Föreläsning 12/11-13

Det magnetiska fältet 6.1, 6.2

Kraft på stillastående laddning (elektrostatik): $\mathbb{F}_e = q\,\mathbb{E}(R)$

Kraft på laddning i rörelse med hastighet $\mathbb{u}$: $\mathbb{F} = \mathbb{F}_e + \mathbb{F}_m = q(\mathbb{E} + \mathbb{u} \times \mathbb{B})$

Postulat: $\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$ (källfritt)

$\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \cdot \mathbb{J}$ $\qquad [B] = Vs/m^2$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9}\ Vs/Am$

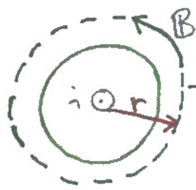
Vi vet att divergensen av en rotation $\equiv 0$
$\Rightarrow 0 \equiv \nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbb{J} = 0$ (kont. ekv för likström)

Postulatet på integralform:

$$\oint_S \mathbb{B} \cdot d\mathbb{S} = 0$$

$$\oint \mathbb{B} \cdot d\ell = \mu_0 i \quad \leftarrow \text{Amperes lag}$$

exempel 6.1



(använd högerhandsregeln för att få ut riktning på $\mathbb{B}$-fältet)

Ampere slinga

$\int \mathbb{B} \cdot d\ell = \mu_0 i \qquad \underbrace{B \cdot 2\pi r}_{\text{omkrets för slingan}} = \mu_0 i \qquad B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$ (från lång rak tråd)

(ex 6.2 hemma)

Magnetisk vektorpotential 6.3

Vet att $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{A}) \equiv 0$
så eftersom $\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$
kan vi definiera $\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$, $[A] = Vs/m$

För att definiera vektorn $\mathbb{A}$ behöver vi även
Studera nu $\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \cdot \mathbb{J} \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \mathbb{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbb{A}) - \nabla^2 \mathbb{A} = \mu_0 \mathbb{J}$

så vi väljer $\nabla \cdot \mathbb{A} = 0$
$-\nabla^2 \mathbb{A} = \mu_0 \mathbb{J}$ vektor Poisson (3st)

Lösning

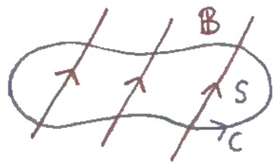
$\mathbb{A}(\infty)=0$

(Kom ihåg potentialuttrycket $V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho\, dV'}{R}$)

P.s.s $\mathbb{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbb{J}}{R}dV'$

dvs $A_x=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{J_x}{R}dV'$, $A_y=\dots$, $A_z=\dots$

Magnetiskt flöde 6.3



Definition

$\Phi=\int_S \mathbb{B}\cdot d\mathbb{S}=\int_S \nabla\times\mathbb{A}\, d\mathbb{S}=\oint_C \mathbb{A}\cdot d\mathbb{l}$

↑ magnetiskt flöde

$(C=\partial S)$

Biot-Savarts lag 6.4

$\mathbb{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbb{J}(\mathbb{R}')}{R}dV'$

$\mathbb{B}=\nabla\times\mathbb{A}$ $\Longrightarrow$ $\mathbb{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla\times\frac{\mathbb{J}(\mathbb{R}')}{R}dV'=(*)$

{ Använd $\nabla\times f\,\mathbb{G}=f\,\nabla\times\mathbb{G}+\nabla f\times\mathbb{G}$
I vårt fall, $f=1/R$, $\mathbb{G}=\mathbb{J}$ }

$(*)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\Big(\underbrace{\frac{1}{R}\nabla\times\mathbb{J}(\mathbb{R}')}_{}+\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times\mathbb{J}(\mathbb{R}')\Big)dV'=\left\{\text{Använd } \nabla(1/R)=\frac{-\hat{\mathbb{R}}}{R^2}\right\}=$

($=0$ ty $\mathbb{J}=0$ i fältpkt $B(x',y',z')$ $\mathbb{J}(x,y,z)$)

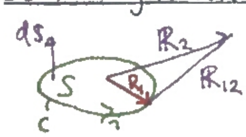
$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbb{J}(\mathbb{R}')\times\hat{\mathbb{R}}}{R^2}dV'=\mathbb{B}$

Jämför elektrostatik: $\mathbb{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\mathbb{R}')\,\hat{\mathbb{R}}}{R^2}dV'$

P.s.s för ytström och linjeström
Fältbidrag från ett litet strömelement $d\mathbb{l}$
$dB=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\cdot\frac{d\mathbb{l}'\times\mathbb{R}}{R^2}$

(exempel 6.4, 6.5, 6.6 hemma)

Den magnetiska dipolen 6.5



$\mathbb{A}(\mathbb{R}_2)=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint_C\frac{d\mathbb{l}_1}{R_{12}}=\left\{\oint_C\frac{d\mathbb{l}_1}{R_{12}}=\int_S d\mathbb{S}\times\nabla_1\left(\frac{1}{R_{12}}\right)\right\}$ Variant på Stokes.

$$\mathbb{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_S d\mathbb{S} \times \nabla_1 \left(\frac{1}{R_{12}} \right) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_S d\mathbb{S} \times \frac{\mathbb{R}_{12}}{R_{12}{}^3} = \ldots =$$

$$\approx \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_S d\mathbb{S} \times \frac{\mathbb{R}_2}{R_2^3}$$

Definition

$$\mathbb{m} = i \int_S dS$$

dipolmoment