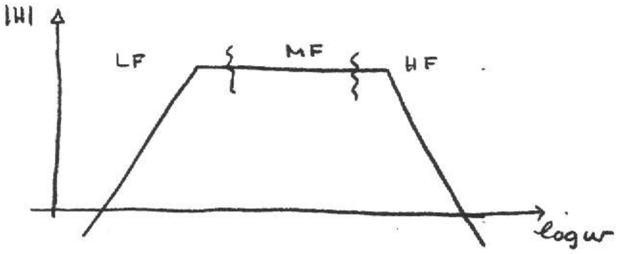
Litet pulsfall $\Leftrightarrow$ Lågt w_u

Vid kaskadkoppling av flera steg skall pulsfallen adderas enligt

$$\boxed{P_{rel,tot} = P_{rel1} + P_{rel2} + \dots + P_{reln}}$$

Sammanfattning

Vår analys av stigtid och pulsfall förutsätter reella poler både vid låga (LF) och höga (HF) frekvenser samt däremellan ett mellanfrekvensområde (MF) med konstant förstärkning.



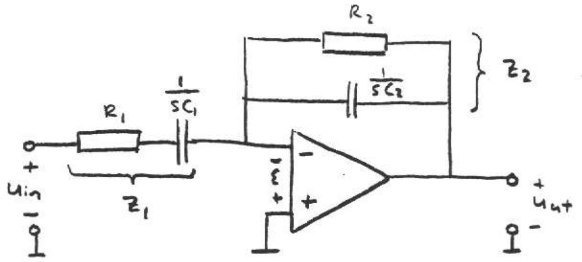
stigtid : Ett mått på HF-egenskaper

pulsfall : " " " LF- "

(Analysen gäller ej för imaginära poler)

Vi förutsätter också att $f_ö >> f_u$.

$\boxed{G2}$



$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{sC_1}$$

$$Z_2 = R_2 // \frac{1}{sC_2}$$

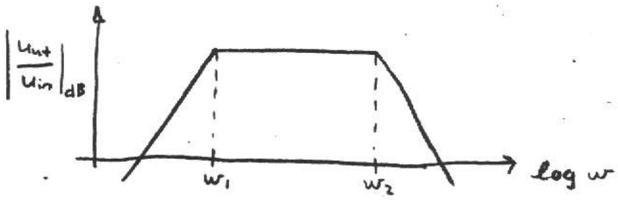
$$\left.\begin{array}{l}\text{ideal op-först.}\\ \text{neg. återk.}\end{array}\right\} \varepsilon = 0$$

$$\Sigma i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{U_{in}}{Z_1} + \frac{U_{ut}}{Z_2} = 0$$

$$\frac{U_{ut}}{U_{in}} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{\frac{R_2}{1+sR_2C_2}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} = -\frac{R_2 s C_1}{(1+sR_2C_2)(1+sR_1C_1)} = \frac{-sR_2C_1}{(1+\frac{s}{\omega_1})(1+\frac{s}{\omega_2})}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1} = \ldots = 100 \text{ r/s}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2} = \ldots = 66{,}7 \cdot 10^3 \text{ r/s}$$



Vi har väl separerade poler $\omega_2 >> \omega_1$

Stigtid: Ett steg:

$$t_r = \frac{0{,}35}{f_2} = \frac{2{,}2}{\omega_2}$$

Tre steg:

$$t_{rtot} = 1{,}1\sqrt{3 \cdot t_r^2} = 1{,}1\sqrt{3} \cdot \frac{2{,}2}{\omega_2} = 63\,\mu s$$

Alternativt:

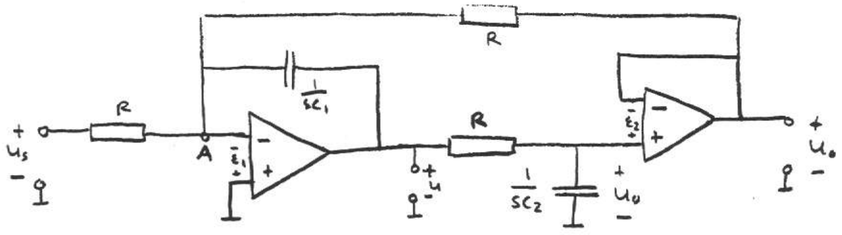
$$\omega_{\ddot{o}tot} = \omega_2\sqrt{2^{1/3}-1}$$

$$t_{rtot} \approx \frac{2{,}2}{\omega_{\ddot{o}}} = \frac{2{,}2}{\omega_2\sqrt{2^{1/3}-1}} = 65\,\mu s$$

Pulsfall Ett steg $P_1 = \Delta t \cdot \omega_1 \cdot 100\,\% = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 100\,\% = 5\%$

Tre steg $P_{rtot} = 3 \cdot 5 = 15\%$

G9



$$\left.\begin{array}{l}\text{ideala op-först.}\\ \text{neg. återk.}\end{array}\right\}\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=0$$

$$R_i=\infty \Longrightarrow i_{op}=0$$

$$\sum_A i=0 \Rightarrow \frac{u_s}{R}+\frac{u_o}{R}+usC_1=0 \Longrightarrow u_s=-u_o-usRC_1$$

$$u_o=u\frac{\frac{1}{sC_2}}{R+\frac{1}{sC_2}}=\frac{u}{1+sRC_2} \Longrightarrow u=u_o(1+sRC_2)$$

$$u_s=-u_o(1+sRC_1+s^2R^2C_1C_2)$$

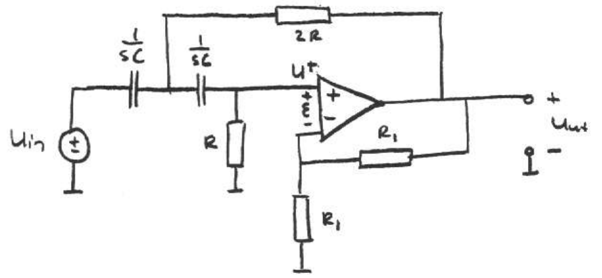
$$\frac{u_o}{u_s}=-\frac{1}{1+sRC_1+s^2R^2C_1C_2}=-\frac{1/R^2C_1C_2}{s^2+\frac{s}{RC_2}+\frac{1}{R^2C_1C_2}}$$

Poler: $s_{1,2}=-\frac{1}{2RC_2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2RC_2}\right)^2-\frac{1}{R^2C_1C_2}}$

Icke osc. stegsvar men så snabbt som möjligt ⟹ Dubbelpol.

$$\frac{1}{(2RC_2)^2}=\frac{1}{R^2C_1C_2} \Longrightarrow C_2=\frac{C_1}{4}$$

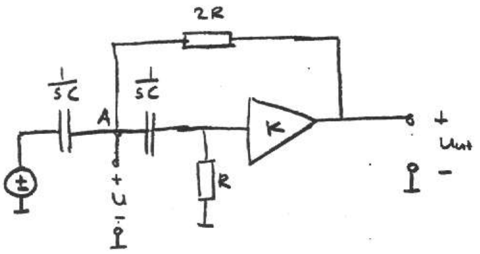
G15



$$u^+=u_{ut}\frac{R}{R+R_1}$$

$$\frac{u_{ut}}{u^+}=\frac{R_1+R}{R}=K$$

$\varepsilon=0$



$$\sum_A i=0 \qquad (u_{in}-u)sC+\frac{u_{ut}-u}{2R}=\frac{u}{R+\frac{1}{sC}}$$

$$\frac{u_{ut}}{K}=u\frac{R}{R+\frac{1}{sC}}$$

Härifrån fås överföringsfknen

$$\frac{u_{ut}}{u_{in}}=\frac{s^2(CR)^2\cdot 2}{1+sRC(5-k)+s^2 2(RC)^2}$$

Poler : $s^2+s\frac{5-k}{2RC}+\frac{1}{2R^2C^2}=0$

$$s_{1,2}=-\frac{(5-k)}{4RC}\pm\sqrt{\left(\frac{5-k}{4RC}\right)^2-\frac{1}{2R^2C^2}}$$

$$\frac{(5-k)^2}{16}-\frac{1}{2}\geq 0 \Rightarrow (5-k)^2\geq 8 \Rightarrow (5-k)\geq (\pm)\sqrt{8}$$

$5-k\geq 0$ annars poler i högra halvplanet (= instabilt)

$5-k\geq\sqrt{8}$

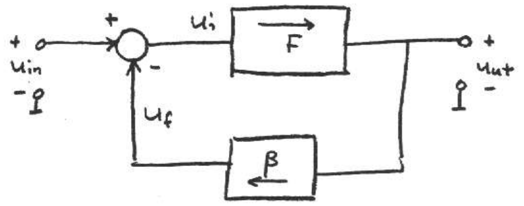
$k\leq 5-\sqrt{8}$

$$K=\frac{R_1+R}{R}=\frac{R_1}{R}+1\leq 5-\sqrt{8}$$

$$0\leq R_1\leq R(4-\sqrt{8})$$

Återkoppling

Allmänna termer



Generellt blockschema för återkopplad förstärkare.
Antag att förstärkarna är unilaterala (signalöverföring sker endast i pilens riktning).

$$\begin{cases} u_{ut} = u_i \cdot F \\ u_i = u_{in} - u_f \\ u_f = u_{ut} \cdot \beta \end{cases} \qquad u_{ut} = F(u_{in} - u_{ut} \cdot \beta) \Rightarrow \frac{u_{ut}}{u_{in}} = \frac{F}{1+\beta F}$$

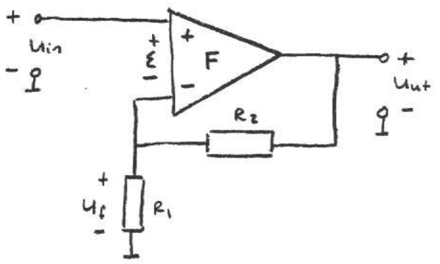
Termer

$F_f = \frac{F}{1+\beta F}$	slutna förstärkningen	(closed-loop gain)
$\beta = \frac{u_f}{u_{ut}}$	återkopplingsfaktor	(feedback-factor)
F	öppna förstärkningen	(open loop gain)
$1+\beta F$	okänslighetsfaktor	(desensitivity factor)

Varför negativ återkoppling?

- Skräddarsy förstärkningen och bandbredd
- Skräddarsy in- och utimpedanser
- Förbättra noggrannheten i förstärkningen
- Reducera brus och icke-linjär distortion (i vissa fall)

Förstärkning och bandbredd



Antag $R_i = \infty$
$R_o = 0$
$F \neq \infty$ (ej ideal)

kretsekv.

$u_{in} = \varepsilon + u_f$

$u_{ut} = \varepsilon \cdot F$

$u_f = u_{ut} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

$$u_{in} = \frac{u_{ut}}{F} + u_{ut}\frac{R_1}{R_1+R_2} = u_{ut}\frac{R_1+R_2+FR_1}{F(R_1+R_2)}$$

$$\frac{u_{ut}}{u_{in}} = \frac{F(R_1+R_2)}{R_1+R_2+FR_1} = \frac{F}{1+\frac{R_1}{R_1+R_2}F}$$

I vårt exempel är $\beta = \frac{R_1}{R_1+R_2}$

$$F_f = \frac{F}{1+\beta F}$$

om $\beta F = \frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot F >> 1$ blir $F_f = \frac{u_{ut}}{u_{in}} \approx \frac{1}{\beta} = \frac{R_1+R_2}{R_1}$

(som för en ideal op-först.)

Starkare återkoppling $\Rightarrow$ β ökar $\Rightarrow$ $\frac{u_{ut}}{u_{in}}$ minskar

Bandbredd

Antag att vi har en förstärkare med en pol enligt

$F = \frac{F_0}{1+\frac{s}{\omega_1}}$; ω_1 övre gränsvinkelfrekvens.

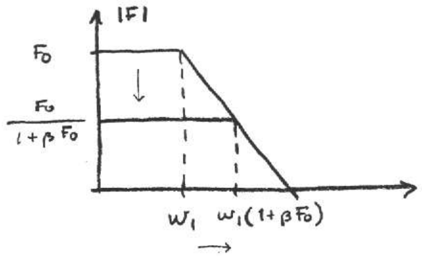
Återkoppla negativt.

Substituera förstärkningsuttrycket i den allmänna formeln för en återkopplad förstärkare

$$F_f = \frac{\frac{F_0}{1+\frac{s}{\omega_1}}}{1+\frac{F_0}{1+\frac{s}{\omega_1}}\beta} = \frac{F_0}{1+\frac{s}{\omega_1}+\beta F_0} = \frac{F_0}{1+\beta F_0}\,\frac{1}{1+\frac{s}{\omega_1(1+\beta F_0)}}$$

Gränsvinkelfrekvensen har ökat till $\omega_f = \omega_1(1+\beta F_0)$

Maximal förstärkning minskat från F_0 till $F_0/(1+\beta F_0)$

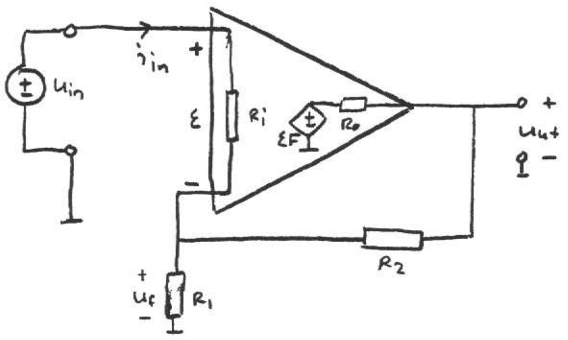


OBS! "Gain bandwidth" produkten är konstant

$$GB = \frac{F_0}{1+\beta F_0}\cdot\omega_1(1+\beta F_0) = F_0\omega_1 = \omega_t$$

(anges i datablad)

Inimpedans



Antag $R_i >> R_1 // (R_2 + R_o)$

$(R_1 + R_2) >> R_o$

Inimpedans $R_{in} = \frac{u_{in}}{i_{in}}$

kretsekv.

$$\begin{cases} i_{in} = \frac{\varepsilon}{R_i} \\ u_{ut} \approx \varepsilon \cdot F \\ u_{in} = \varepsilon + u_f \\ u_f \approx u_{ut} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

$$u_{in} = \varepsilon + \varepsilon F \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$R_{in} = \frac{\varepsilon \left(1 + F \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)}{\frac{\varepsilon}{R_i}} = R_i \left(1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} F\right) = R_i (1 + \beta F)$$

Om den återkopplade signalen återförs i serie med ingången ökar inimpedansen enligt $R_{in} = R_i(1+\beta F)$. Om den återkopplade signalen återförs "parallellt" med ingången minskar inimpedansen enligt $R_{in}' = R_1/(1+\beta F)$

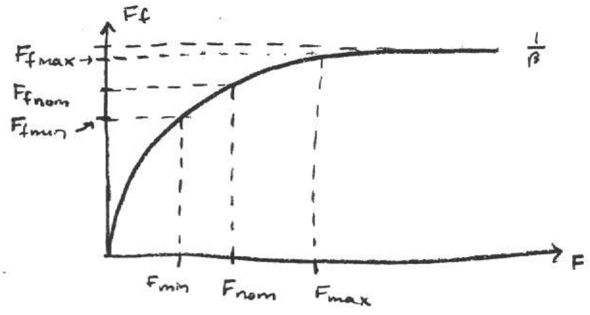
Förbättra noggrannheten i förstärkningen

En verklig op-först. med råförstärkning F uppvisar vid serieproduktion en relativt stor spridning.

För den återkopplade förstärkarens förstärkning F_f gäller

$$F_f = \frac{F}{1 + \beta F} \longrightarrow \frac{1}{\beta} \text{ om } F \to \infty$$

Bättre noggrannhet med ökat värde på F.



Derivera F_f m.a.p. F

$$\frac{\partial F_f}{\partial F} = \frac{(1+\beta F) - F\beta}{(1+\beta F)^2} = \frac{1}{(1+\beta F)^2} = \overbrace{\frac{F}{(1+\beta F)}}^{F_f} \frac{1}{F(1+\beta F)} = \frac{F_f}{F} \cdot \frac{1}{1+\beta F}.$$

Linjärisera runt punkten F_{nom}

$$\underbrace{\frac{\Delta F_f}{F_{f nom}}}_{\text{relativ spridning i } F_f} = \underbrace{\frac{\Delta F}{F_{nom}}}_{\text{rel. sprid. i } F} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\beta F_{nom}}}_{\text{känslighets-faktor}}$$

Om $|1+\beta F| >> 1$

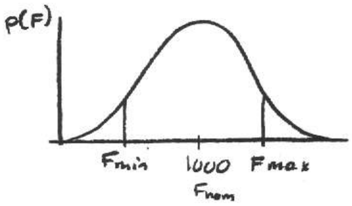
$$\left|\frac{\Delta F_f}{F_f}\right| << \left|\frac{\Delta F}{F}\right|$$

Exempel

Tillverkning av op-först.

$F_{nom} = 1000$

spridning: 95% inom ±20% av F_{nom}



Hur stor blir motsvarande spridning i den återkopplade förstärkaren om okänslighetsfaktorn $D = 1+\beta F$ väljs till 10.

$$1+\beta F = 10 \Rightarrow \beta = \frac{10-1}{F} = \frac{9}{1000}$$

Utan återkoppling

$$F_{nom} = 1000 \pm 20\% \quad \begin{cases} F_{max} = 1200 \\ F_{min} = 800 \end{cases}$$

Med återkoppling $D = 1+\beta F = 10$

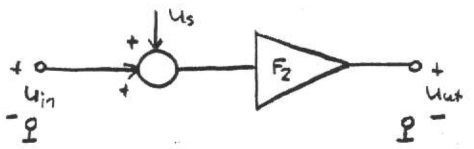
$$F_{f max} = \frac{1200}{1+0{,}009 \cdot 1200} = 101{,}69$$

$$F_{nom} = \frac{1000}{1+0{,}001 \cdot 1000} = 100$$

$$F_{min} = \frac{800}{1+0{,}009 \cdot 800} = 97{,}56$$

$$\text{spridning i } F_f = \begin{cases} +1{,}69\% \\ -2{,}44\% \end{cases}$$

Reducering av brus

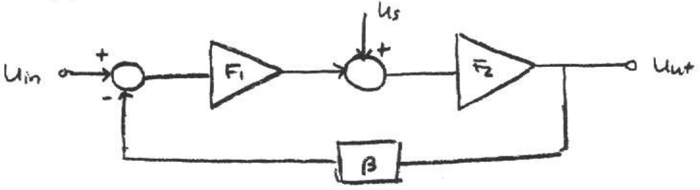


Förstärkaren F_2 genererar brus, beskrivs med (u_s i) modellen ovan.

Signal / Brus förhållande

$$\frac{S}{N} = \frac{u_{ut\ signal}}{u_{ut\ störning}} = \frac{F_2 \cdot u_{in}}{F_2 \cdot u_s} = \frac{u_{in}}{u_s}$$

- Inför ny (brusfri) förstärkare F_1
- Återkoppla



Teckna $u_{ut\,tot} = u_{ut}\Big|_{u_s=0} + u_{ut}\Big|_{u_{in}=0}$

$$u_{ut\,tot} = \underbrace{\overset{=1}{\boxed{\frac{F_1F_2}{1+\beta F_1F_2}}}\,u_{in}}_{u_{ut\ signal}} + \underbrace{\frac{F_2}{1+\beta F_1F_2}\,u_s}_{u_{ut\ störning}}$$

$$\frac{S}{N} = \frac{\frac{F_1F_2}{1+\beta F_1F_2}\,u_{in}}{\frac{F_2}{1+\beta F_1F_2}\,u_s} = F_1\frac{u_{in}}{u_s}$$

$\therefore$ Förbättring av signal / brusförhållande med faktor F_1

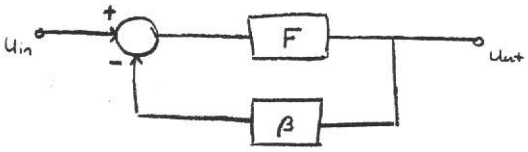
Välj $F_1 = 1+\beta F_1F_2$ för att behålla förstärkningsnivån

Samband mellan s-plan, frekvensplan och tidsplan som funktion av återkopplingsfaktorn β första, andra och tredje ordningens system.

- Första ordningens system:

$$F = \frac{F_0}{1 + \frac{s}{\omega_1}} \qquad \text{råförstärkning}$$

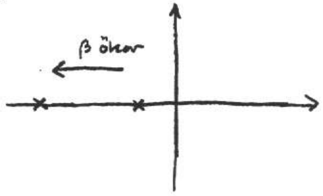
Grundmodell :



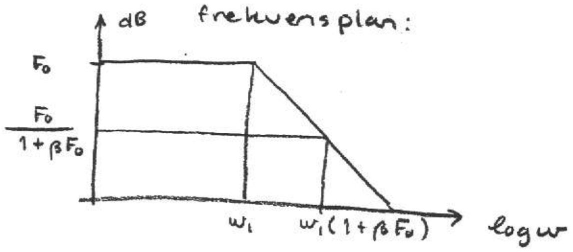
$$F_f = \frac{u_{ut}}{u_{in}} = \frac{F}{1+\beta F}$$

$$F_f = \frac{\frac{F_0}{1+s/\omega_1}}{1 + \frac{\beta F_0}{1+s/\omega_1}} = \frac{F_0}{1+\beta F_0} \frac{1}{1 + \frac{s}{(1+\beta F_0)\omega_1}} = \frac{F_{0f}}{1 + \frac{s}{\omega_{0f}}}$$

s-plan:



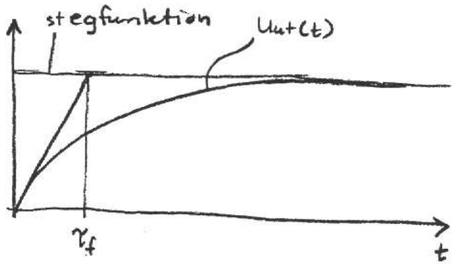
frekvensplan:



tidsplan:

stegsvar $\quad u_{ut}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{F_{0f}}{1 + \frac{s}{\omega_f}}$

inv. transf. $\quad u_{ut}(t) = F_{0f}(1 - e^{-t\cdot\omega_f}) = F_{0f}(1 - e^{-t/\tau_f}) \quad , \tau_f = \frac{1}{\omega_f}$



$$\omega_f = \omega_1(1+\beta F_0)$$

β ökar $\Rightarrow$ τ_f minskar
(snabbare stegsvar)

- Andra ordningens system:

$$F = \frac{F_0}{(1+\frac{s}{\omega_1})(1+\frac{s}{\omega_2})}$$

$$F_f = \frac{F}{1+\beta F} = \frac{\omega_1\omega_2(1+\beta F_0)}{s^2+s(\omega_1+\omega_2)+\omega_1\omega_2(1+\beta F_0)}$$

$$F_f = \frac{\omega_0^2 F_{0f}}{s^2+s\,2k\omega_0+\omega_0^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2(1+\beta F_0)}$$

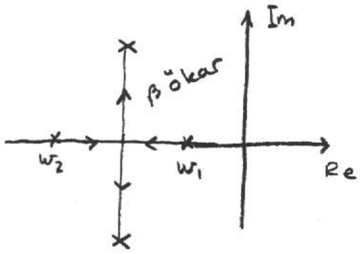
$$2k = \frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

k: dämpfaktorn

Q: Q-värde, godhetstal

β ökar $\Longrightarrow \begin{cases} k & \text{minskar} \\ Q & \text{ökar} \end{cases}$

s-plan: (polernas placering)

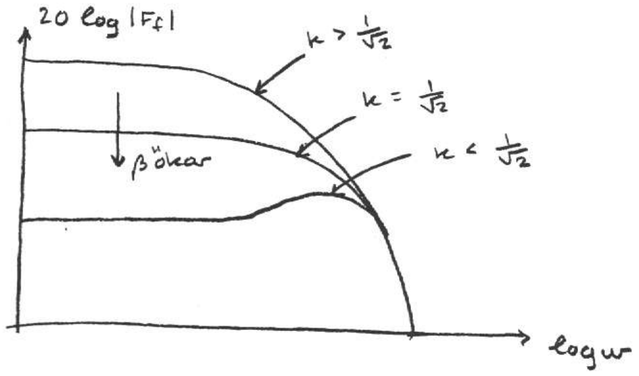


poler: $s_{1,2} = -\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)^2 - \omega_1\omega_2(1+\beta F_0)}$

OBS! Poler alltid i VHP. stabilt!

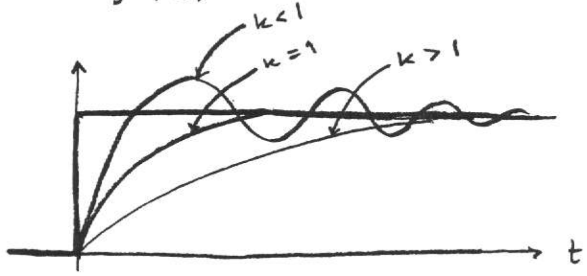
frekvensplan:

$$|F_f(j\omega)| = \frac{F_0}{1+\beta F_0}\,\frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2-(2k\omega_0\omega)^2}}$$



stegsvar i tidsplanet:

$U_{ut} = \frac{1}{s} F_f(s)$



k > 1: översvängningsfritt
reella poler
(överdämpat)

k = 1: kritiskt dämpat
aperiodiska gränsfallet
reella poler (dubbelpol)
max. snabbt stegsvar utan översväng

k < 1: översväng i stegsvar
komplexa poler
(underdämpat)

- Tredje ordningens system (3 poler)

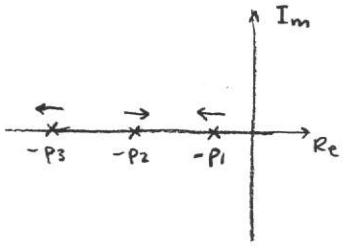
Sätt in

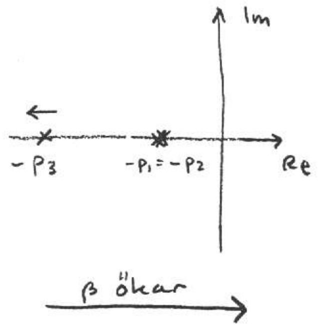
$$F = \frac{F_0}{\left(1+\frac{s}{w_1}\right)\left(1+\frac{s}{w_2}\right)\left(1+\frac{s}{w_3}\right)} \quad ; \quad F_f = \frac{F}{1+\beta F}$$

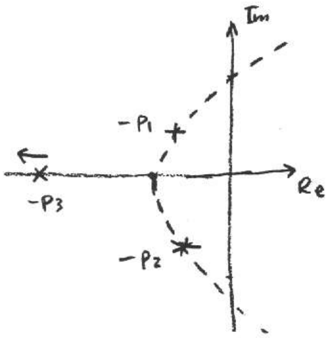
Vi får

$$F_f = \frac{F_{0f}}{\left(1+\frac{s}{p_1}\right)\left(1+\frac{s}{p_2}\right)\left(1+\frac{s}{p_3}\right)}$$

s-plan:







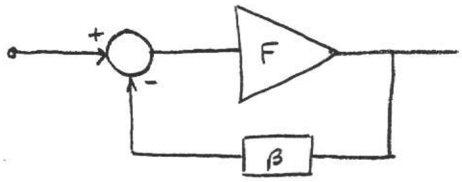
$-p_1$ och $-p_2$ komplext polpar

Återkopplas ett 3:e ordn syst. tillräckligt mycket kan det bli ostabilt, Poler i HHP.

Stabilitet

Ett system är stabilt om impulsfunktionssvaret går mot noll då $t \to \infty$.
En konsekvens av detta är att linjära system med poler i VHP är stabila.

Slingförstärkning T



$F_f = \dfrac{F}{1+\beta F} = \dfrac{F}{1-T}$,

där $T = -\beta F$ är slingförstärkning

Oscillatorer

För dimensionering av oscillatorer gäller $T(jw) = 1$ eller $\beta F(jw) = -1$

$|T| = 1$ $\qquad |\beta F| = 1$

$\angle T = 0°$ $\qquad \angle \beta F = -180°$

eller $Re[T] = 1$ $\qquad Re[\beta F] = -1$

$Im[T] = 0$ $\qquad Im[\beta F] = 0$

Stabilitetsmarginaler

Vi studerar $T(jw) = -\beta F(jw)$ för att utreda stabilitet.

Amplitudmarginal G_M:

Hur mycket kan förstärkningen öka innan vi får självsvängning vid frekvensen w_ϕ, där w_ϕ är vinkelfrekvensen då $\angle \beta F = -180°$

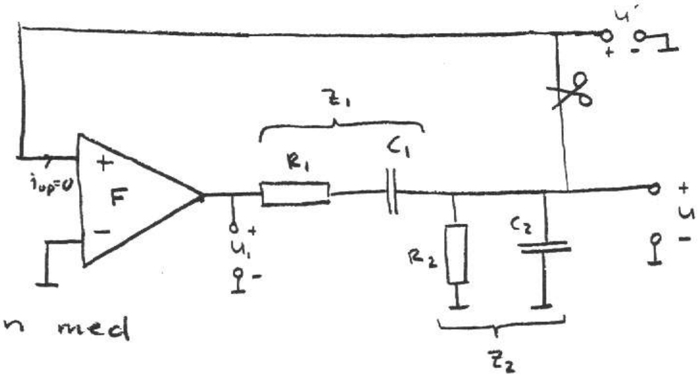
$$G_M = -20 \log |\beta F| \Big|_{w = w_\phi}$$

Fasmarginal Φ_M:

Hur mycket kan fasvridningen öka innan vi får självsvängning vid frekvensen w_G, där w_G är vinkelfrekvensen då $|\beta F| = |T| = 1$

$$\Phi_M = \angle \beta F \Big|_{w = w_G} + 180°$$

$\boxed{H6}$



Ideal op-först. men med
begr. först. F

$R_i = \infty \Rightarrow i_{op} = 0$

$R_o = 0$

Bryt upp kretsen (✂) och beräkna slingförst.

$$T = \frac{u}{u'}$$

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{sC_1} \quad , \quad Z_2 = R_2 /\!/ \frac{1}{sC_2} = \frac{R_2}{1 + sR_2C_2}$$

$$u_1 = u' \cdot F$$

$$u = u_1 \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = u' \cdot F \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{u' \cdot F \dfrac{R_2}{1 + sR_2C_2}}{R_1 + \dfrac{1}{sC_1} + \dfrac{R_2}{1 + sR_2C_2}} \quad \text{ger}$$

$$\frac{u}{u'} = \frac{F \cdot sR_2C_1}{1 + s(R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1) + s^2 R_1R_2C_1C_2} \qquad (s = jw)$$

$$T(jw) = \frac{F \cdot jwR_2C_1}{1 + jw(R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1) - w^2 R_1R_2C_1C_2} = 1$$

$$\therefore \quad 1 - w^2 R_1R_2C_1C_2 = 0$$

$$w = w_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$T(jw_0) = \frac{F \cdot jw_0 \cdot R_2C_1}{jw_0 (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)} = 1$$

$$F = \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + 1 = 10 + 10 + 1 = \underline{\underline{21}}$$

F3 Återkopplad förstärkare

$$F_f = \frac{F(j\omega)}{1 + \beta F(j\omega)}$$

slingförst: $T(j\omega) = -\beta F(j\omega)$

Rent resistiv återkoppling $\Rightarrow$ β ober. av ω

Samma faskurva för $\beta F(j\omega)$ och $F(j\omega)$

Fasmarginal: $\phi_M = \underline{\angle \beta F} + 180° = 45°$

$\underline{\angle \beta F} = -135°$ då $|\beta F| = 1$ eller 0 dB

Den icke återkopplade förstärkaren har en fasvridning på $-135°$ vid $f = f' = 200$ kHZ

$\Rightarrow$ $\beta F(j\omega)$ har också en fasvridning $-135°$ vid $f = 200$ kHz

Vi vill ha $|\beta F| \leq 0$ dB vid $f = f' = 200$ kHz

$|F(j2\pi f')| = 73$ dB $\Longrightarrow$ $\underset{(\max \beta)}{\beta = -73 \text{ dB}} \triangleq 2{,}24 \cdot 10^{-4}$ ggr

max β

$|\beta F(j\omega)|$ kurvan ligger 73 dB under $|F(j\omega)|$ kurvan.

$|\beta F(j\omega)|_{max} = 105 - 73 = 32$ dB (~ 40 ggr)

Total maximal förstärkning

$|F(j\omega)|_{max} = F_0$

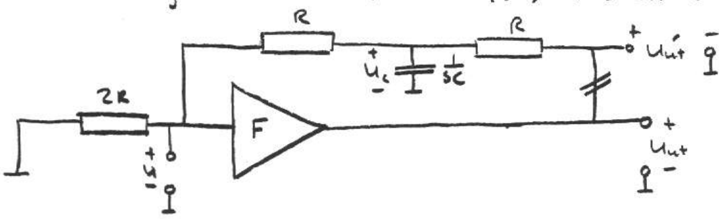
$$F_{fmax} = \frac{F_0}{1 + \beta F_0}$$

$20 \log F_{fmax} = 20 \log F_0 - 20 \log(1 + \beta F_0) \approx 20 \log F_0 - 20 \log(\beta F_0) = 105 - 32 = 73$ dB

För min β ($\beta = 0$):

$20 \log F_{fmax} = 105$ dB

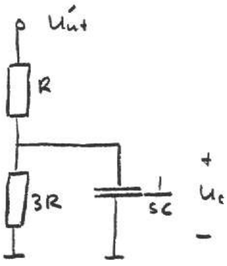
F6 Beräkna slingförst. T (bryt upp, nollställ ober. källor)



$Z_{in} = \infty$
$Z_{ut} = 0$

$u_{ut} = u \cdot F$

Spänningsdelning: $u = u_c \frac{2R}{R+2R} = u_c \frac{2}{3}$



sp.deln.: $u_c = u'_{ut} \frac{3R // \frac{1}{sC}}{3R // \frac{1}{sC} + R} = \ldots = u'_{ut} \frac{3}{4 + s3RC}$

$$\Longrightarrow u = \frac{2u'_{ut}}{4\left(1+s\cdot\frac{3RC}{4}\right)}$$

$$T = \frac{u_{ut}}{u'_{ut}} = \frac{F}{2\left(1+s\frac{3RC}{4}\right)} = -\frac{\frac{F_0}{2}}{\left(1+\frac{s}{\omega_0}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_1}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_2}\right)}$$

$\omega_1 = 2\pi \cdot 10^3$ r/s

$\omega_2 = \omega_1 \cdot 20$ r/s

$\omega_0 = \frac{4}{3RC}$

$T = -\beta F$

Vid $\omega = \omega_c$ ska $\Phi_M = 45°$ ($\angle \beta F = -135°$) och $|\beta F| = 1$

$$\angle \beta F = -\arctan\frac{\omega_c}{\omega_0} - \arctan\frac{\omega_c}{\omega_1} - \arctan\frac{\omega_c}{\omega_2} = -135°$$

$$|\beta F|^2 = \frac{\left(\frac{F_0}{2}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_1}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_2}\right)^2\right]} = 1$$

Antag $\omega_c = \omega_1$

$1 << \left(\frac{\omega_c}{\omega_2}\right)^2$ och $\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 >> 1$

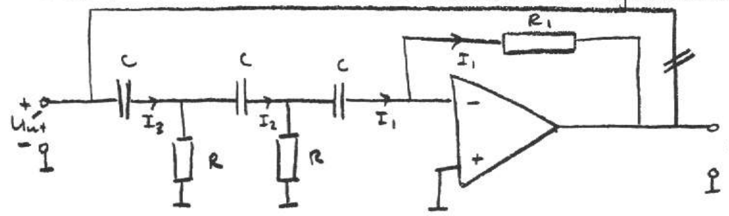
då blir $\angle \beta F = -135°$

$$1 = \frac{\left(\frac{F_0}{2}\right)^2}{\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 \cdot 2 \cdot 1} \Longrightarrow \frac{\omega_c}{\omega_0} = \frac{F_0}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\omega_0} = \frac{3RC}{4} = \frac{F_0}{2\sqrt{2}\cdot\omega_c} \Longrightarrow C = \frac{4}{3R}\cdot\frac{F_0}{2\sqrt{2}\,\omega_c} = \ldots = 7{,}5\,\mu F$$

$\omega_0 = \frac{4}{3RC} = \ldots = 2\pi \cdot 0{,}283$ $\because$ $\frac{\omega_c}{\omega_0} >> 1 \Rightarrow$ Antagandet riktigt

$\boxed{H1}$ Bestäm R_1 så att oscillatorn självsvänger sinusformigt.



ideal op-först.

$R = 1k\Omega$

$C = 4{,}7nF$

neg. återk. $\Rightarrow \varepsilon = 0$

Beräkna slingförst.

sätt $T = \frac{u_{ut}}{u'_{ut}}$

kretsekv.:

$u_{ut} = -I_1R_1$

strömdelning: $I_1 = I_2\frac{R}{R+\frac{1}{sC}} = \frac{I_2\cdot sRC}{1+sRC}$

mera strömdelning: $I_2 = I_3\frac{R}{R+\frac{1}{sC}+R/\!/\frac{1}{sC}} = \dots = I_3\frac{R(1+sRC)sRC}{s^2R^2C^2+s3RC+1}$

$$I_3 = \frac{u'_{ut}}{\frac{1}{sC}+R/\!/\left(\frac{1}{sC}+R/\!/\frac{1}{sC}\right)} = \dots =$$

$$= u'_{ut}\frac{sC[s^2R^2C^2+3sRC+1]}{s^2\cdot 3R^2C^2+s\cdot 4RC+1}$$

$$I_1 = \frac{sRC}{1+sRC}\cdot\frac{sRC(1+sRC)}{s^2R^2C^2+3sRC+1}\cdot\frac{u'_{ut}\cdot sC[s^2R^2C^2+3sRC+1]}{s^2 3R^2C^2+s4RC+1} = -\frac{u_{ut}}{R_1}$$

$$T = \frac{u_{ut}}{u'_{ut}} = -\frac{s^3R^2R_1C^3}{s^2 3R^2C^2+s4RC+1}$$

För sinusformig svängning

$T(jw) = 1$

$s = jw$

$$\frac{jw^3R^2R_1C^3}{\underbrace{1-w^2\cdot 3R^2C^2}_{0}+jw4RC} = 1$$

$1-w^2 3R^2C^2 = 0$

$w = w_0 = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot RC}$

$T(jw_0) = \frac{w_0^3R^2R_1C^3}{w_0 4RC} = 1$

$R_1 = \frac{4}{w_0^2RC^2} = \dots = 12R$

$R = 1k\Omega$

$R_1 = 12k\Omega$

$w_0 = \frac{1}{\sqrt{3}RC}$

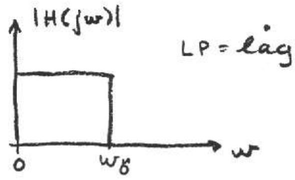
$\frac{w_0}{2\pi} = f_0 = \underline{\underline{19{,}5\ kHz}}$

Aktiva RC-filter

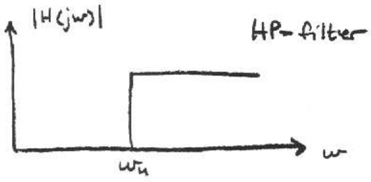
Frekvensselektiva förstärkare uppbyggda med

- Resistanser
- Kondensatorer
- Op-förstärkare

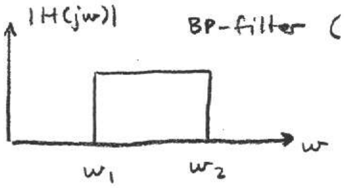
Principiella filterkarakteristikor



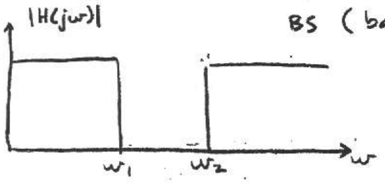
LP = lågpass



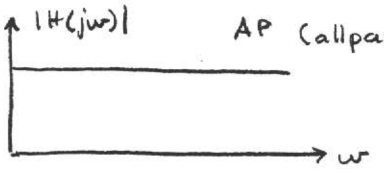
HP-filter (högpass)



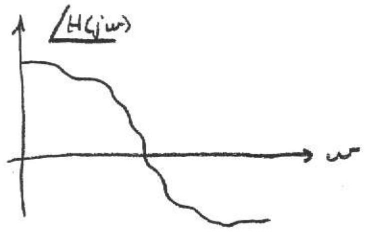
BP-filter (bandpass)



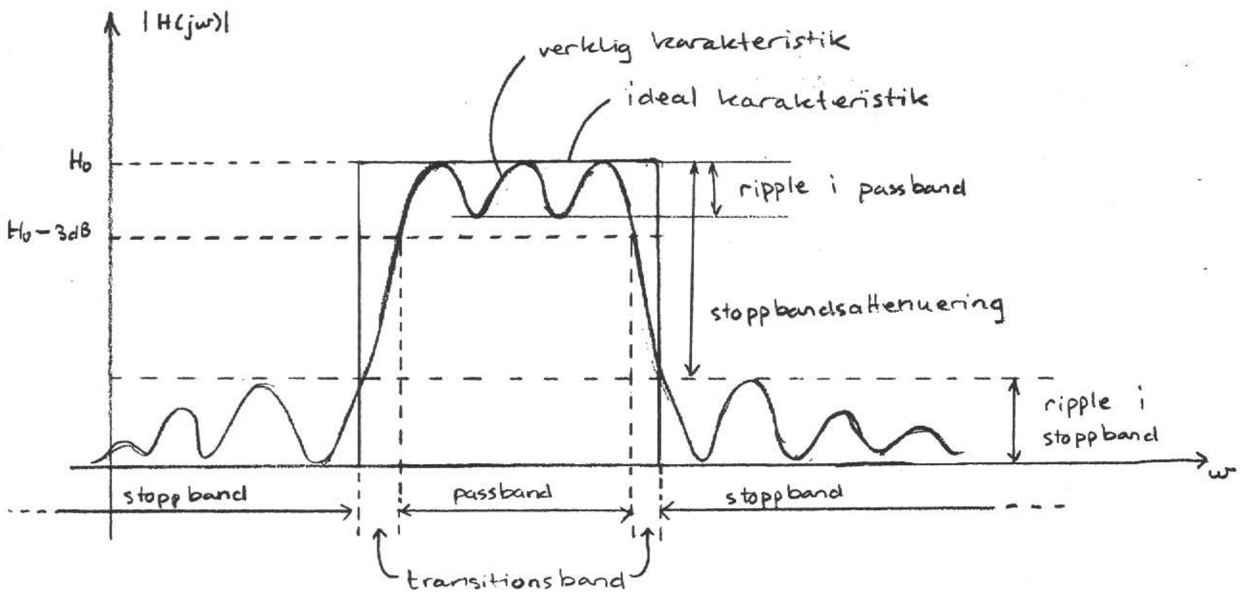
BS (bandspärr)



AP (allpass)



Exempel på verklig frekvenskarakteristik (BP)



När man konstruerar ett verkligt filter börjar man med att teckna överföringsfunktionen.

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_M s^M + a_{M-1}s^{M-1} + \ldots + a_0}{b_N s^N + b_{N-1}s^{N-1} + \ldots + b_0} = \frac{a_M(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_M)}{b_N(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)}$$

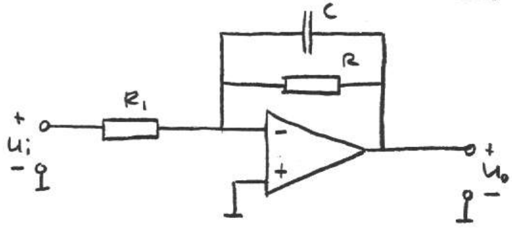
$M \leq N$; a_i, b_i reella

poler, nollställen : reella eller komplexa (konjugatpar)

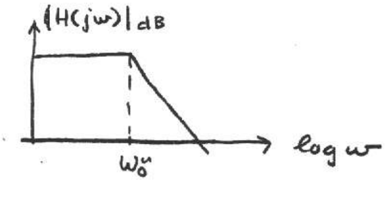
Första ordningens filter : $H(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + b_0}$

<u>LP-filter</u> : $a_1 = 0$ $(b_1 = 1)$ och vi får $H(s) = \frac{a_0}{s + b_0}$

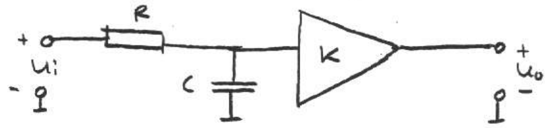
Ex 1 (inverterande LP-filter)



$$H(s) = \frac{u_0(s)}{u_i(s)} = -\frac{1}{RC}\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$$

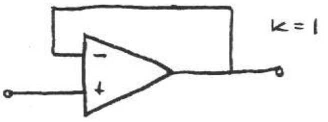


Ex 2 (icke-inv. LP-filter)

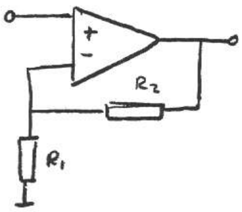


$$H(s) = \frac{u_0}{u_i} = k\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$$

där k kan realiseras som



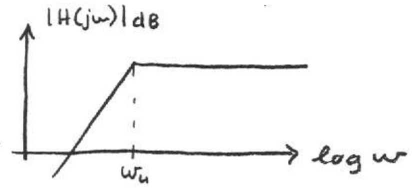
eller



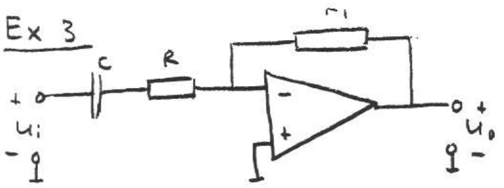
$k = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$

<u>HP-filter</u> : $a_0 = 0$ $(b_1 = 1)$

$$H(s) = \frac{a_1 s}{s + b_0}$$

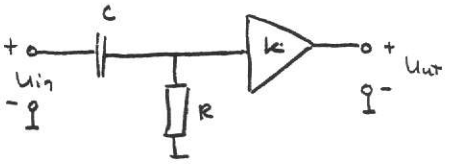


Ex 3



$$H(s) = -\frac{R_1}{R}\frac{s}{s+\frac{1}{RC}}$$

Ex 4 (icke inv.)

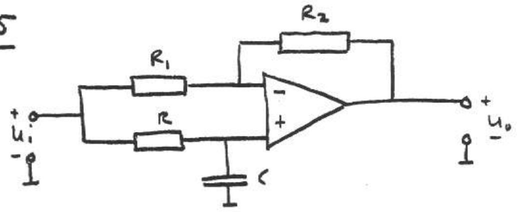


$$H(s) = k\cdot\frac{s}{s+\frac{1}{RC}}$$

Allpass (AP) $a_1 = b_1 = 1$, $a_0 = -a$, $b_0 = a$

$$H(s) = \frac{s-a}{s+a}$$

Ex 5



$$H(s) = -\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{s-\frac{R_1}{R_2R_c}}{s+\frac{1}{RC}}$$

Andra ordningens filter

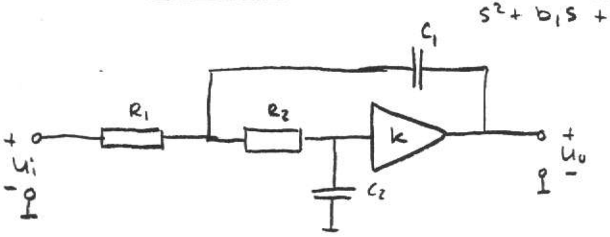
2:a ordningens länkar kan generellt tecknas som

$$H(s) = \frac{a_2s^2 + a_1s + a_0}{b_2s^2 + b_1s + b_0}$$

1. Lågpass $a_2 = a_1 = 0$
2. Bandpass $a_2 = a_0 = 0$
3. Högpass $a_1 = a_0 = 0$
4. Bandspärr $a_1 = 0$
5. Allpass

$$H(s) = a_2\frac{s^2 - b_1s + b_0}{s^2 + b_1s + b_0}$$

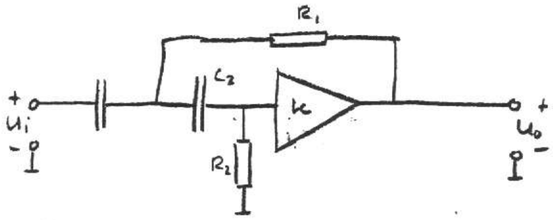
LP-filter $H(s) = \frac{a_0}{s^2 + b_1s + b_0}$



$$H(s) = \frac{u_0}{u_i} = \frac{\frac{k}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1-k}{R_2C_2}\right) + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

HP-filter

$$H(s) = \frac{a_2}{s^2 + b_1 s + b_0}$$



$$\frac{u_0}{u_i} = \frac{ks^2}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1-k}{R_1C_1}\right) + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

BP-filter

Allmänt: $H(s) = \frac{a_1 s}{s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{As}{s^2 + Bs + \omega_0^2}$

Belopp: $|H(j\omega)| = \frac{\omega A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega B)^2}} = \frac{A/B}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega B)^2}(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$

Egenskaper:

- $|H(j\omega)|_{max} = \frac{A}{B}$ vid $\omega = \omega_0$
- Centerfrekvens: $\omega = \omega_0$
- Bandbredd $\omega_ö - \omega_u$:

$$|H(j\omega)|_{\omega = \omega_{3dB}} = \frac{A/B}{\sqrt{2}}$$

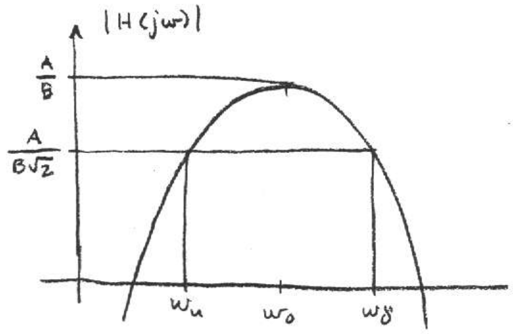
$$\frac{1}{(\omega B)}(\omega_0^2 - \omega^2) = \pm 1$$

Två andragradsekv. ⇒ 4 lösningar

$$\omega_{1,2} = \frac{B}{2} \overset{+}{(-)} \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$$

$$\omega_{3,4} = -\frac{B}{2} \overset{+}{(-)} \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$$

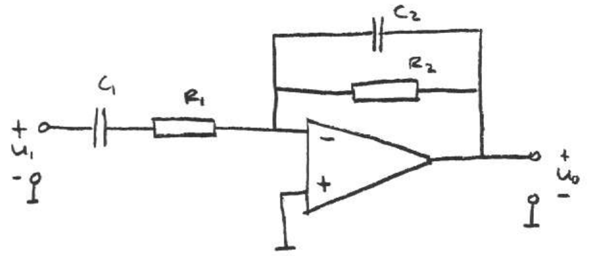
Krav: $\omega > 0$
$B > 0$



$\omega_ö = \omega_1$
$\omega_u = \omega_3$

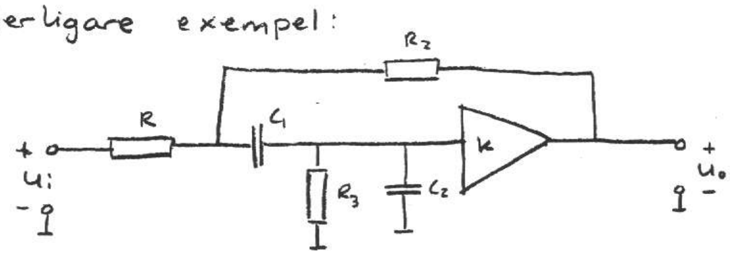
Bandbredd $= \omega_ö - \omega_u = \frac{B}{2} - \left(-\frac{B}{2}\right) = B$

Exempel på realisering (inverterande BP-filter)



$$\frac{u_0}{u_i} = \frac{-sR_1C_2}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_2}\right) + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

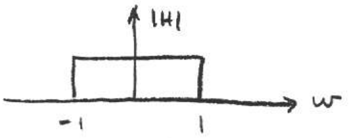
Ytterligare exempel:

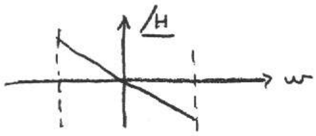


Filterfunktioner

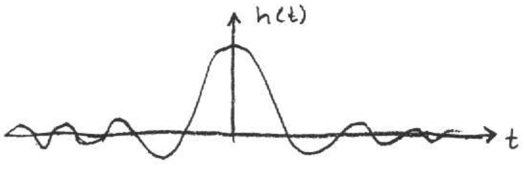
Approximationer

idealt LP-filter





Ej realiserbart ⟹ ger icke-kausalt impulsfunktionssvar



Approximationer (de vanligaste)

- Butterworth |H(jw)| Maximalt slät
  Monotont avtagande för stigande w
- Chebyshev |H(jw)| Ripple i passband,
  monotont avtagande spärrband (transitionsband minskar)
- Bessel Linjär fas eftersträvas

Butterworth (BW) karakteristik (approx. till idealt LP)

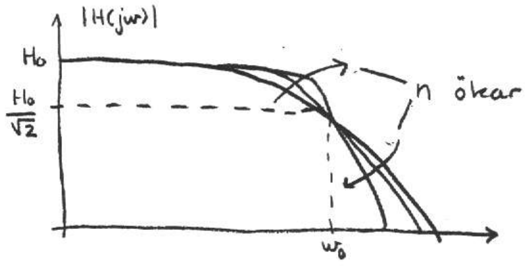
$H(s) = \frac{H_0}{B(s)}$, där $B(s)$ är Butterworthpolynomet.

$|B(j\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}$, där n är ordningen.

Egenskaper:

1. $|H(j\omega)|_{\omega \to 0} = H_0$ ober. av n

2. $|H(j\omega)|_{\omega = \omega_0} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$ ober. av n



$n \to \infty$

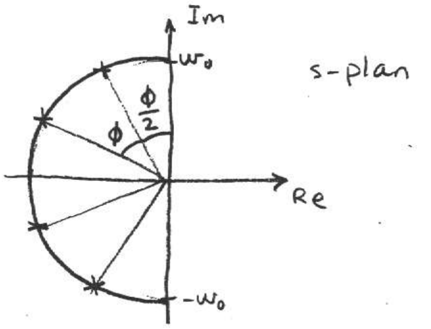
$\omega < \omega_0 : \; |H(j\omega)| = H_0$
$\omega > \omega_0 : \; |H(j\omega)| = 0$ } idealt LP

3. $|H(j\omega)|$ är monotont avtagande (inget ripple)

BW-karakteristiken är definierad av att beloppsfunktionen är maximalt slät, dvs $\frac{d\,|H(j\omega)|}{d\omega} = \dots = \frac{d^{n-1}\,|H(j\omega)|}{d\omega^{n-1}} = 0$

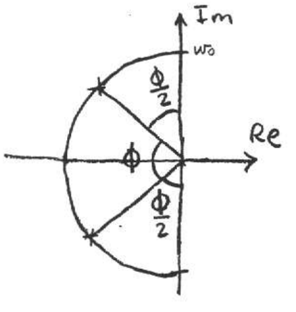
4. Polerna till $H(s)$ är placerade på en halvcirkel med radien ω_0.

$\phi = \frac{180^\circ}{n}$



Exempel $n = 2$

$$H(s) = \frac{H_0}{s^2 + 2k\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{H_0}{(s-s_1)(s-s_2)}$$



$\phi = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$s_{1,2} = -k\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{k^2 - 1}$

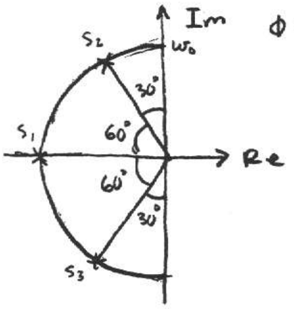
$s_{1,2} = -\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \pm j\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$

$k = \frac{1}{\sqrt{2}}$

För ett 2:a ordn. BW-filter är ω_0 = övre gränsvinkelfrekvensen

OBS! Endast i BW-fallet

Exempel $n = 3$ $\qquad H(s) = \dfrac{r_0}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}$



$$\phi = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$s_1 = -w_0$$

$$s_{2,3} = -\frac{w_0}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}w_0$$

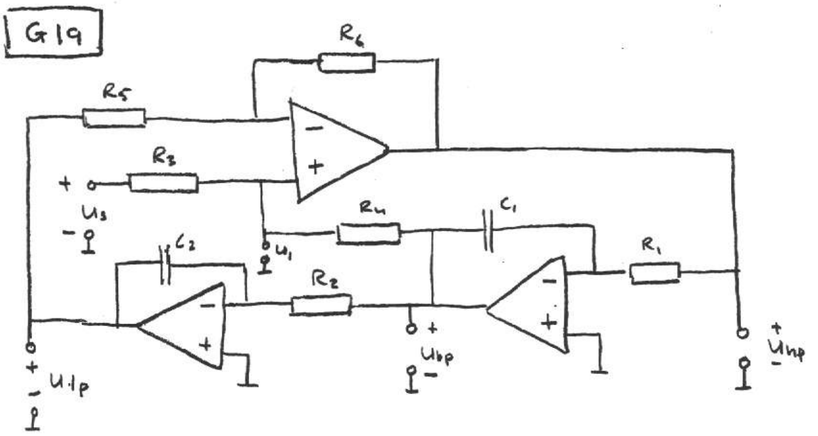
Realiseras lämpligen genom en kaskadkoppling av en 1:a och en 2:a ordn. länk

Ett bekvämt sätt att realisera godtyckliga rationella överföringsfunktioner är att kaskadkoppla första och andra ordningens filter.

OBS! Varje länk måste ha hög inimpedans och låg utimpedans = får ej belasta varandra

---

G19



$$\frac{U_s - U_1}{R_3} + \frac{U_{op} - U_1}{R_4} = 0 \Rightarrow U_1 = \frac{U_s R_4 + U_{bp} R_3}{R_3 + R_4}$$

$$\frac{U_{lp} - U_1}{R_5} + \frac{U_{bp} - U_1}{R_6} = 0 \Rightarrow U_1 = \frac{U_{lp} R_6 + U_{hp} R_5}{R_5 + R_6}$$

$$\frac{U_{hp}}{R_1} + \frac{U_{bp}}{1/sC_1} = 0 \Rightarrow \frac{U_{bp}}{U_{hp}} = -\frac{1}{sR_1C_1}$$

$$\frac{U_{lp}}{U_{bp}} = -\frac{1}{sR_2C_2}$$

$$\frac{U_{lp}}{U_{hp}} = \frac{1}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2}$$

Sätt "$U_1 = U_1$" och eliminera U_{hp} och U_{bp}

Vi får

$$\frac{U_s R_4 - U_{lp} s R_2 R_3 C_2}{R_3 + R_4} = \frac{U_{lp} R_6 + U_{lp} s^2 R_1 R_2 R_5 C_1 C_2}{R_5 + R_6}$$

forts →

$$\frac{U_{lp}}{U_s} = \frac{\frac{R_5+R_6}{R_3+R_4}\cdot\frac{R_4}{R_1R_2R_5C_1C_2}}{s^2 + s\frac{R_5+R_6}{R_3+R_4}\cdot\frac{R_3}{R_1R_5C_1} + \frac{R_6}{R_1R_2R_5C_1C_2}}$$

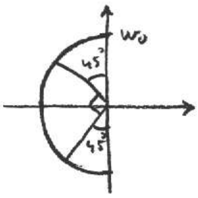
$R = R_1 = R_2$, $C = C_1 = C_2$, $R_3 = R_5 = R_6$

$$\frac{U_{lp}}{U_s} = \frac{\frac{2R_3}{R_3+R_4}\cdot\frac{R_4}{R^2R_3C^2}}{s^2 + s\frac{2R_3}{R_3+R_4}\frac{1}{RC} + \frac{1}{(RC)^2}} = \frac{K}{s^2+2\alpha s w_0 + w_0^2}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha w_0 &= \frac{2R_3}{R_3+R_4} \\ w_0^2 &= \frac{1}{(RC)^2}\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}\alpha &= \frac{R_3}{R_3+R_4} \\ w_0 &= \frac{1}{RC}\end{aligned}$$

2:a ordn. BW-filter

$\phi = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$



poler:

$s_{1,2} = -w_0(\alpha \pm j\sqrt{1-n^2})$

$s_{1,2} = -w_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

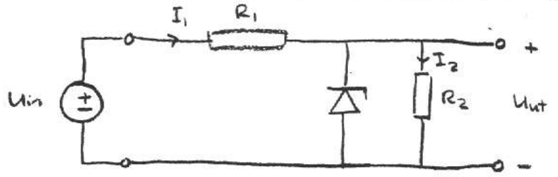
$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Bandbredd $w_0 = 2\pi\cdot 100$

$R = \frac{1}{w_0 C} = \ldots = 15{,}9\,k\Omega$

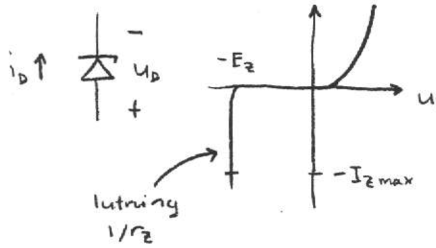
$R_4 = R_3\left(\frac{1}{\alpha}-1\right) = R_3(\sqrt{2}-1) = 4{,}1\,k\Omega$

B10

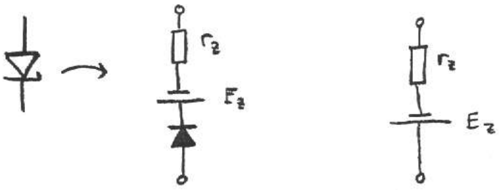


Krav: $U_{ut} = E_z$

$I_z \leq 60\,mA$



Ekv. schema ($u_D < 0$)



Backrikning Zenerområde

Gränsen för att $U_{ut} < E_z$ ges då I_z precis blir noll.

$U_{ut} = U_{in}\frac{R_2}{R_1+R_2} = E_z$

$U_{in} = E_z\frac{R_1+R_2}{R_2} = 8{,}58\,V$ ($I_z = 0$, $U_{ut} = E_z$)

Låt $u_{in} \geq 8{,}6\,V$

forts →

$I_{zmax} = 60 mA$

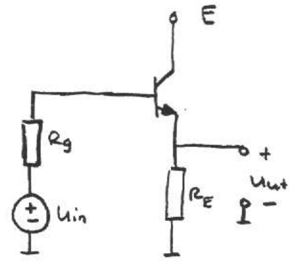
$I_1 = I_z + I_2 = I_z + \frac{E_z}{R_z}$

$I_{1max} = I_{zmax} + \underbrace{\frac{E_z}{R_z}}_{konst.}$

$u_{inmax} = R_1 \cdot I_{1max} + E_z = R_1 (I_{zmax} + \frac{E_z}{R_z}) + E_z = \ldots = 17,58 V \approx 17,5 V$

$\therefore 8,6 \le u_{in} \le 17,5 V$

D3



Transistor BC167 B

Arbetspunkt $I_c = 1 mA$
$u_{CE} = 10 V$

Beräkna R_{in} och R_{ut} (småsignalberäkningar)

Ur datablad fås vid $I_c = 2mA$, $u_{CE} = 5V$

$h_{11} = 4,5 k\Omega$

$h_{12} = 2 \cdot 10^{-4}$

$h_{21} = 330$

$h_{22} = 30 \mu S$

Korr. för $I_c \approx 1mA$	Korr. för $u_{CE} = 10V$
$H_{11} = 1,8$	$H_{11} = 1,1$
$H_{12} = 1,4$	$H_{12} = 0,92$
$H_{21} = 0,93$	$H_{21} = 1,1$
$H_{22} = 0,63$	$H_{22} = 0,75$

Vid $I_c = 1mA$, $u_{CE} = 10V$

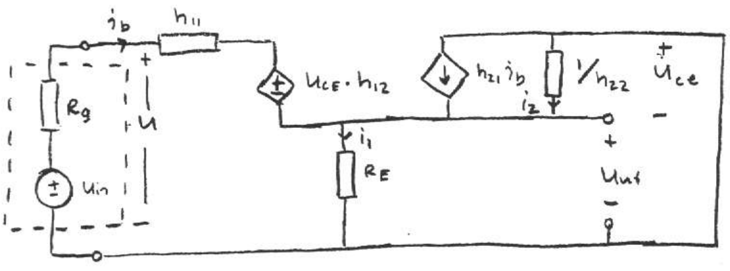
$h_{11} = 4,5 \cdot 1,8 \cdot 1,1 = 8,9 k\Omega$

$h_{12} = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,4 \cdot 0,92 = 2,6 \cdot 10^{-4}$

$h_{21} = 330 \cdot 0,93 \cdot 1,1 = 338$

$h_{22} = 30 \cdot 0,63 \cdot 0,75 = 14 \mu S$

Småsignalschema



$R_{in} = \frac{u}{i_{in}} = \frac{u}{i_b}$

forts →

Kretsekv :

$$u = i_b h_{11} + u_{ce} \cdot h_{12} + i_1 R_E$$

$$i_1 R_E + \frac{i_2}{h_{22}} = 0 \Rightarrow i_2 = - h_{22} i_1 R_E$$

$$i_1 = i_b(1+h_{21}) + i_2 = i_b(1+h_{21}) - h_{22} i_1 R_E$$

$$\Rightarrow i_1 = \frac{i_b(1+h_{21})}{1 + R_E h_{22}}$$

$$u_{ce} + u_{ut} = 0 \Rightarrow u_{ce} = -u_{ut} = -i_1 R_E$$

$$u = i_b h_{11} - i_1 h_{12} R_E + i_1 R_E = i_b h_{11} + i_1 R_E (1 - h_{12}) =$$

$$= i_b h_{11} + i_b \frac{R_E(1-h_{12})(1+h_{21})}{1 + R_E h_{22}}$$

$$R_{in} = \frac{u}{i_b} = h_{11} + \frac{R_E(1-h_{12})(1+h_{21})}{1 + R_E h_{22}} = \dots = 409\, k\Omega$$

utimpedans .

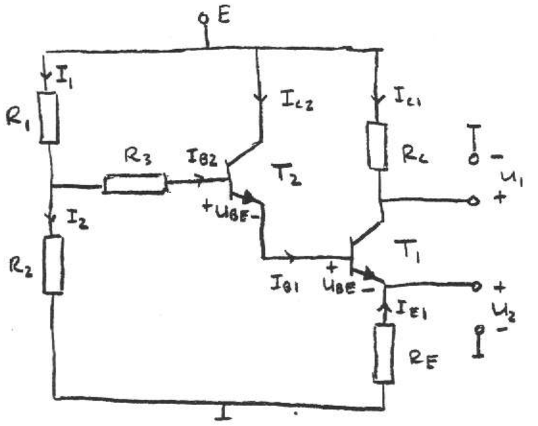
Nollställ oberoende källor $(u_{in} = 0)$

Lägg sp. på utgången , beräkna $R_{ut} = \frac{u_{ut}}{i_{ut}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{ut} = i_1 - i_b(1+h_{21}) - i_2 \\ \left. \begin{array}{l} i_b(h_{11} + R_g) + h_{12} u_{ce} + R_E i_1 = 0 \\ u_{ce} = -i_1 R_E \end{array} \right\} i_b = -i_1 R_E \frac{1 - h_{12}}{h_{11} + R_g} \\ i_2 \cdot \frac{1}{h_{22}} + i_1 R_E = 0 \Rightarrow i_2 = -i_1 R_E h_{22} \end{array} \right.$$

$$R_{ut} = \frac{R_E}{1 + R_E h_{22} + \frac{R_E}{h_{11} + R_g}(1 - h_{21})(1 - h_{12})} = \dots = 29\,\Omega$$

C6



$U_{BE} = 0{,}7V$

$\beta_1 = 100$

$\beta_2 = 50$

Kretsekv.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_2 I_2 = R_3 I_{B2} + 2U_{BE} - I_{E1} R_E \\ -I_{E1} = I_{B1}(1+\beta_1) = I_{B2}(1+\beta_2)(1+\beta_1) \end{array} \right.$$

$$R_2 I_2 = I_{B2}\left[R_3 + R_E(1+\beta_2)(1+\beta_1)\right] + 2U_{BE}$$

$$E = R_1 I_1 + R_2 I_2 = R_1(I_2 + I_{B2}) + R_2 I_2 = I_2(R_1+R_2) + R_1 I_{B2}$$

$$I_2 = \frac{E - I_{B2} R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{R_2 E}{R_1+R_2} = I_{B2}\left[R_3 + R_E(1+\beta_2)(1+\beta_1) + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\right] + 2U_{BE}$$

$$I_{B2} = \frac{\frac{E R_2}{R_1+R_2} - 2U_{BE}}{R_3 + R_E(1+\beta_2)(1+\beta_1) + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}} = \dots = 1{,}94\,\mu A$$

$I_{C2} = \beta_2 I_{B2} = 96{,}8\,\mu A$

$I_{B1} = I_{B2} + I_{C2} = \dots = 98{,}8\,\mu A$

$I_{C1} = \beta_1 I_{B1} = \dots = 9{,}88\,mA$

$I_{E1} = -I_{C1} - I_{B1} = -9{,}92\,mA$

$I_2 = \dots = 0{,}259\,mA$

$I_1 = I_2 + I_{B2} = 0{,}261\,mA$

$U_1 = E - I_c R_c = \dots = 14{,}1\,V$

$U_2 = -I_{E1} R_E = \dots = 1{,}0\,V$