# Föreläsning 6/11-13

## Poissons och Laplace ekv. 4.2

$$\left.\begin{array}{l} \nabla\cdot\mathbb{D} = \rho \Rightarrow \nabla(\varepsilon\mathbb{E}) = \rho \\ \nabla\times\mathbb{E} = 0 \Rightarrow \mathbb{E} = -\nabla V \end{array}\right\} \Longrightarrow \nabla\cdot(\varepsilon\nabla V) = -\rho$$

Om $\varepsilon$ är konstant i rummet: $\nabla^2 V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$, Poissons ekv.

I områden utan laddning: $\nabla^2 V = 0$, Laplace ekv.

exempel 4.1 Plattkondensator
4.2 Sfärisk laddning

## Entydighetssatsen 4.3

Med givna randvillkor är lösningen unik.

## Bevis

Antag motsatsen, visa att motsatsen ej är sann.

Antag $\nabla^2 V_1 = \dfrac{\rho_1}{\varepsilon}$, $\nabla^2 V_2 = \dfrac{\rho_1}{\varepsilon}$

Bilda skillnaden $V_d = V_1 - V_2$

Då gäller $\nabla^2 V_d = 0$

Randvillkor: $V_d = 0$ på ledande ytor

$\dfrac{\partial V_d}{\partial n} = 0$ på isolerade ytor

Använd vektoridentitet: $\nabla(V_d \nabla V_d) = \underbrace{V_d \cdot \nabla^2 V_d}_{=0} + \nabla V_d \cdot \nabla V_d$

Integrera över volym:


$\oint_S V_d \nabla V_d \cdot a_n \, dS = \int_T |\nabla V_d|^2 \, dV$ där $S = S_0 + S_1 + \ldots + S_n$

$V_d = 0$ eller $\dfrac{\partial V_d}{\partial n} = 0 \Longrightarrow \nabla V_d \cdot a_n = 0$, gäller för $S_1 \ldots S_n$

För $S_0$: $R \to \infty$, $V_d \approx 1/R$, $\nabla V_d \approx 1/R^2$, $S_0 \approx R^2$

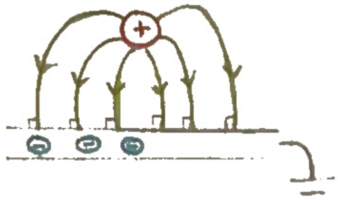
så $\oint_{S_0} V_d \nabla V_d \, dS \longrightarrow 0$ då $R \to \infty$

Så nu har vi $\int |\nabla V_d|^2 dV = 0$ men $|\nabla V_d| \geq 0$ överallt,

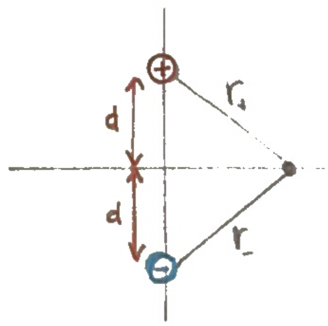
så måste $\nabla V_d = 0$, men $V_d = 0$

$\Longrightarrow V_d \equiv 0$ (ty $\nabla V_d = 0 \Rightarrow V_d \equiv$ konstant)

# Speglingsmetoden 4.4



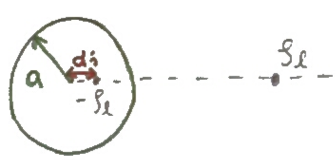
jordat ledande plan




$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_+} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_-} = 0,$$

ty $r_+ = r_-$

## Parallell linjeladdning utanför ledande cylinder

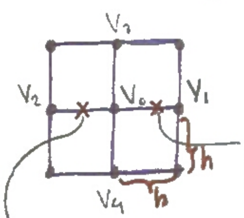



Vi har sett tidigare potential från två linjeladdningar: $V(r,\phi) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r^-}{r^+}\right)$

Måste gälla att $V_{cyl} = V(a,0) = V(a,\pi) = k$

$$\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a-d_i}{d-a}\right) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a+d_i}{d+a}\right) \Rightarrow \frac{a-d_i}{d-a} = \frac{a+d_i}{d+a} \Rightarrow d_i = \frac{a^2}{d}$$

## Diskretisering av $\nabla^2$ i rektangulära koordinater (ej i Cheng)




$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 = \frac{V_1 - V_0}{h}$$

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_2 \approx \frac{V_0 - V_2}{h}$$

$$\nabla^2 V = 0$$

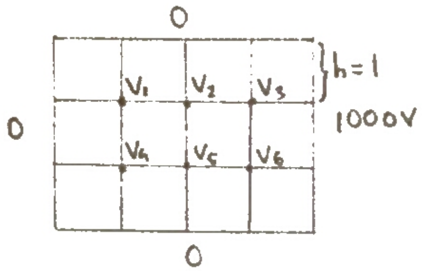
$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_2}{h} \approx \frac{V_1 + V_2 - 2V_0}{h^2}$$

$$\text{2-D: } (\nabla^2 V)_0 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 =$$

$$= \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2} \quad (= 0)$$

$$\Longrightarrow V_0 = \frac{1}{4}\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right)$$

exempel




Symmetri ger: $V_1 = V_4$
$V_2 = V_5$
$V_3 = V_6$

$$V_1 = \frac{1}{4}\left(V_2 + 0 + 0 + \underbrace{V_4}_{=V_1}\right)$$

$$V_2 = \frac{1}{4}\left(V_3 + V_1 + \underbrace{V_5}_{=V_2} + 0\right)$$

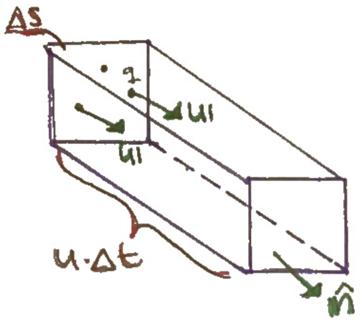
$$V_3 = \frac{1}{4}\left(V_2 + \underbrace{V_6}_{=V_3} + 0 + 1000\right)$$

$$4\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} V_1 &= 47{,}6\ \mathrm{V} \\ V_2 &= 142{,}9\ \mathrm{V} \\ V_3 &= 381{,}0\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

# Föreläsning 6/11-13

## Elektrisk ström 5.1, 5.2




Låt volymen vara makroskopiskt liten.

Räkna laddningar som passerar gränsytan per tidsenhet.

N = laddningstäthet [1/m³]

$$\Delta Q = Nq(\mathbf{u}\cdot\hat{n})\Delta t \; \Delta s$$

$$\Delta i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Nq(\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{S})$$

Fler laddningsbärare: $\Delta i = \sum_j (N_j q_j \mathbf{u}_j \Delta\mathbf{S})$

Definiera strömtäthet: $\mathbf{J} = \sum_j N_j q_j \mathbf{u}_j$ [A/m²]

så $\Delta i = \mathbf{J}\cdot\Delta\mathbf{S}$, $di = \mathbf{J}\,d\mathbf{S}$

## Kontinuitetsekvationen 5.4


Laddning kan ej förstöras

$$\Delta Q = -i\Delta t = -\Delta t \oint_S \mathbf{J}\,d\mathbf{S}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial Q}{\partial t} = \int \mathbf{J}\,d\mathbf{S}$$ Kontinuitetsekv. på integralform

Alternativ form: $\int_S \mathbf{J}\,d\mathbf{S} = \int_{V'} \nabla\cdot\mathbf{J}\,dV' = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{V'} \rho\,dV'$

$$\int_{V_{godtycklig}} \underbrace{\left(\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right)} dV' = 0$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$ Kontinuitetsekv. på punktform

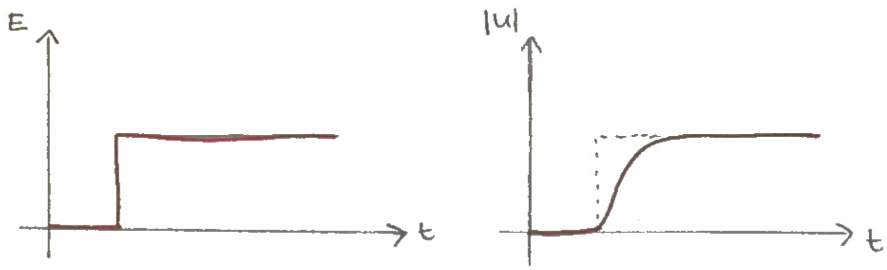
$\nabla\cdot\mathbf{J} = 0$ statik, likström

## Ohms lag för metaller 5.2

Elektronernas rörelse beskrivs av

$$-e\mathbb{E} = m_e \frac{du}{dt} + m_e \nu u$$

**Lösningen**




lösning: $u(t) = \frac{-e\mathbb{E}}{m_e \nu}\left[1 - \exp(-\nu t)\right]$

**Stationärtillstånd:**

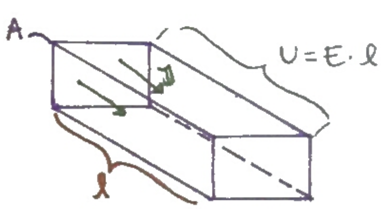
$$u = \frac{-e\mathbb{E}}{m_e \nu} = -\mu_e \cdot \mathbb{E}$$

mobilitet

Sätt in i def. av ström: $\mathbb{J} = -eNu = \frac{Ne^2}{m_e \nu}\mathbb{E} = \sigma\mathbb{E} = eN\mu_e\mathbb{E}$ ohms lag

**Ohms lag:** $\mathbb{J} = \sigma\mathbb{E}$

Som i kretsen




$$I = J \cdot \Delta S = \sigma E \cdot \Delta S \cdot \frac{l}{l} = \frac{\sigma \Delta S}{l} \underbrace{E \cdot l}_{U}$$

$$I = \overbrace{\frac{\sigma \Delta S}{l}}^{1/R} U \quad , \quad R = \frac{l}{\sigma \Delta S}$$

## Relaxationstid 5.4

Vad händer med laddning på en metallplatta?
Börja med kont. ekv.:

$$\nabla \cdot \mathbb{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Antag konstant $\sigma$:

$$\sigma \nabla \cdot \mathbb{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \sigma \frac{\rho}{\varepsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\overbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon}}^{1/\tau} t\right) \quad , \quad \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \text{ (relaxationstid)}$$

kap 5.3
– EMK & batterier

kap 5.6
– Randvillkor hos $\mathbb{J}$