

Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2.

EEF031 2008-12-16 kl. 8.30-12.30

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Andreas Fhager, 031 - 772 1723, 076 - 125 7012
Lösningar:	anslås på kursens hemsida
Resultatet:	anslås på kursens hemsida
Granskning:	Sker på plats och tid enligt resultatlistan
Kom ihåg	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

OBS!

Var vänlig ange på försättsbladet vilken del ni hoppar och som ni redan är godkända på från duggan.

Svaren på förståelsedelen skall ges på tesen som skall lämnas in.

Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras.

De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Ja, Vet ej och Nej. Riktigt svar ger +0.2poäng oriktigt svar ger -0.2p. Vet ej är neutralt och ger noll poäng.

Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1poäng och man kan därför få 1poäng även med ett vet ej svar.

Personligt id-nummer:

(Var vänlig ange den email adress som används för inlämningsuppgifterna bland den dolda informationen)

1

Problemlösningsdel (8 poäng)

En metallkula med radien 10 cm laddas upp med en laddning $Q = 1 \mu\text{C}$. Man kopplar sedan in två små metallkulor med radien 1 cm via små tunna metalltrådar. Antag att de små kulorna befinner sig på stort avstånd från varandra och den stora kulan. Antag också att metalltråden inte stör fältbildningen från kulorna.

a) Hur stor är fältstyrkan precis utanför den stora kulan före inkopplingen?

b) Hur stor laddning kommer att finnas på respektive kula efter inkopplingen?

c) Hur stor är fältstyrkan precis utanför kulorna efter inkopplingen? Kommer överslag att ske vid de små kulorna? Överslag sker i luft vid fältstyrkan 2,5 MV/m.

Förståelsedel

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

I grunden bygger uppgift a) bara på ett av Maxwells postulat.

I grunden bygger uppgift a) bara på två av Maxwells postulat.

I grunden bygger uppgift a) på Gauss lag och på att E-fältet är rotationsfritt.

I grunden bygger uppgift a) på Amperes lag och på att B-fältet är källfritt.

I grunden bygger uppgift a) på att källan till D-fältet är den fria laddningstätheten och på att E-fältet är konservativt.

I grunden bygger uppgift a) på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten och på att B-fältet är divergensfritt.

ja ? nej

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Postulaten i elektrostatiken följer från Maxwells ekvationer om man antar att källorna inte rör sig.

I kursen har vi använt den elektriska dipolen som en modell för den laddningsseparation som sker när en atom utsetts för ett elektriskt fält.

På nära håll från elektrisk dipol avtar fältet som $1/R^2$

På nära håll från en elektrisk dipol avtar potentialen som $1/R$

Speglingsmetoden tillsammans med entydighetssatsen gör att Laplace ekvation ibland kan lösas mha. spegling.

Gauss lag uttrycker hur stor kraften är mellan laddningar.

ja ? nej

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Eftersom rotationen av det elektrostatiska fältet är lika med noll kan en potential definieras.

Anledningen till att vi definierar den elektrostatiska potentialen om $E = -\nabla V$ är att få en naturlig koppling av V till den kinetiska energin.

En perfekt ledare har alltid samma potential i hela sin volym.

Fältet innanför en oladdad ihålig metallsfär med en punktladdning i håligheten beror på punktladdningens placering i hålet.

Fältet utanför en laddad ihålig metallsfär beror på hur håligheten ser ut.

Det elektriska fältet är en skalär.

ja ? nej

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Källan till förskjutningsfältet D är de fria laddningarna.

Sambandet $D = \epsilon E$ mellan E- och D-fältet kan härledas utifrån postulaten för elektrostatiken.

Polarisationsfältet P är fältet från bundna laddningar i ett material.

Om permeabiliteten för ett dielektriskt material är en konstant skalär oberoende av fältstyrkan betyder det att materialet är homogent, isotropt och linjärt.

Man kan härleda Kirchoffs spänningslag från laddningskonservering

I härledningen av entydighetssatsen för Poissons ekvation antar man att först att det finns flera lösningar som uppfyller lösningen men att de kan ha olika randvillkor.

ja ? nej

4

Problemlösningsdel (8 poäng)

En elektromagnetisk våg som utbreder sig i vakuum har E-fältet

$$\mathbf{E} = \hat{x}E_0 \cos^2(az) \sin(\omega t - \beta y).$$

- a) Beräkna tillhörande H-fält.
b) Är detta en plan våg? (Det som i kursboken benämns uniform plane wave.) Motivera!
c) Bestäm konstanten β med hjälp av vågekvationen.

Förståelsedel

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
I grunden bygger uppgift a) bara på två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger uppgift a) bara på fyra av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger uppgift a) bland annat på Gauss lag och på att E-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger uppgift a) bland annat på Amperes lag och på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger uppgift a) bland annat på att rotationen av E-fältet är lika med negativa tidsderivatan på H-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger uppgift a) bland annat på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av Förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Snells lag gäller endast i gränssytor där permeabiliteten är samma på båda sidor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Snells reflektionslag säger att då infallsvinkeln är större än en kritisk vinkel reflekteras inget fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Snells brytningslag relaterar infallsvinkel till den vinkeln på det transmitterade fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Snells reflektionslag säger att reflekterad vinkel är samma som infallsvinkeln.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Snells lag säger att när infallsvinkeln är större än kritiska vinkeln uppstår totalreflektion.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion uppstår då fältet går från ett optiskt tunnare till ett optiskt tätare medium.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Man kan välja divergensen av den magnetiska vektorpotentialen fritt i elektromagnetismen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man väljer ofta divergensen av den magnetiska vektorpotentialen till samma som i statiken för att förenkla beräkningarna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vågekvationen för vektorpotentialen \mathbf{A} kan härledas från Maxwells ekvationer.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den retarderade potentialen är lösningen till vågekvationen för vektorpotentialen \mathbf{A} .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{A}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Ett elektromagnetisk fält uppfyller alltid vågekvationen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då linjärpolariserad.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En linjärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen kan då bli noll.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då elliptiskt polariserad.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En monokromatisk våg innehåller ofta ett stort antal frekvenskomponenter.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion ger upphov till ytvågor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

5

Problemlösningsdel (8 poäng)

Man har konstruerat en dipolantenn av längd $2h$ ($h \ll \lambda$) Amplituden hos den tidsharmoniska strömfördelningen längs antennen kan skrivas som

$$I(z) = I_0 \left(1 - \frac{|z|}{h} \right).$$

- a) Ta fram uttrycken för E- och H-fält i fjärrfältszonen.
b) Beräkna antennens strålningsresistans.

Förståelsedel

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
I grunden bygger uppgift a) bara på två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger uppgift a) bara på fyra av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger uppgift a) på Gauss lag och på att E-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger uppgift a) bara på Amperes lag och på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger uppgift a) bara på att rotationen av E-fältet är lika med negativa tidsderivatan på H-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger uppgift a) bara på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Poyntingvektorn uttrycker en vågs intensitet i en viss riktning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om integralen av poyntingvektorn över en sluten yta är negativ finns inga källor innanför ytan	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntings teorem uttrycker energikonservering.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En vågs energi utbreder sig med gruppshastigheten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Reflektionskoefficienten för effekt vid vinkelrätt infall är densamma som kvadraten på reflektionskoefficienten för amplituden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Transmissionskoefficienten för effekt vid vinkelrätt infall är densamma som kvadraten på transmissionskoefficienten för amplituden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
En Hertzdipol är en hel våglängd lång.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömmen i antennen är konstant längs en Hertzdipol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strålningsresistansen hos en halv vågsantenn är oberoende av strålningseffekten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strålningsresistansen ökar med längden i kvadrat för alla dipolantenner.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En halv vågsantenn är ekvivalent med en kvartsvågsantenn över ett ledande plan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömmen är konstant längs en kvartsvågsantenn.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
$j\omega$ -metoden för fältberäkningar fungerar bara för harmoniskt varierande fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tidsderivata i Maxwells ekvationer övergår i $j\omega$ -metoden till multiplikation med $j\omega$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ett komplext uttryck på E-fältet kan ej innehålla ett tidsberoende.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att omvandla ett komplext uttryck till tidsplanet multiplicerar man med $j\omega$ och tar sedan realdelen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vakuüm är dispersionsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om gruppshastigheten är samma som fashastigheten är materialet dispersionsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Tenta 081216

1 a) Fältstyrkan utanför den stora kulan

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0,12} = 0,9 \text{ MV/m}$$

b) Efter inhoppling av de två kulorna fås laddningen $Q-2q$ på stora kulan och q på de små.
Vid inhoppling blir potentialerna samma.

$$\frac{Q-2q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow q = \frac{r}{(2r+R)} Q$$

$$\text{På stora kulan } Q-2q = 833 \text{ nC}$$

$$\text{På lilla kulan } q = 83 \text{ nC}$$

c) Fältstyrka utanför de små kulorna

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 7,5 \text{ MV/m}$$

$7,5 \text{ MV/m} > 2,5 \text{ MV/m}$ alltså sker överstag

2. a) På elektroderna är potentialen konstant.
Dvs den varierar inte med radren

I blekhet kan vi därför anta $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$ $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$

Laplace ekvation blir då

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(\phi) = a\phi + b$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Med randvillkor} \\ \phi_1 = -\frac{\pi}{2} \quad V(\phi_1) = -\frac{U}{2} \\ \phi_2 = \frac{\pi}{2} \quad V(\phi_2) = \frac{U}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow V(\phi) = \frac{U}{\pi} \phi$$

b) Strömstätheten $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla V$
$$= -\hat{\phi} \sigma \frac{\partial V}{r \partial \phi} = -\hat{\phi} \frac{\sigma U}{\pi r}$$

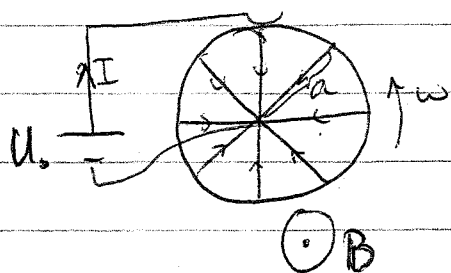
Ström: Integrera \mathbf{J} över tvärsnittet

$$I = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \left\{ ds = -\hat{\phi} d\phi dr \right\} = \frac{\sigma U}{\pi} d \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\sigma U d}{\pi} \ln \frac{b}{a}$$

c) Resistansen $R = \frac{U}{I} = \frac{\pi}{\sigma d \ln(b/a)}$

d) Lösningen är exakt eftersom vi löst Laplace ekvation exakt
och därmed även har exakt strömfördelning

3

Hjulets radie: a

Krafter på laddningar $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$
 är riktad radieutåt då hjulet roterar \Rightarrow
 En rörelse emk induceras riktad utåt.

$$V_{\text{rörelse}} = \int_L \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{r=0}^a \omega r \hat{\varphi} \times B_0 \hat{z} \cdot \hat{r} dr =$$

$$= \int_{r=0}^a \omega r B_0 \hat{r} \cdot \hat{r} dr = \int_{r=0}^a \omega r B_0 dr = \frac{\omega a^2 B_0}{2}$$

Kirchoffs sp. lag ger $U_0 - V_{\text{rörelse}} = R \frac{I}{n} \Rightarrow V_{\text{rörelse}} = U_0 - R \frac{I}{n}$

$$U_0 - \frac{\omega a^2 B_0}{2} = R \frac{I}{n}$$

$$\Rightarrow I = \frac{n}{R} \left(U_0 - \frac{\omega a^2 B_0}{2} \right)$$

Mekanisk effekt P_{meh} : $P_{\text{meh}} = P_{\text{batteri}} - P_{\text{värmeförluster}} =$

$$= U_0 I - n R \left(\frac{I}{n} \right)^2 = I \left(U_0 - R \frac{I}{n} \right) =$$

$$= \frac{n}{R} \left(U_0 - \frac{\omega a^2 B_0}{2} \right) \frac{\omega a^2 B_0}{2}$$

Vridmoment $\Rightarrow P_{\text{meh}} = \omega \cdot T_{\text{meh}}$

$$\Rightarrow T_{\text{meh}} = \frac{P_{\text{meh}}}{\omega} = \frac{n}{R} \left(U_0 - \frac{\omega a^2 B_0}{2} \right) \frac{a^2 B_0}{2}$$

$$4a) \quad \vec{E} = \hat{x} E_0 \cos^2(az) \sin(\omega t - \beta y)$$

$$\text{Faradays lag ger } -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \hat{y} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \hat{z} \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\hat{y} a \cos(az) \sin(az) \sin(\omega t - \beta y) + \hat{z} E_0 \cos^2(az) \beta \cos(\omega t - \beta y)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = -\int \nabla \times \vec{E} dt = -\hat{y} E_0 \cos(az) \sin(az) \frac{2a}{\omega} \cos(\omega t - \beta y) - \hat{z} E_0 \cos^2(az) \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t - \beta y)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = -\hat{y} \frac{E_0 2a}{\mu_0 \omega} \cos(az) \sin(az) \cos(\omega t - \beta y) - \hat{z} \frac{E_0 \cos^2(az) \beta}{\mu_0 \omega} \sin(\omega t - \beta y)$$

b) Ingen plan våg eftersom fältet varierar vinkelrätt mot utbredningsriktningen.

$$c) \text{ Vågekvationen } \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0$$

\Rightarrow

$$-2a^2 E_0 \cos^2(az) \sin(\omega t - \beta y) - \beta^2 E_0 \cos^2(az) \sin(\omega t - \beta y) + \frac{\omega^2}{c^2} \cos^2(az) \sin(\omega t - \beta y) + 2a^2 E_0 \sin^2(az) \sin(\omega t - \beta y) = 0$$

$$\Rightarrow -2a^2 \cos^2(az) - \beta^2 \cos^2(az) + \frac{\omega^2}{c^2} \cos^2(az) + 2a^2 \sin^2(az) = 0$$

$$\beta^2 = -2a^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + 2a^2 \tan^2(az)$$

$$\beta^2 = (\tan^2(az) - 1) 2a^2 + \frac{\omega^2}{c^2}$$

5a) Fjärrfältsbidraget från strömelementet $I dz$ är:

$$dE_{\theta} = \eta_0 dH_{\phi} = j \frac{I dz}{4\pi R'} \frac{e^{-j\beta R'}}{R'} \eta_0 \beta \sin \theta$$

I fjärrfältet har vi $R' \approx R - z \cos \theta$

I exponenten får vi behålla detta approximativa uttryck

I nämnaren kan vi approximera $R' \approx R$

Nu integrerar vi längs antennen

$$E_{\theta} = \eta_0 H_{\phi} = j \frac{I_0 \eta_0 \beta \sin \theta}{4\pi R} e^{-j\beta R} \int_{-h}^h \left(1 - \frac{|z|}{h}\right) e^{j\beta z \cos \theta} dz$$

$\left(1 - \frac{|z|}{h}\right)$ är en jämn funktion

$$e^{j\beta z \cos \theta} = \underbrace{\cos(\beta z \cos \theta)}_{\text{jämn}} + j \underbrace{\sin(\beta z \cos \theta)}_{\text{udda}}$$

Bidrag ges endast av jämn gånger jämn funktion.

$$E_{\theta} = \eta_0 H_{\phi} = j \frac{I_0 \eta_0 \beta \sin \theta}{2\pi R} e^{-j\beta R} \int_{-h}^h \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cos(\beta z \cos \theta) dz =$$

$$j \frac{I_0 \eta_0 \beta \sin \theta}{2\pi R} e^{-j\beta R} \frac{1 - \cos(\beta h \cos \theta)}{h \beta^2 \cos^2 \theta} = j \frac{I_0 \eta_0 \sin \theta}{2\pi R h \beta \cos^2 \theta} e^{-j\beta R} [1 - \cos(\beta h \cos \theta)]$$

b) Tidmedelvärdet av Poynting vektorn kan nu skrivas

$$P_{av}(\theta) = \frac{1}{2} E_{\theta} H_{\phi}^* = \frac{I_0^2 \eta_0}{2^3 \pi^2 h^2 \beta^2 R^2} \left[\frac{\sin \theta [1 - \cos(\beta h \cos \theta)]}{\cos^2 \theta} \right]^2$$

Total utstrålad effekt

$$P_r = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_{av}(\theta) R^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{I_0^2 \eta_0}{4\pi h^2 \beta^2} \int_0^{\pi} \left[\frac{\sin \theta (1 - \cos(\beta h \cos \theta))}{\cos^2 \theta} \right]^2 \sin \theta d\theta$$

Strålningsresistans

$$R_r = \frac{2P_r}{I_0^2} = \frac{\eta_0}{2\pi h^2 \beta^2} \int_0^{\pi} \left[\frac{\sin \theta (1 - \cos(\beta h \cos \theta))}{\cos^2 \theta} \right]^2 \sin \theta d\theta$$

Integralen får vi räkna ut numeriskt där vi vet vad h och β är.