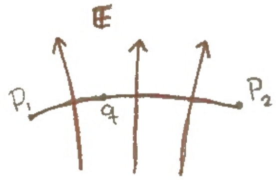
# Föreläsning 30/10-13




$$W_{mek} = q\int_{P_2}^{P_1} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{l} = q\left[V(P_2)-V(P_1)\right]$$

Generalisera och lös ut: $V(R) = \int_R^{\overset{\text{startpunkt}}{R_{ref}}} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{l} + \underbrace{V(R_{ref})}_{\text{ofta}=0}$

Beräkna potential från punktladdning,
sätt först $V(R_{ref}) = V(\infty) = 0$
Beräkna $V(R) = \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbb{R}}}{r^2}\cdot\hat{\mathbb{R}}\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R}$

Generalisera:

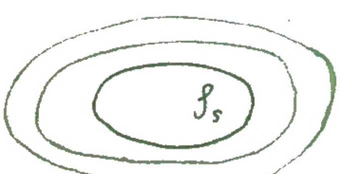

Kom ihåg:
$\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}'$
$\mathbb{R}_2 = \mathbb{R}$

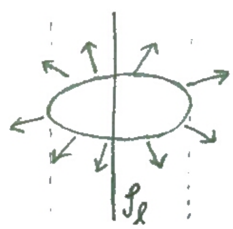
$$V(\mathbb{R}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{R_{12}}$$

Superposition för disktreta laddningar: $V(\mathbb{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{|\mathbb{R}-\mathbb{R}'_k|}$

För kontinuerliga laddningar: $V(\mathbb{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dQ}{R} = \{\text{volym}\} =$
$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(R)}{R}\,dV'$, yta $dQ = \rho_s\,dS$, linje $dQ = \rho_l\,dl$

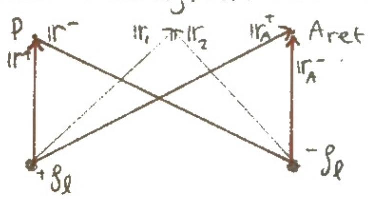
Studera **exempel 3.9**:




fält riktat i radiell led
cylindrisk symmetri
ekipotentialytor

Potentialen från två "långa" parallella linjeladdningar med laddningstäthet $\pm\rho_l$




E-fältet från trådarna:
$$\mathbb{E} = \mathbb{E}^+ + \mathbb{E}^- = \frac{\rho_l\hat{\mathbb{r}}_1}{2\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{\rho_l\hat{\mathbb{r}}_2}{2\pi\varepsilon_0 r_2}$$

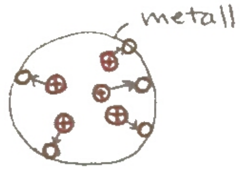
Potentialen fås som:
$$V(P)-V(A) = \int_P^A \mathbb{E}\cdot d\mathbb{l} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\int_P^A\frac{\hat{\mathbb{r}}_1}{r_1}\cdot d\mathbb{l} - \int_P^A\frac{\hat{\mathbb{r}}_2}{r_2}\cdot d\mathbb{l}\right] =$$

$$= \{ \hat{r}_2 \cdot d\mathbb{l} = dr_2 \,,\ \hat{r}_1 \cdot d\mathbb{l} = dr_1 \} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\int_{r^+}^{r_A^+} \frac{dr_1}{r_1} - \int_{r^-}^{r_A^-} \frac{dr_2}{r_2}\right] =$$

$$= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_A^+ r^-}{r^+ r_A^-}\right)$$ , Låt $A_{ref}$ ligga i $\infty \Rightarrow r_A^+ \approx r_A^- \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow V(P) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r^-}{r^+}\right)$$

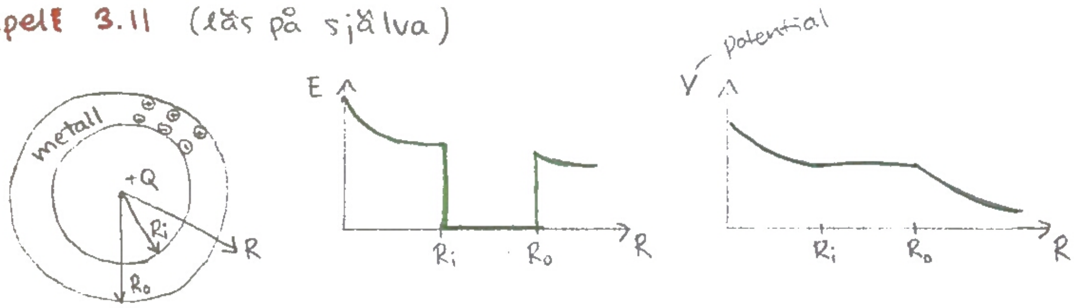
## Metaller i statiskt elektriskt fält, kap 3.6




Laddningar som läggs på en metall repellerar varandra och samlas på ytan.

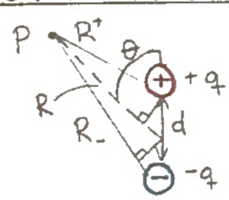
I ledaren: $\rho = 0$, $E = 0$

exempel 3.11 (läs på själva)




# Föreläsning 30/10-13

## Den dielektriska dipolen 3.3.1, 3.5.1




Summiera potentialbidrag: $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right)$ (☆)

Antag $d << R$

$$(*) \begin{cases} 1/R_+ \approx \left(R - \frac{d}{2}\cos\theta\right)^{-1} \approx \{\text{Taylor}\} \approx \frac{1}{R}\left(1 + \frac{d}{2R}\cos\theta\right) \\ 1/R_- \approx \left(R + \frac{d}{2}\cos\theta\right)^{-1} \approx \text{— " —} \approx \frac{1}{R}\left(1 - \frac{d}{2R}\cos\theta\right) \end{cases}$$

$$(*) \text{ och } (☆) \Longrightarrow V = \frac{q\,d\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \{ \mathbb{P} = q \cdot d\mathbb{l} \} = \frac{\mathbb{P} \cdot \hat{\mathbb{R}}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$\mathbb{P}$ är dipolmoment, beror av q = laddning och dl = avstånd mellan laddningarna.

E-fält: $\mathbb{E} = -\nabla V = -\hat{\mathbb{R}}\frac{\partial V}{\partial R} - \hat{\theta}\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\hat{\mathbb{R}}\,2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta\right)$

## Dielektriskt material i elektrostatiskt fält 3.7

I närvaro av E-fält polariseras atomer/molekyler i ett material, dipoler bildas, molekyler roteras.


Definiera ett polarisationsfält genom att summera dipolmoment i en volym.

$$\mathbb{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \left( \sum_{k=1}^{n\Delta V} p_k \right) / \Delta V \quad [C/m^2]$$

## Potentialbidrag från materialet

Dipolmoment från $dV'$: $dp = \mathbb{P} \cdot dV'$

Potentialbidrag: $dV = \frac{\mathbb{P} \cdot \hat{\mathbb{R}}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} dV'$

Integrera en volym: $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\mathbb{P} \cdot \hat{\mathbb{R}}}{R^2} dV' = \left\{ \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\hat{\mathbb{R}}}{R^2} \right\} =$

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \mathbb{P} \cdot \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) dV' = \left\{ \nabla'(f\mathbb{A}) = f\nabla'\mathbb{A} + \mathbb{A} \cdot \nabla' f \text{, med } \mathbb{A} = \mathbb{P} \text{ och } f = 1/R \right\} =$

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \int_{V'} \nabla'\left(\frac{\mathbb{P}}{R}\right) dV' - \int_{V'} \frac{\nabla'\mathbb{P}}{R} dV' \right] = \{\text{divergensteorem}\} =$

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \underbrace{\frac{\mathbb{P} \cdot \hat{n}}{R}}_{\rho_s} dS' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \underbrace{\frac{-\nabla'\mathbb{P}}{R}}_{\rho} dV'$

Identifiera: $\rho_{ps} = \mathbb{P} \cdot \hat{n}$ Polarisationsytladdningstäthet

$\rho_p = -\nabla\mathbb{P}$ Polarisationsladdningstäthet

Notera: $Q_p = \oint_S \rho_{ps}\, ds + \int_V \rho_p\, dv = 0$

↑ polarisationsladdning

## Förskjutningsfält $\mathbb{D}$ 3.8

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_p) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \nabla \cdot \mathbb{P}) \Rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbb{E} + \mathbb{P}) = \rho$$

Definiera: $\mathbb{D} = \varepsilon_0 \mathbb{E} + \mathbb{P}$, då blir postulatet $\nabla \mathbb{D} = \rho$

eller på integralform: $\oint_S \mathbb{D} \cdot d\mathbb{S} = Q$

↑ fria inneslutna laddningen

## Samband mellan $\mathbb{P}$ och $\mathbb{E}$

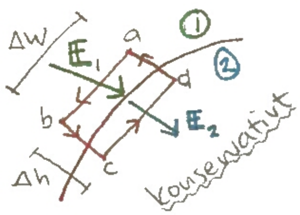
$\mathbb{P}$ beror av $\mathbb{E}$, icke-linjär tensorrelation i allmänna fallet.
Många material har ett proportionellt samband mellan $\mathbb{E}$ och $\mathbb{P}$.

$$\mathbb{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbb{E}$$

↳ elektrisk suceptibilitet

Då fås $\mathbb{D} = \varepsilon_0 \underbrace{(1 + \chi_e)}_{=\varepsilon_r\text{, relativa permabiliteten}} \mathbb{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbb{E}$

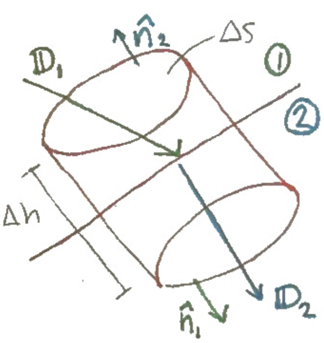
## Randvillkor för elektrostatiska fält 3.9




$$0 = \int_{abcd} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{l} = \mathbb{E}_1 \cdot \Delta w + \mathbb{E}_2 \cdot (-\Delta w) =$$

$$= E_{1t} \cdot \Delta W - E_{2t} \Delta W = 0 \quad , \quad E_{1t} = E_{2t}$$

## Normalkomponenten




$$\oint_S \mathbb{D} \cdot d\mathbb{S} = (\mathbb{D}_1 \cdot \hat{n}_2 + \mathbb{D}_2 \cdot \hat{n}_1) \Delta S =$$

$$= \hat{n}_2 \cdot (\mathbb{D}_1 - \mathbb{D}_2) \Delta S = \rho_s \Delta S$$

så $(\mathbb{D}_1 - \mathbb{D}_2) \cdot \hat{n}_2 = \rho_s$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$