Föreläsning 29/11-13

Studera en plan våg som propagerar i z-led

$\mathbb{E} = \hat{x}\,\bar{E}_x(z)$

Vågekv.: $\dfrac{\partial^2 \bar{E}_x(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 E_x(z) = 0$

lösning: $\bar{E}_x(z) = \bar{E}_x^-(0)e^{-\gamma z} + \bar{E}_x^+(0)e^{\gamma z}$

Där $\bar{E}_x^+ = E_x^+(0)e^{i\theta +}$

$\bar{E}_x^- = E_x^-(0)e^{i\theta -}$

På reell form: $E_x(z,t) = \mathrm{Re}\{\bar{E}_x(z)e^{i\omega t}\} = \mathrm{Re}\{(E_x^-(0)e^{i\theta^-}e^{-(\alpha+i\beta)z} +$

$+ E_x^+(0)e^{i\theta^+}e^{(\alpha+i\beta)z})\,e^{i\omega t}\} = E_x^-(0)\,e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \theta^-) +$

$+ E_x^+(0)\,e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \theta^+)$

Två vågor som utbreder sig i motsatt riktning

α - dämpning
β - faskonstant

Fashastighet

Följ t.ex en vågtopp
$\omega t - \beta z + \theta^+ =$ konstant
Derivera m.a.p t: $\omega - \beta \dfrac{dz}{dt} = 0$

$\Rightarrow v_{fas} = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\omega}{\beta}$

Vågimpedans kap 8.2.2

Relation mellan $\mathbb{B}$ och $\mathbb{E}$ (η boken, z här)

Ur postulatet: $\nabla \times \bar{\mathbb{E}} = -i\omega \bar{\mathbb{B}}$ Fås för $\bar{\mathbb{E}} = \hat{x}\,\bar{E}_x(z)$

$\bar{\mathbb{H}} = \dfrac{-1}{i\omega\mu}\left[\hat{y}\dfrac{\partial \bar{E}_x}{\partial z}\right] = \dfrac{-\hat{y}}{i\omega\mu}\left[-\gamma\bar{E}_x^-(z) + \gamma\bar{E}_x^+(z)\right] = \dfrac{\hat{y}\gamma}{i\omega\mu}\left[\bar{E}_x^-(z) - \bar{E}_x^+(z)\right] =$

$= \hat{y}\left[\bar{H}_y^-(z) + \bar{H}_y^+(z)\right]$

Identifiera: $\begin{cases} \bar{H}_y^+(z) = \dfrac{-\gamma}{i\omega\mu}E_x^+ = -\dfrac{1}{z}\bar{E}_x^+(z) \\ \bar{H}_y^-(z) = \dfrac{\gamma}{i\omega\mu}\bar{E}_x^- = \dfrac{1}{z}\bar{E}_x^-(z) \end{cases}$

$z = \dfrac{i\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\dfrac{i\omega\mu}{i\omega\varepsilon + \sigma}} = \dfrac{\gamma}{i\omega\varepsilon + \sigma}$

$\gamma = \sqrt{i\omega\mu(i\omega\varepsilon + \sigma)} =$
$= \alpha + i\beta$

För plan våg: $\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \mathbb{E}(0)\, e^{-\gamma \mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}$, $\hat{\mathbb{k}}\,\mathbb{E} = 0$

propagations-riktning

Sätt in i $\nabla \times \mathbb{E} = -i\omega\mathbb{B}$

$\Rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{r}) = \frac{1}{z}\,\hat{\mathbb{k}} \times \mathbb{E}(\mathbb{r})$

$\Leftrightarrow \mathbb{E} = z\,\mathbb{H}(\mathbb{r}) \times \hat{\mathbb{k}}$

Beräkning av α och β kap 8.3

Utgå från $\begin{cases} \gamma^2 = i\omega\mu\sigma - \omega^2\varepsilon\mu \\ \gamma = \alpha + i\beta \end{cases}$, $\alpha, \beta \geq 0$

$\Rightarrow \alpha = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1}$, $\beta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1}$

För en god ledare: $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$, $\alpha \approx \beta \simeq \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$

För ett dielektrisk material: (t.ex vatten)

$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} << 1$, $\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$, $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$

Skineffekt kap 8.3

E-fält propagerar in i ett ledande halvplan

$\mathbb{E}(z) = \hat{x}\,E_x^+(0)\,e^{-\gamma z} = \hat{x}\,E_x^+(0)\,e^{i\theta^+}e^{-\alpha z}e^{-i\beta z}$

reell form $\Longrightarrow$ $E(z,t) = \hat{x}\,E_x^+(0)\underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{dämpning}}\cos(\omega t - \beta z + \theta^+)$

Fältet dämpas med faktorn $e^{-\alpha z}$

$\delta = 1/\alpha$

inträngningsdjup

På djupet $z = \delta$ har fältstyrkan dämpats till $e^{-1} \approx 37\%$

För en metall $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$, $\delta \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$