

Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2.

EEF031 2010-04-06 kl. 14.00-18.00

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Xuezhi Zeng, 076-274 31 70, 772 1723
Lösningar:	anslås på kursens hemsida
Resultatet:	anslås på kursens hemsida
Granskning:	Sker på plats och tid enligt resultatlistan
Kom ihåg	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

OBS!

Resultat från årets dugga får tillgodoräknas på elektrostatik- (tal 1) respektive magnetostatiktalet (tal 2). Bästa resultatet från duggan eller tentan räknas. Poäng på teoridelen respektive problemlösningsdelen räknas separat. Bonuspoäng från årets omgång av webb-frågorna får också tillgodoräknas till tentaresultatet.

Svaren på förståelsedelen skall ges på tesen som skall lämnas in.

Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras.

De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Ja, Vet ej och Nej.

Riktigt svar ger +0,2 poäng oriktigt svar ger -0,2p. Vet ej är neutralt och ger noll poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1 poäng även med ett vet ej svar.

Anonym kod:

(Var vänlig ange den email-adress som används för inlämningsuppgifterna bland den dolda personinformationen på omslaget)

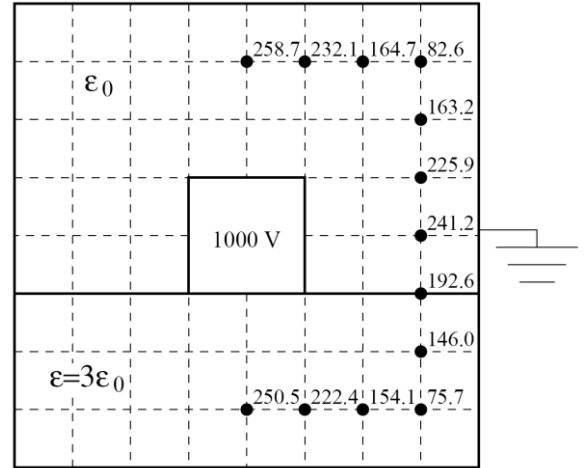
1 (Elektrostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

Figuren visar tvärsnittet av ett långt metallrör med kvadratisk tvärsnitt med längden 8 cm. I mitten av röret vilar en kvadratisk metallstång med sidan 2 cm på ett dielektrikum med den relativa dielektricitetskonstanten $\epsilon_r=3$. Resten av volymen mellan de yttre och inre ledarna är fylld med luft. Man lägger en spänning på 1000 V mellan ledarna och löser sedan Laplaces ekvation i noderna i det kvadratiske rutnätet i figuren. I figuren visas några av de beräknade potentialvärdena.

a) Använd de beräknade potentialvärdena från figuren för att beräkna laddningen på den inre ledaren. Glöm ej att ta hänsyn till de två områdena med olika permittivitet. (6 poäng)

b) Beräkna kapacitansen per längdenhet. (2 poäng)



Förståelsedel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger på exakt ett av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger på exakt två av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bl.a. på Gauss lag. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bl.a. på att B-fältet är källfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bl.a. på att källan till D-fältet är den fria laddningstätheten. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bl.a. på att rotationen av H-fältet är den fria strömstätheten. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Det elektrostatiska fältet är källfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Det elektrostatiska fältet är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Det elektrostatiska fältet är konservativt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Det elektrostatiska fältet i en perfekt ledare är alltid konstant lika med noll. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Laddning på en perfekt ledare samlas alltid i ledarens medelpunkt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Vakuum har den relativa permittiviteten $\epsilon_r=1,0$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Källan till förskjutningsfältet D är de bundna polarisationsladdningarna. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Sambandet $D=\epsilon E$ mellan E- och D-fältet kan härledas utifrån postulatet för elektrostatiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Polarisationsfältet P är fältet från bundna laddningar i ett material. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Om permeabiliteten för ett dielektriskt material är en konstant skalär oberoende av fältstyrkan betyder det att materialet är homogent, isotropt och linjärt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Om permeabiliteten för ett dielektriskt material är beroende av fältstyrkan betyder det att materialet är anisotropt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| I härledningen av entydighetssatsen för Poyntings ekvation antar man att först att det finns flera lösningar som uppfyller lösningen men att de kan ha olika randvillkor. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

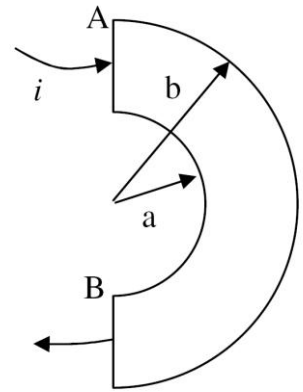
- | | ja | ? | nej |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| P-fältet spelar ungefär samma roll i elektrostatiken som H-fältet i magnetostatiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| D-fältet spelar ungefär samma roll i elektrostatiken som B-fältet i magnetostatiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Potentialen V spelar ungefär samma roll i elektrostatiken som A-fältet i magnetostatiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Gauss lag i elektrostatiken motsvaras ungefär av Amperes lag i magnetostatiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Randvillkoret för det elektrostatiska fältets tangentialkomponent härleds från att E-fältet är konservativt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Randvillkoret för det elektrostatiska fältets normalkomponent härleds från Gauss lag. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

2 (Magnetostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

Ett tunt bleck med utseende enligt figuren har tjockleken $d = 0,1 \text{ mm}$ och ledningsförmågan $\sigma = 10^5 \text{ S/m}$. Vid A respektive B är elektroder anslutna.

- a) Ställ upp och lös Laplace ekvation för detta bleck. Antag ett spänningsfall U mellan elektroderna och att elektroderna A och B är gjorda av perfekt ledande metall. (3 poäng)
- b) Beräkna strömmen i som flyter genom blecket. (3 poäng)
- c) Beräkna resistansen mellan elektrod A och B. (1 poäng)
- d) Är den beräknade resistansen ett exakt värde eller en övre eller undre uppskattning av den verkliga resistansen? Motivation krävs. (1 poäng)



Förståelsedel (4 poäng)

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger på exakt ett av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger på exakt två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger endast på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger endast på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger endast på att källan till D-fältet är den fria laddningstätheten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger endast på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Kontinuitetsekvationen för stationär ström följer om man tar divergensen av Amperes lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ även om vi har tidsvarierande laddningsfördelningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Från $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ kan Kirchoffs strömlag härledas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Från $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ kan Kirchoffs spänningslag härledas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ är en konsekvens av att laddningen är bevarad.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Konduktiviteten σ har enheten S/m.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Divergensen av den magnetiska vektorpotentialen är given utifrån Maxwells ekvationer.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen från en strömförande tråd följer längs med tråden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det magnetiska dipolmomentet ingår i härledningen av uttrycket för magnetiseringsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska fältet från en magnetisk dipol avtar som $1/R^3$ på stort avstånd från dipolen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Magnetiska dipoler användas för att modellera ett materials konduktivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En magnetisk dipol har en fältbild som påminner om det elektriska fältet från en punktladdning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

h) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Randvillkoret för B-fältets normalkomponent härleds från att B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältets normalkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältets tangentialkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets tangentialkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets normalkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En laddad partikel som rör sig i ett i tiden konstant magnetfält ökar inte sin hastighet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) En linjärt polariserad, tidsharmonisk plan våg utbreder sig i vakuum i den positiva z-riktningen och har det elektriska fältet $\mathbf{E}(z, t) = E_0 \sin(kz - \omega t) \hat{\mathbf{x}}$. Bestäm motsvarande B-fält, $\mathbf{B}(z, t)$ samt den tillhörande Poyntingvektorn $\mathbf{P}(z, t)$. Hur mycket energi passerar ett mot utbredningsriktningen vinkelrätt tvärsnitt med arean A under tiden Δt ? Antag att Δt är mycket längre än periodtiden hos fältet.

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Om vi ändrar $\hat{\mathbf{x}}$ i uttrycket för E-fältet ovan till $\hat{\mathbf{y}}$ så beskriver uttrycket fortfarande en plan våg.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om vi ändrar $\hat{\mathbf{x}}$ i uttrycket för E-fältet ovan till $\hat{\mathbf{z}}$ så beskriver uttrycket fortfarande en plan våg.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger endast på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger endast på Faradays lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger endast på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger endast på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Vid beräkning med Fresnels ekvationer måste man ta hänsyn till vågens polarisering.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Transmissionskoefficienten för effekt är beloppet i kvadrat av transmissionskoefficienten för fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Reflektionskoefficienten för effekt är beloppet i kvadrat av reflektionskoefficienten för fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Brewstervinkeln definieras både för vågor med polarisering parallellt och vinkelrätt mot infallsplanet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Funktionen hos en optisk fiber kan förklaras av att reflektion i fibern sker vid Brewstervinkeln.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vinkeln vid vilken totalreflektion inträffar härleds från Fresnells ekvationer.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För en god ledare är $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en god ledare är $\alpha \approx \beta$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För en metall är vågimpedansen $Z \approx \sqrt{j\omega\mu/\sigma}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För höga frekvenser är inträngningsdjupet mindre än för låga frekvenser.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Normalt gäller för dielektriska material att $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I vakuum är $\alpha = \beta$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Poyntingsteorem uttrycker energikonservering.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn kan vara tidsberoende.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn kan definieras med komplexa B- och E-fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn har enheten W/m^2 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn kan bara definieras för monokromatiska fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn kan definieras som tidsmedelvärde eller som momentanvärde.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) Man vill konstruera ett antensystem som skall kunna sända till den ena eller den andra av två stationära positioner. I ett första försök att åstadkomma ett sådant system använder man sig av två Hertzdipoler. Fjärrfältet från en Hertzdipolantenn kan skrivas:

$$\bar{\mathbf{E}}_{rad} = \hat{\theta} Z_o \frac{j\omega l \bar{I}_o \sin \theta}{4\pi cr} e^{-j\beta r}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{rad} = \hat{\varphi} \frac{j\omega l \bar{I}_o \sin \theta}{4\pi cr} e^{-j\beta r}$$

Visa hur man med två hjälp av två sådana antenner genom att kontrollera faserna hos de drivande strömmarna kan uppnå detta resultat. Hur bra är det föreslagna systemet? Hur skulle man kunna göra detta bättre.

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
Uttrycken för E- och H-fälten ovan gäller för godtyckligt tidsberoende.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Uttrycken för E- och H-fälten ovan gäller godtyckligt nära antennen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bl.a. på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bl.a. på Faradays lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bl.a. på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bl.a. på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
En kvartsvågsdipol har ett isotropt strålningsdiagram, dvs den strålar lika mycket effekt i alla riktningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En bra sändarantenn bör ha så liten strålningsresistans som möjligt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antennen i en GPS mottagare bör ha så hög direktivitet som möjligt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En parabolantenn som används för att se satellit-TV är ett exempel på en antenn med mycket hög direktivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan använda två halvvågsdipoler monterade bredvid varandra för att öka direktiviteten hos sin antennanordning jämfört med om man bara använder en enda halvvågsdipol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vi behöver retarderade potentialer för att beskriva de elektriska och magnetiska fälten från en sändarantenn.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
En Hertzdipol är en våglängd lång. §	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömmen i antennen <i>varierar</i> längs en Hertzdipol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strålningsresistansen hos en halvvågsantenn är <i>beroende</i> av strålningseffekten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strålningsresistansen ökar med längden i kubik för en Hertzdipol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En kvartsvågsantenn är ekvivalent med en halvvågsantenn över ett ledande plan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömmen antas vara noll i änden av en kvartsvågsantenn.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
Fresnels ekvationer härleds från Snells brytningslag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I Snells lag måste man ta hänsyn till vågens polarisering.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Snells lag kan härledas om man antar att ljuset alltid går snabbaste vägen mellan två punkter.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En optisk fiber bygger på totalreflektion.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion sker vid Brewstervinkeln.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion är möjlig då ljusstrålen försöker gå från ett optiskt tunnare till ett optiskt tätare material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Lösningar till tenta 2010-04-06

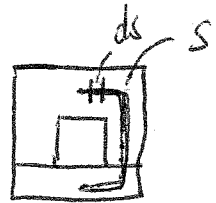
1

Lägg en Gaussyta mellan röret och gridpunkterna med kända potentialer.

Pga symmetrin räcker det att göra beräkningarna på halva området, den halvan där potentialvärderna är givna.

Discretisera sedan Gauss lag och med E-fältet som numeriskt approximerad med hjälp av givna potentialvärden U_i , $E = -\nabla U \approx \frac{U_i - U_0}{\Delta}$

Vi beräknar linjeladdnings tätheten



$$\frac{Q_{e, innesluten}}{L} = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \approx \sum_S \epsilon_i E_i ds_i =$$

$$= \epsilon_0 \left[\frac{1}{2} 258,7 + 232,1 + 164,7 + 82,6 + 163,2 + 225,9 + 241,2 + \frac{1}{2} \cdot 192,6 \right] + 3\epsilon_0 \left[\frac{1}{2} \cdot 192,6 + 146,0 + 75,7 + 154,1 + 222,4 + \frac{1}{2} 250,5 \right] \Rightarrow$$

$$Q_{e, innesluten} = 6,72 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}$$

Kapacitans per längdenhet

$$C_e = \frac{Q_e}{\Delta V} = \frac{6,72 \cdot 10^{-8}}{1000} \text{ F/m} = 67,2 \text{ pF/m}$$

2. a) På elektroderna är potentialen konstant.
Dvs den varierar inte med radren

I blekhet kan vi därför anta $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$ $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$

Laplace ekvation blir då

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(\phi) = a\phi + b$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Med randvillkor} \\ \phi_1 = -\frac{\pi}{2} \quad V(\phi_1) = -\frac{U}{2} \\ \phi_2 = \frac{\pi}{2} \quad V(\phi_2) = \frac{U}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow V(\phi) = \frac{U}{\pi} \phi$$

b) Strömstätheten $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla V$
$$= -\hat{\phi} \sigma \frac{\partial V}{r \partial \phi} = -\hat{\phi} \frac{\sigma U}{\pi r}$$

Ström: Integrera \mathbf{J} över tvärsnittet

$$I = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \left\{ ds = -\hat{\phi} ddr \right\} = \frac{\sigma U d}{\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\sigma U d}{\pi} \ln \frac{b}{a}$$

c) Resistansen $R = \frac{U}{I} = \frac{\pi}{\sigma d \ln(b/a)}$

d) Lösningen är exakt eftersom vi löst Laplace ekvation exakt
och därmed även har exakt strömfördelning

3

Fältet runt en ensam ledare: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Flödestätheten från de båda ledarna blir då, om vi räknar r från den högra ledaren som:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(r+0,005)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+0,005} \right)$$

Beräknar flödet genom slingan, tecknar där för $d\phi$:

$$d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+0,005} \right) \cdot 0,1 \cdot dr \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\mu_0 I \cdot 0,1}{2\pi} \int_{0,05}^{0,1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+0,005} \right) dr = \frac{\mu_0 I \cdot 0,1}{2\pi} \left[\ln r - \ln(r+0,005) \right]_{0,05}^{0,1} \\ &= \frac{\mu_0 I \cdot 0,1}{2\pi} \left[\ln \frac{0,1}{0,1+0,005} - \ln \frac{0,05}{0,05+0,005} \right] = 930,4 \cdot 10^{-12} I \end{aligned}$$

För att beräkna toppvärdet på strömmen, \hat{I} , använder vi sambandet mellan effekt, spänning och ström:

$$P = \frac{\hat{U} \hat{I}}{2} \Rightarrow \hat{I} = \frac{2P}{\hat{U}} = \frac{2 \cdot 2500}{230\sqrt{2}} = 15,37 \text{ A}$$

Om vi förutsätter 50Hz kan vi teckna strömmen som:

$$I = 15,37 \cos(2\pi \cdot 50 t)$$

$$\text{Inducerad spänning} \cdot U = - \frac{d\phi}{dt} = -930,4 \cdot 10^{-12} \frac{dI}{dt} =$$

$$= 930,4 \cdot 10^{-12} \cdot 15,37 \cdot 2\pi \cdot 50 \sin(2\pi \cdot 50 t)$$

$$\approx 4,5 \sin(2\pi \cdot 50 t) \mu\text{V}$$

$$4 \quad \mathbb{E}(z,t) = E_0 \sin(kz - \omega t) \hat{x}$$

H-fältet fås nu från Faradays lag

$$-\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{H}(z,t) = \nabla \times \mathbb{E}(z,t) = \hat{y} E_0 \frac{\partial}{\partial z} \sin(kz - \omega t) = \hat{y} k E_0 \cos(kz - \omega t)$$

Detta ger $\mathbb{H}(z,t) = \hat{y} \frac{k E_0}{\mu_0 \omega} \sin(kz - \omega t)$

$$\mathbb{B}(z,t) = \hat{y} \frac{k E_0}{\omega} \sin(kz - \omega t)$$

Poyntingvektorn fås nu som

$$\mathbb{S}(z,t) = \mathbb{E}(z,t) \times \mathbb{H}(z,t) = \hat{x} \times \hat{y} \frac{E_0^2 k}{\mu_0 \omega} \sin^2(kz - \omega t)$$

$$\left\{ k = \frac{\omega}{c}, c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \Rightarrow \frac{k}{\mu_0 \omega} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \right\} = \hat{z} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \sin^2(kz - \omega t) =$$

$$= \hat{z} \frac{E_0^2}{Z_0} \sin^2(kz - \omega t)$$

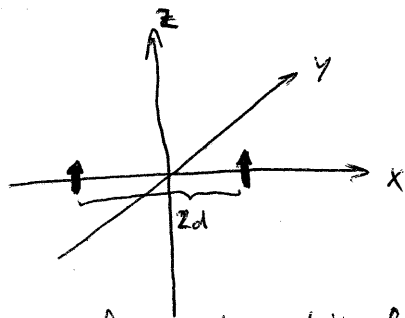
Tidsmedelvärdet av $\sin^2(\omega t - kx)$ är $\frac{1}{2}$

Då fås energin:

$$\text{Energin} = \frac{E_0^2}{Z_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot A \cdot \Delta t$$

5

Placera dipolerna enligt följande (med avståndet $2d$) på x-axeln

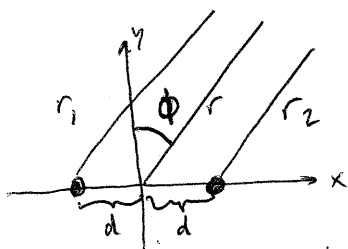


E-fältet från en dipol ges av:

$$\vec{E} = \hat{\theta} Z_0 \frac{j\omega L \bar{I}_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-j\beta r}$$

Vi begränsar analysen till x-y-planet så $\theta = 90^\circ$

Avstånden från antenn till fältpunkt:



Vi får för fasvariationerna $r_1 \approx r + d \sin\phi$

$$r_2 \approx r - d \sin\phi$$

För amplitudvariationerna $r_1 \approx r_2 \approx r$

Vi låter också dipolerna drivas med strömmar vars fasförskjutning är χ .

$$\bar{I}_{01} = I_0 e^{j\frac{\chi}{2}}$$

$$\bar{I}_{02} = I_0 e^{-j\frac{\chi}{2}}$$

Det totala fältet kan vi nu summera från som:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = Z_0 \frac{j\omega L I_0}{4\pi\epsilon_0 r} \left(e^{-j\beta(r+d\sin\phi)} e^{j\frac{\chi}{2}} + e^{-j\beta(r-d\sin\phi)} e^{-j\frac{\chi}{2}} \right) \\ &= Z_0 \frac{j\omega L I_0}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-j\beta r} \left(e^{-j\beta d \sin\phi + j\frac{\chi}{2}} + e^{j\beta d \sin\phi - j\frac{\chi}{2}} \right) \\ &= Z_0 \frac{j\omega L I_0}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-j\beta r} 2 \cos(\beta d \sin\phi - \frac{\chi}{2}) \end{aligned}$$

För att få riktverkan krävs att $\cos(\beta d \sin\phi - \frac{\chi}{2}) = 1$ i önskad riktning.

$$\text{dvs } \beta d \sin\phi = \frac{\chi}{2} \Rightarrow \phi = \arcsin \frac{\chi}{\beta d 2}$$

Här ser vi att givet avståndet, d , mellan antennerna och propagationskonstanten β så kan riktnings ϕ som ger maximal fältstyrka bestämmas med χ

Nackdelen med detta system är att om vi vill ha ett maximum i en viss riktning ϕ så fås även ett i riktningen $180^\circ - \phi$ (pga arcsin)

Genom att använda fler antenner kan bättre kontroll på fältbilderna erhållas.