Föreläsning 27/11-13

Retarderade potentialer 7.4, 7.6

$\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$

$\Rightarrow \nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbb{A})$ Faradays lag

$\Rightarrow \nabla \times \left(\mathbb{E} + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}\right) = 0$

Definieras: $-\nabla V = \mathbb{E} + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}$, $\mathbb{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}$

Hur löser vi problemen?

Amperes lag: $\nabla \times \nabla \times \mathbb{A} = \mu_0 \mathbb{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}\right) = \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \nabla \times \mathbb{A} = \\ = \nabla(\nabla \cdot \mathbb{A}) - \nabla^2 \mathbb{A} \end{array} \right\} =$

$= \nabla^2 \mathbb{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbb{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbb{J} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbb{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}\right)$

Välj $\nabla \cdot \mathbb{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\nabla^2 \mathbb{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbb{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbb{J}}$ Vågekvationen - dynamikens version av Laplace.

Lösning: $\mathbb{A}(\mathbb{R}, t) = \mathbb{A}(t - R\sqrt{\varepsilon\mu})$

två ggr deriverbar

För V: $\nabla \mathbb{D} = \rho$

$\nabla \cdot \varepsilon\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t}\right) = \rho$

$\nabla^2 V + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon}$

$\boxed{\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho(t)}{\varepsilon}}$

lösningar: $V(\mathbb{R}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'} \frac{\rho(t - R/u)}{R}\,dV'$

$A(\mathbb{R}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbb{J}(t - R/u)}{R}\,dV'$

Inhomogen vågekv. i $\mathbb{E}$ & $\mathbb{H}$ kap 7.6

Faradays lag:

$\nabla \times \nabla \times \mathbb{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}\right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbb{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbb{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}\right)$

$\nabla(\underbrace{\nabla \cdot \mathbb{E}}_{\rho/\varepsilon}) - \nabla^2 \mathbb{E} = -\mu \frac{\partial \mathbb{J}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2}$

$\Longrightarrow \boxed{\nabla^2 \mathbb{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbb{J}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho}$ Vågekv. för $\mathbb{E}$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbb{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbb{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbb{J}}$$ Vågekv. för $\mathbb{H}$

Komplexa fält 7.7

Antag sinusformade fält (i tiden)

$\mathbb{E}(\mathbb{r},t) = \hat{x} E_{0x} \cos[\omega t + \theta_x(r)] + \hat{y} E_{0y} \cos[\omega t + \theta_y(r)] + \hat{z} E_{0z} \cos[\omega t + \theta_z(r)]$

Definiera komplexa fält:

$E(r) = \hat{x} E_{0x}(r) e^{i\theta_x(r)} + \hat{y} E_{0y} e^{i\theta_y} + \hat{z} E_{0z} e^{i\theta_z} =$

$= \hat{x}\bar{E}_{0x} + \hat{y}\bar{E}_{0y} + \hat{z}\bar{E}_{0z}$

Återgå till reellt fält: $\mathbb{E}(\mathbb{r},t) = \mathrm{Re}\{\bar{\mathbb{E}}(r) e^{i\omega t}\}$

Vad händer för fältekv.?

$\nabla \times (\mathrm{Re}(\bar{\mathbb{E}} e^{i\omega t})) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{Re}(\bar{\mathbb{B}} e^{i\omega t}))$

$\mathrm{Re}(\nabla \times \bar{\mathbb{E}} e^{i\omega t}) = \mathrm{Re}(-\partial/\partial t\, \bar{\mathbb{B}} e^{i\omega t})$

$\mathrm{Re}(e^{i\omega t} \nabla \times \bar{\mathbb{E}}) = \mathrm{Re}(\bar{\mathbb{B}}[-i\omega \cdot e^{i\omega t}])$

Måste gälla för alla t:

$\nabla \times \bar{\mathbb{E}} = -i\omega \bar{\mathbb{B}}$

Maxwells ekvationer:

$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \longrightarrow \nabla \times \bar{\mathbb{E}} = -i\omega \bar{\mathbb{B}}$

$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \longrightarrow \nabla \cdot \bar{\mathbb{B}} = 0$

$\nabla \times \mathbb{H} = \mathbb{J} + \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} \longrightarrow \nabla \times \bar{\mathbb{H}} = \bar{\mathbb{J}} + i\omega \bar{\mathbb{D}}$

$\nabla \cdot \mathbb{D} = \rho \longrightarrow \nabla \cdot \bar{\mathbb{D}} = \bar{\rho}$

För vågekv. fås:

$\nabla^2 \mathbb{E} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2} = 0$

$\nabla^2 \bar{\mathbb{E}} - i\omega\sigma\mu \bar{\mathbb{E}} - (i\omega)^2 \varepsilon\mu \bar{\mathbb{E}} = 0$

brukar skrivas som:

$\nabla^2 \bar{\mathbb{E}} - \gamma^2 \bar{\mathbb{E}} = 0$, $\gamma = \alpha + i\beta = \sqrt{i\omega\mu(i\omega\varepsilon + \sigma)}$ utbredningskonstant

Plan våg 8.1, 8.2

Utbredningsriktning (t.ex $\hat{z}$-led)

Fältstyrkan vid fix tidpunkt är konstant till storlek och riktning i ett oändligt plan vinkelrätt mot utbredningsriktningen

Ansätt plan våg:

$$\bar{E}(z) = \hat{x}\bar{E}_x(z) + \hat{y}\bar{E}_y(z) + \hat{z}\bar{E}_z(z)$$

$$\bar{H}(z) = \hat{x}\bar{H}_x(z) + \hat{y}\bar{H}_y(z) + \hat{z}\bar{H}_z(z)$$

Koll: $\rho_{fri} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{D} = 0 \quad \nabla \cdot \bar{B} = 0$

Utför divergens: $\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial z} = 0 \quad \Big| \quad \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow \bar{E}_z =$ konstant

$\Rightarrow \bar{H}_z =$ konstant

För vågor är E_z och H_z ej av intresse

ex. (på notation)

$E(z) = E_0 e^{-j\omega z} \hat{x}$

Polarisation 8.2.3

Allmän plan våg: $\bar{E} = \hat{x} E_{x0} \cos(\omega t - \beta z) + \hat{y} E_{y0} \cos(\omega t - \beta z + \varphi)$

a) linjärt polariserad om $\varphi = \pm k\pi$

b) cirkulärpolariserad om $E_{x0} = E_{y0}$ och $\varphi = \pm(k + \frac{1}{2})\pi$

c) annars elliptisk