

Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2.

EEF031 2009-08-28 kl. 8.30-12.30

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Andreas Fhager, 076-125 7012, 772 1723
Lösningar:	anslås på kursens hemsida
Resultatet:	anslås på kursens hemsida
Granskning:	Sker på plats och tid enligt resultatlistan
Kom ihåg	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

OBS!

Resultat från duggan och bonuspoäng får tillgodoräknas.

Var vänlig ange på försättsbladet vilken del ni hoppar och som ni redan är godkända på från duggan.

Svaren på förståelsedelen skall ges på tesen som skall lämnas in.

Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras.

De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Ja, Vet ej och Nej. Riktigt svar ger +0.2poäng oriktigt svar ger -0.2p. Vet ej är neutralt och ger noll poäng.

Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1poäng även med ett vet ej svar.

Personligt id-nummer:

(Var vänlig ange den email adress som används för inlämningsuppgifterna bland den dolda informationen)

1 (Elektrostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) Fyra små likadana metallkulor ligger symmetriskt i ett plan så att de utgör hörnen i en kvadrat. De befinner sig på ett avstånd från varandra som är stort i jämförelse med kulornas radier. Centralt belägen i kvadraten befinner sig en lika stor metallkula. Den centrala kulan har laddningen $4Q$ och de fyra övriga kulorna har vardera laddningen Q . Hur mycket arbete utträttas för att föra samman kulorna från sina ursprungslägen på mycket stort avstånd från varandra?

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
I grunden bygger fysiken i uppgift a) på exakt ett av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i uppgift a) på exakt två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i uppgift a) på Gauss lag och på att E-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i uppgift a) på Amperes lag och på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i uppgift a) på att källan till D-fältet är den fria laddningstätheten och på att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i uppgift a) på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten och på att B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Poissons ekvation kan härledas direkt från postulaten i elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speglingsmetoden tillsammans med entydighetssatsen gör att Poissons ekvation alltid kan lösas med hjälp av spegling.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
På stort avstånd från en elektrisk dipol avtar fältet som $1/R^2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
På stort avstånd från en elektrisk dipol avtar potentialen som $1/R$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Coulombs lag uttrycker hur stor kraften är mellan laddningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ohms lag är ett av postulaten i elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Eftersom rotationen av det elektrostatiska fältet är lika med noll kan en potential definieras.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Enda sättet att definiera den elektrostatiska potentialen är som $E = -\nabla V$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det elektriska fältet är en vektorstorhet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Lösning av Laplaces ekvation ger upphov till retarderade potentialer.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan inte definiera kapacitans för en enskild ledare.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Randvillkoret för E-fältets normalkomponent härleds utifrån att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

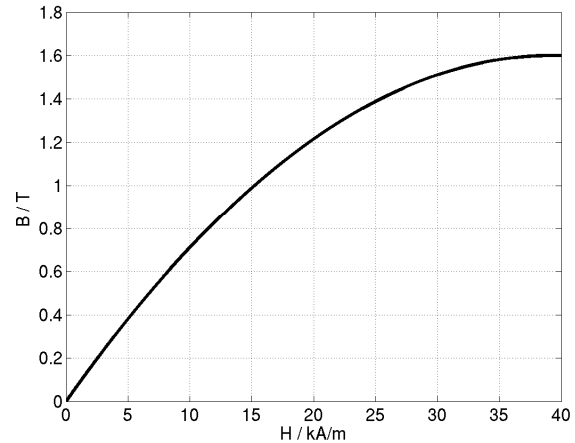
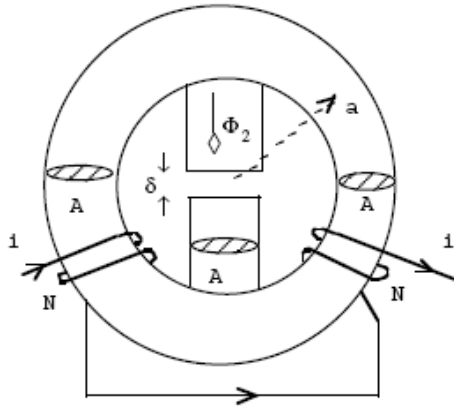
e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Kirchoffs spänningslag bygger på laddningskonservering.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antagande om approximativ strömfördelning ger en för hög resistans.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antagande om approximativ potentialfördelning ger en för låg resistans.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Källan till förskjutningsfältet D är de bundna laddningarna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Dielektriska egenskaper modelleras med elektriska dipoler.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Polarisationsfältet P är fältet från bundna laddningar i ett material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2 (Magnetostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) I en magnetisk krets enligt figuren vill man ha ett magnetiskt flöde $\Phi_2 = 0,6 \text{ mVs}$ genom luftgapet. Beräkna erforderlig ström, om de båda lindningarna är seriekopplade och samverkar i mittbenet. Luftgapslängden $d = 2 \text{ mm}$, medelradien, $a = 10 \text{ cm}$, tvärsnittsytan för flödet $A = 4 \text{ cm}^2$, antalet lindningsvarv $N = 3000$ varv. Materialet är icke-linjärt och dess magnetiseringskurva finns i nedanstående graf. Gör nödvändiga avläsningar ur figuren för att lösa talet.



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Magnetfältet i luftgapet i uppgift a) är mindre än i järnkärnan.

ja ? nej

H-fältet i luftgapet i uppgift a) är mindre än i järnkärnan.

Magnetostatiska energitätheten i luftgapet i uppgift a) är mindre än i järnkärnan.

I uppgift a) ovan använder man lämpligen Amperes lag.

Vänder man riktningen på en av lindningarna i a) ovan minskar flödet i luftgapet.

Parallellkopplar man lindningarna i a) ovan ökar flödet i luftgapet om strömmen är oförändrad.

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Man kan välja rotationen av den magnetiska vektorpotentialen fritt.

ja ? nej

Den magnetiska vektorpotentialen är entydigt bestämd utifrån Maxwells ekvationer.

Magnetiska dipolmoment används för att modellera magnetiska materialegenskaper.

Uttrycket för det magnetiska fältet från en magnetisk dipol gäller på mycket stort avstånd.

Den magnetiska vektorpotentialen från en magnetisk dipol avtar som $1/R^2$ på stort avstånd från dipolen.

Fältet från en magnetisk dipol avtar som $1/R^3$ på stort avstånd från dipolen.

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Lorentz kraften beror på B- och E-fältet.

ja ? nej

Den magnetiska vektorpotentialen från en strömförande tråd cirkulerar runt tråden.

$\text{Div}(\mathbf{J})=0$ är en konsekvens av att laddningstätheten är konstant i tiden, vilket är fallet i statiken.

Om vi använder metoden med virtuella förflyttningar för att beräkna den magnetiska kraften kan både flöde och ström hållas konstanta under den tänkta förflyttningen.

Om man håller strömmen konstant blir kraften större än om man håller flödet konstant eftersom batteriet i det fallet levererar energi till systemet för att hålla strömmen konstant.

Om vi håller det magnetiska flödet konstant ska vi ha ett minustecken framför derivatan av energin.

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Vid spegling av strömmar kan man i vissa fall spegla i isolerande ytor.

ja ? nej

Strömmarna i vanliga elektriska kablar är kollisionsdominerade.

Reluktans för en magnetfältskrets motsvarar ungefär resistans för en elektrisk krets.

H-fältets roll i magnetostatiken påminner om D-fältets roll i elektrostatiken.

I en elektrisk maskin vill man ha ferromagnetiskt material med en bred hystereskurva.

En bra permanentmagnet ska ha en smal hystereskurva.

4

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) En sinusformad våg har det komplexa \mathbf{E} -fältet

$$\bar{\mathbf{E}} = (12\hat{\mathbf{x}} + 9\hat{\mathbf{y}})e^{-j(3x-4y)}e^{-(3x-4y)} \text{ V/m} .$$

Åt vilket håll utbreder sig vågen? (2 poäng) Är det en plan våg? Motivera ditt svar. (2 poäng) Bestäm tillhörande komplexa \mathbf{H} -fält. (4 poäng)

Förståelsedel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
I grunden bygger fysiken i uppgiften ovan på exakt två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i uppgiften ovan på exakt fyra av Maxwells postulat	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i uppgiften ovan bland annat på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i uppgiften ovan bland annat på att \mathbf{E} -fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i uppgiften ovan bland annat på att rotationen av \mathbf{E} -fältet är lika med negativa tidsderivatan på \mathbf{H} -fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i uppgiften ovan bland annat på att rotationen av \mathbf{H} -fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Fresnels ekvationer härleds från Snells brytningslag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion sker vid Brewstervinkeln.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vid beräkning med Snells lag måste man ta hänsyn till vågens polarisering.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion är möjlig då vågen går från ett optiskt tätare till ett optiskt tunnare medium.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Funktionen hos en optisk fiber kan förklaras med fenomenet totalreflektion.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vinkeln vid vilken totalreflektion inträffar härleds från Fresnels ekvationer.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
\mathbf{E} -fältets tangentialkomponent på en perfekt ledande yta är alltid noll för tidsvarierande fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
\mathbf{E} -fältets normalkomponent på en perfekt ledande yta är alltid noll för tidsvarierande fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektromagnetismen är \mathbf{H} -fältets tangentialkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektromagnetismen är \mathbf{H} -fältets normalkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektromagnetismen är \mathbf{D} -fältets tangentialkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektromagnetismen är \mathbf{D} -fältets normalkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

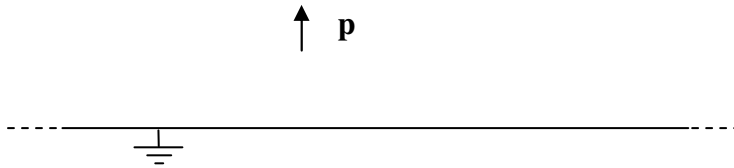
f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Elektromagnetisk fält som inte uppfyller vågekvationen kan existera.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då linjärpolariserad.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En linjärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen kan då bli noll.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då elliptiskt polariserad.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion ger upphov till evanescenta vågor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Evanescenta vågor uppfyller inte vågekvationen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

5

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) En Hertzdipolantenn med $\mathbf{p}(t) = \hat{\mathbf{z}}p_0 \cos \omega t$ befinner sig i luft i punkten $(0,0,a)$ i kartesiska koordinater. I (x,y) -planet ligger ett mycket stort, mycket gott ledande plan. Antag att planet befinner sig i strålningszonen till dipolen. Beräkna den inducerade ytströmtätheten som antennen orsakar i metallplanet.



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
I grunden bygger fysiken i uppgiften ovan på exakt två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i uppgiften ovan på exakt fyra av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i uppgiften ovan på Gauss lag och på att E-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i uppgiften ovan bara på Amperes lag och på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i uppgiften ovan bara på att rotationen av E-fältet är lika med negativa tidsderivatan på H-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i uppgiften ovan bara på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Den retarderade potentialen kommer från lösning av vågekvationen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den retarderade potentialen beskriver hur ljushastigheten avtar med avståndet från källan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vågekvationen för vektorpotentialen \mathbf{A} kan härledas från Maxwells ekvationer.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektromagnetismen väljer man oftast $\nabla \cdot \mathbf{A}$ till samma som i magnetostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man får välja $\nabla \cdot \mathbf{A}$ som man vill.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

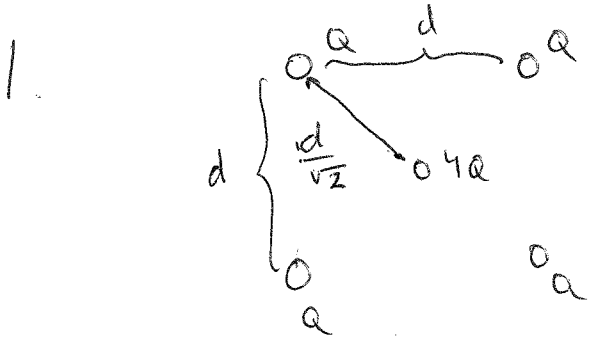
d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
En Hertzdipol är en halv våglängd lång.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömmen i antennen varierar längs en Hertzdipol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strålningsresistansen hos en halv vågsantenn är beroende av strålningseffekten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strålningsresistansen ökar med längden i kvadrat för en Hertzdipol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En kvartsvågsantenn är ekvivalent med en halv vågsantenn över ett ledande plan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömmen antas vara noll i änden av en kvartsvågs monopolantenn.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Vågimpedansen hos luft är $Z=377\Omega$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vågimpedansen för vatten är lägre än för luft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vågimpedansen för järn är lägre än för luft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vågimpedansen kan vara ett komplext tal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tidsderivata i Maxwells ekvationer övergår i $j\omega$ -metoden till multiplikation med $j\omega$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ett komplext uttryck på E-fältet kan ej innehålla ett tidsberoende.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Tenta 090828



Det elektriska arbetet som går åt för att föra samman ett antal laddningar skrivs som

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_k V_k \quad (N \text{ är antalet laddningar})$$

Potentialen från en laddning $V_k = \frac{Q_k}{4\pi\epsilon_0 r}$

Summan av potentialer vid en laddning från övriga:

I hörnen har vi pga symmetri $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(2 \frac{Q}{d} + \frac{Q}{\sqrt{2}d} + \frac{4Q\sqrt{2}}{d} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(9+2\sqrt{2})Q}{\sqrt{2}d}$$

I centrum

$$V_5 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(4 \frac{Q\sqrt{2}}{d} \right)$$

Arbetet

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + \dots + Q_5 V_5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(4Q \frac{9+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}d} + 4Q \frac{4\sqrt{2}Q}{d} \right) \\ &= \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{17+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}d} \right) \end{aligned}$$

2. Vi vill bestämma $\Phi_2 = 0,6 \text{ mVs}$ i luftgapet

Flödet i mittberet är samma i järnet som i luftgapet

Pga symmetrin samverkar flödet från de yttre delarna i mittberet, så att $2\Phi_1 = \Phi_2$, om Φ_1 är flödet i yttre delen av järnkärnan

$$\text{Så vi ska ha } \Phi_1 = 0,3 \text{ mVs} \Rightarrow B_1 = \frac{\Phi_1}{A} = 0,75 \text{ T}$$

$$\text{Ur grafen fås att detta motsvarar } H_1 = 12 \text{ kA/m}$$

I mittberet har vi på motsvarande sätt i järnet

$$\Phi_2 = 0,6 \text{ mVs} \Rightarrow B_2 = 1,5 \text{ T} \Rightarrow H_2^{\text{Fe}} = 30 \text{ kA/m}$$

och i luftgapet

$$\Phi_2 = 0,6 \text{ mVs} \Rightarrow B_2 = 1,5 \text{ T} \Rightarrow H_2^{\text{luft}} = \frac{B}{\mu_0} = 1,19 \text{ MA/m}$$

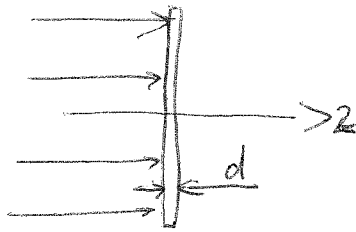
Ampères lag ger nu

$$N \cdot I = H_1 \cdot \pi a + H_2^{\text{Fe}} \cdot 2a + H_2^{\text{luft}} \cdot d$$

$$\Rightarrow I = 4,0 \text{ A}$$

3.

$$B = B_0 \cos \omega t \hat{z}$$



Antag skivan har homogen ledningsförmåga σ

A) Inducerad spänning $V_{ind} = - \frac{d\phi}{dt}$

Komplex notation och symmetri ger

$$2\pi r \bar{E}_\varphi = -j\omega \pi r^2 B_0$$

$$\bar{J}_\varphi = \sigma \bar{E}_\varphi(r) = -j\omega \sigma B_0 \frac{r}{2}$$

$$J = J_\varphi \hat{\varphi} = \hat{\varphi} \operatorname{Re}\{e^{j\omega t} \bar{J}_\varphi\} = \omega \sigma B_0 \frac{r}{2} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \hat{\varphi}$$

B)

Använde cirkulära strömvor för att integrera upp fältet i skivans centrum.

$$d\bar{B}_{\text{svavel}}^{\text{svavel}} = \frac{j\mu_0 di}{2r} = \hat{z} \frac{\mu_0}{2r} J_\varphi \cdot d dr$$

$$\bar{B}_{\text{svavel}}^{\text{svavel}} = \int_{r=0}^a d\bar{B}_{\text{svavel}}^{\text{svavel}} = -\hat{z} j\omega \mu_0 \sigma B_0 \frac{d a}{4}$$

$$B_{\text{svavel}}^{\text{svavel}} = \operatorname{Re}\{e^{j\omega t} \bar{B}_{\text{svavel}}^{\text{svavel}}\} = \hat{z} \frac{\omega \mu_0 \sigma d a}{4} B_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

C) Antagandet i A) borde vara rimligt om

$$\frac{\omega \mu_0 \sigma d a}{4} \ll 1 \quad \text{i uttrycket för magnetfältet}$$

från de inducerade svavelströmmen

Är inte detta uppfyllt måste man räkna

$$V_{ind} = - \frac{d\phi^{\text{yttre}}}{dt} - \frac{d\phi^{\text{svavel}}}{dt}$$

4

$$\vec{E} = (12\hat{x} + 9\hat{y}) e^{-j(3x-4y)} \cdot e^{j(3x-4y)}$$

$$\vec{E} = (12\hat{x} + 9\hat{y}) e^{-\alpha \hat{k} \cdot \hat{r}} e^{-j\beta \hat{k} \cdot \hat{r}} \quad \alpha \hat{k} = \beta \hat{k} = (3, -4, 0)$$

$$\hat{r} = (x, y, z)$$

vi vet att $|\hat{k}| = 1 \Rightarrow \alpha = \beta = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5 \Rightarrow \hat{k} = \frac{1}{5} (3, -4, 0)$

Vågen utbreder sig åt $(x, y, z) = (3, -4, 0)$.

$$\vec{E} \cdot \hat{k} = \frac{1}{5} (E_x k_x + E_y k_y) = \frac{1}{5} (12 \cdot 3 - 9 \cdot 4) = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \hat{k} \Rightarrow$$

Det är en plan våg. Eftersom $\alpha = \beta$, vågen utbreder sig i en ledare.

$$\vec{H} = \frac{1}{Z} \hat{k} \times \vec{E} = \frac{1}{Z \cdot 5} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3 & -4 & 0 \\ 12e^{j\beta \hat{k} \cdot \hat{r}} & 9e^{j\beta \hat{k} \cdot \hat{r}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{Z \cdot 5} \left(\hat{z} \cdot 75 e^{j\beta \hat{k} \cdot \hat{r}} \right) =$$

$$= \hat{z} \frac{15}{Z} e^{j\beta \hat{k} \cdot \hat{r}} \quad Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \quad \beta = \alpha + j\beta$$

eller från $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 12e^{j\beta \hat{k} \cdot \hat{r}} & 9e^{j\beta \hat{k} \cdot \hat{r}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{j\omega\mu} \hat{z} \left(9e^{j\beta \hat{k} \cdot \hat{r}} \cdot (-3 - j\beta) - 12e^{j\beta \hat{k} \cdot \hat{r}} (4 + j\beta) \right)$$

$$= \frac{1}{j\omega\mu} \hat{z} \left((1+j) 27 e^{j\beta \hat{k} \cdot \hat{r}} + (1+j) 48 e^{j\beta \hat{k} \cdot \hat{r}} \right) = \frac{(1+j) 75}{j\omega\mu} e^{j\beta \hat{k} \cdot \hat{r}} \hat{z}$$

$$= \frac{(1-j) 75}{\omega\mu} e^{j\beta \hat{k} \cdot \hat{r}} \hat{z}$$

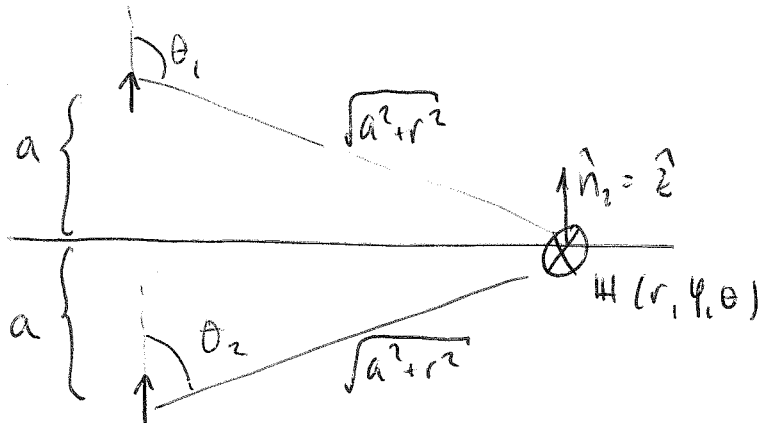
Nu ska vi visa att $\frac{15}{Z} = \frac{(1-j)75}{w\mu}$

$$\frac{15}{Z} = \left| Z = (1+j) \frac{x}{\sigma} \right. = \frac{15 \sigma}{(1+j) x} = \frac{15 \cdot 50}{(1+j) \cdot 5 \cdot w\mu} =$$
$$\left. \alpha = \beta = \sqrt{\frac{w\mu \sigma}{2}} = 5 \Rightarrow \sigma = \frac{50}{w\mu} \right|$$

$$= \frac{150}{(1+j)w\mu} \cdot \frac{(1-j)}{(1-j)} = \frac{(1-j)150}{(1^2-j^2)w\mu} = \frac{(1-j) \cdot 75}{w\mu}$$

5)

Spegling av dipolantennen



Formeln för fältet från en dipol ger följande uttryck för vår dipol och dess spegelladdning:

$$\bar{H}(r, \varphi, \theta) = \hat{\varphi} 2 \cdot \frac{-\omega^2 \bar{p}_0}{4\pi c} \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} e^{-j\omega \frac{\sqrt{a^2 + r^2}}{c}}$$

där $\bar{p}_0 = \frac{l \vec{z}_0}{j\omega}$ är dipolmomentet på komplex form.

Randvillkoret för de tangentiella H-komponenterna ges:

$$\hat{n}_2 \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \vec{j}_s$$

$$\bar{H}_2 = 0 \quad \text{ty metallen är en god ledare}$$

$$\vec{j}_s = \hat{z} \times \hat{\varphi} \frac{-\omega^2 p_0 r}{2\pi c \sqrt{a^2 + r^2}} e^{-j\omega \frac{\sqrt{a^2 + r^2}}{c}} \Rightarrow$$

$$\vec{j}_s = \hat{r} \frac{\omega^2 p_0 r}{2\pi c (a^2 + r^2)} \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} \sqrt{a^2 + r^2}) \quad \text{A/m}$$