

**Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2.  
EEF031 2007-12-18 kl. 14.00-18.00**

**Tillåtna hjälpmedel:** BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori

**Förfrågningar:** Markus Johansson 031-772 5052

**Lösningar:** anslås på kursens hemsida

**Resultatet:** anslås på kursens hemsida

**Granskning:** Sker på plats och tid enligt resultatlistan

**Kom ihåg:** Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

---

# OBS!

Svaren på förståelsedelen skall ges på tesen som skall lämnas in.

Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras.

De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Ja, Vet ej (?) och Nej. Riktigt svar ger +0.2 poäng oriktigt svar ger -0.2 p. Vet ej är neutralt och ger noll poäng.

Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1 poäng även med ett vet ej svar.

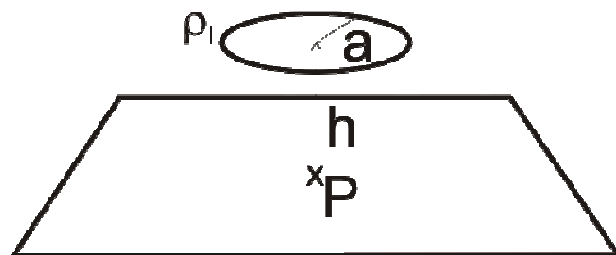
Personligt ID nummer:.....

*Kom håg att bland den dolda personliga informationen ange den mailadress som används för de webb baserade inlämningsuppgifterna.*

# 1 (Elektrostatik)

## Problemlösningssdel (8 poäng)

a) En tunn cirkulär ring med radie  $a$  är uppladdad med konstant linjeladdningstäthet  $\rho_l$ . Ringen ligger horisontellt orienterad på höjden  $h$  ovanför ett jordat plan,  $z = 0$ . Bestäm ytladdningstätheten  $\rho_s(P)$  på jordplanet rakt under mittpunkten på ringen i punkten  $P$ .



## Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Den grundläggande fysiken i uppgift 1a beskrivs av ett och endast ett av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 1a beskrivs av två och endast två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 1a beskrivs av Gauss lag och på att E-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 1a beskrivs av Amperes lag och på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 1a beskrivs av att källan till D-fältet är den fria laddningstätheten och på att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 1a beskrivs av att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten och på att B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Speglingsmetoden kan användas för att lösa Poissons ekvation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Lösningen till Poissons ekvation är unik om randvillkoren uppfylls.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speglingsmetoden kan användas för att lösa Poissons ekvation i godtycklig geometri.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speglingsmetoden kan användas vid spegling i cylindrar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan använda spegling i ett hörn av två jordade halvplan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poissons ekvation är ett specialfall av Laplaces ekvation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Eftersom divergensen av det elektriska fältet är skilt från noll kan en potential definieras.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektriska potentialen kan definieras som $E = -\nabla V$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektriska potentialen kan definieras som $E = \nabla V$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En perfekt ledare har alltid samma potential i hela sin volym.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Randvillkoret för E-fältets tangentialkomponent härleds utifrån divergensen av E-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Randvillkoret för E-fältets normalkomponent härleds utifrån att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Enheten för det elektriska fältet är $V/m^3$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sambandet $D = \epsilon E$ mellan E- och D-fältet kan härledas utifrån postulaten för elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Polarisationsfältet $P$ är fältet från de bundna laddningarna i ett dielektriskt material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Dielektriska materialegenskaper modelleras med hjälp av elektriska dipoler.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antagande om approximativ strömfördelning ger en för hög resistans.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antagande om approximativ potentialfördelning ger en för låg resistans.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## 2 (Magnetostatik)

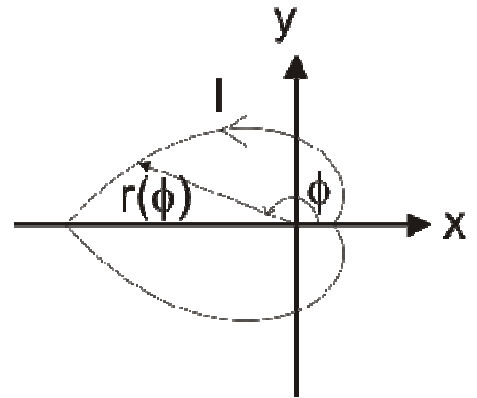
### Problemlösningssedel (8 poäng)

a) En ledningstråd har formen av en plan, hjärtformad slinga, se figur. I tråden går en likström  $I$ . Slingan kan parametreras som

$$\begin{cases} x(\phi) = r(\phi) \cos(\phi) \\ y(\phi) = r(\phi) \sin(\phi) \text{ med } r(\phi) = ae^{b|\phi|} \text{ där } a \text{ och } b \text{ är positiva} \\ z(\phi) = 0 \end{cases}$$

konstanter och  $-\pi \leq \phi < \pi$ .

Bestäm det magnetiska fältet i origo  $\mathbf{B}(0,0,0)$ .



### Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Den grundläggande fysiken i uppgift 2a beskrivs av ett och endast ett av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 2a beskrivs av två och endast två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 2a beskrivs av Gauss lag och på att E-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 2a beskrivs av Amperes lag och på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 2a beskrivs av att källan till D-fältet är den fria laddningstätheten och på att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 2a beskrivs av att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten och på att B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Divergensen av den magnetiska vektorpotentialen är given utifrån Maxwells ekvationer.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen från en strömförande tråd cirkulerar runt tråden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det magnetiska fältet från en strömförande tråd cirkulerar runt tråden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Uttrycket för det magnetiska fältet från en magnetisk dipol gäller på mycket stort avstånd.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Uttrycket för det magnetiska fältet från en magnetisk dipol gäller på mycket litet avstånd.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vid beräkning av B-fältet kan Amperes lag alltid användas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Randvillkoret för B-fältets normalkomponent härleds från att B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältets normalkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältets tangentialkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets tangentialkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets normalkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En laddad partikel som rör sig i ett i tiden konstant magnetfält ökar inte sin hastighet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Magnetiska monopoler används för att modellera magnetiska material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ferromagnetiska material har stor relativa permeabilitetstal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Paramagnetiska material har negativa relativa permeabilitetstal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Reluktans för en magnetfältskrets motsvarar ungefär resistans för en elektrisk krets.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets roll i magnetostatiken påminner om E-fältets roll i elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en permanentmagnet vill man ha ferromagnetiskt material med en bred hystereskurva.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



# 4

## Problemlösningsdel (8 poäng)

a) En linjärt polariserad, tidsharmonisk plan våg utbreder sig i vakuum i den positiva z-riktningen och har det elektriska fältet  $\mathbf{E}(z,t) = E_0 \sin(kz - \omega t)\hat{\mathbf{x}}$ . Bestäm motsvarande B-fält,  $\mathbf{B}(z,t)$  samt den tillhörande Poyntingvektorn  $\mathbf{P}(z,t)$ . Hur mycket energi passerar ett mot utbredningsriktningen vinkelrätt tvärsnitt med arean  $A$  under tiden  $\Delta t$ ? Antag att  $\Delta t$  är mycket längre än periodtiden hos fältet.

## Förståelsedel (4 poäng)

### b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att beskriva den grundläggande fysiken i uppgift 4a räcker två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att beskriva den grundläggande fysiken i uppgift 4a behövs alla fyra Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 4a beskrivs bla av att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 4a beskrivs bla av att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 4a beskrivs bla av att rotationen av E-fältet är lika med negativa tidsderivatan på H-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 4a beskrivs bla av att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Grupphastigheten och fashastigheten är aldrig lika stora.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För en plan våg i vakuum är fashastigheten och grupphastigheten olika.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om grupp- och fashastighet är lika stora är mediet dispersivt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För en plan våg i ett förlustfritt material ( $\sigma=0$ ) med $\epsilon > 0$ och $\mu > 0$ , (permittiviteten och permeabiliteten varierar inte med frekvensen) är fashastigheten och grupphastigheten olika.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Våglängden för en plan våg är frekvensoberoende om grupphastigheten skiljer sig från fashastigheten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En plan våg kännetecknas av att fälten varierar vinkelrätt mot utbredningsriktningen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Poyntings teorem uttrycker energikonservering.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn kan vara tidsberoende.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn kan ej definieras med komplexa B- och E-fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn har enheten $W/m^3$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn kan bara definieras för monokromatiska fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn kan definieras som tidsmedelvärde eller som momentanvärde.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

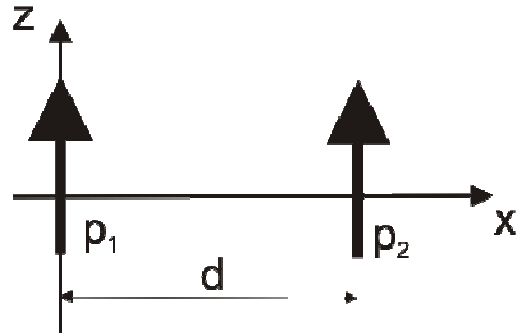
### e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Vågimpedansen hos luft är $Z=733\Omega$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vågimpedansen för vatten är högre än för luft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vågimpedansen för järn är högre än för luft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vågimpedansen är alltid ett reellt tal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vågimpedansen relaterar magnetiskt fält till elektriskt fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vågimpedansen bestäms av konduktiviteten och permittiviteten hos ett material	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# 5

## Problemlösningsdel (8 poäng)

a) Två Hertzdipoler med de elektriska dipolmomenten  $\vec{p}_1 = \bar{p}_1 \hat{z}$  och  $\vec{p}_2 = \bar{p}_2 \hat{z}$  sänder med vinkelfrekvens  $\omega$ . Den ena antennen är placerad i origo och den andra i punkten  $d\hat{x}$ . Dipolerna matas med en amplitud och fas som svarar mot  $\bar{p}_2 = -\bar{p}_1 e^{-j\beta d/2}$ . Bestäm vilka riktningar i xy-planet där E-fältet är noll på stort avstånd från origo. Antag att avståndet  $d$  är litet.



## Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att beskriva den grundläggande fysiken i uppgift 5a räcker två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att beskriva den grundläggande fysiken i uppgift 5a behövs alla fyra Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 5a beskrivs bla av Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 5a beskrivs bla av Amperes lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 5a beskrivs bla av att rotationen av E-fältet är lika med negativa tidsderivatan på H-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 5a beskrivs bla av att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
En Hertzdipol är en våglängd lång.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömmen varierar längs en Hertzdipol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Direktiviteten för en Hertzdipol är 1,5.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strålningsresistansen hos en Hertzdipol är oberoende av våglängden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En halv vågsdipol har samma direktivitet som en Hertzdipol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antennförstärkningen är rikttningsberoende.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Snells lag gäller endast i gränssytor där permeabiliteten är samma på båda sidorna, dvs $\mu_1 = \mu_2$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Snells reflektionslag säger att infallsvinkeln är samma som reflektionsvinkeln.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Med hjälp av Snells lag kan begreppet totalreflektion förstås.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion uppstår då vågen går från ett optiskt tätare till ett optiskt tunnare medium.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Reflektionskoefficienten för effekt vid vinkelrätt infall är densamma som kvadraten på reflektionskoefficienten för amplituden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Transmissionskoefficienten för effekt vid vinkelrätt infall är densamma som kvadraten på transmissions koefficienten för amplituden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
$j\omega$ -metoden för fältberäkningar fungerar bara för harmoniskt varierande fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tidsderivata i Maxwells ekvationer övergår i $j\omega$ -metoden till division med $j\omega$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ett komplext uttryck på E-fältet kan inte innehålla ett tidsberoende.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att konvertera från komplext till reellt fält multiplicerar man med $e^{j\omega t}$ och tar imaginärdelen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Komplexa fält kan inte användas för att beskriva plana vågor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vektorfält kan uttryckas på komplex form men inte skalära fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Tenta 07/2/18

1. Ytladdningen ges av  $\rho_s(P) = \epsilon_0 \hat{z} \cdot E(\theta)$  eftersom fältet i planet kan antas vara noll.

Speglar laddningstätheten i planet. Ringen och dess spegelsbild ger lika stort bidrag till fältet i punkten P.

Fältet från ringen blir därmed:

Källpt.  $R_1 = a\hat{r} + h\hat{z}$ , Fält pt.  $R_2 = \textcircled{0}$

$$E_{\text{ring}}(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_s(R_1) \hat{R}_{12}}{R_{12}^2} dl_1 = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{-a\hat{r} - h\hat{z}}{(a^2 + h^2)^{3/2}} a d\varphi$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{r} \text{ komp.} \\ \text{blir noll} \end{array} \right\} = -\frac{\rho_s h \hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a}{(a^2 + h^2)^{3/2}} = -\frac{\rho_s a h}{2\epsilon_0 (a^2 + h^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Med spegelladdningen:

$$E_{\text{total}}(R_2) = 2 E_{\text{ring}}(R_2)$$

Ytladdningstätheten blir alltså

$$\rho_s(P) = -\frac{\rho_s a h}{(a^2 + h^2)^{3/2}}$$

2

Källpt.  $\vec{R}_1 = r(\phi) \cos(\phi) \hat{x} + r(\phi) \sin(\phi) \hat{y} + 0 \hat{z}$

Fältpt  $\vec{R}_2 = 0$

Biot-Savarts lagges:

$$\vec{B}(\vec{R}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{l} \times \vec{R}_{12}}{R_{12}^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{l} \times \vec{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

Längdelementet  $d\vec{l}$  för ges av den vektor  $\vec{R}_1$ :

$$d\vec{l} = \frac{d\vec{R}_1}{d\phi} \cdot d\phi = \frac{d(\hat{x} r(\phi) \cos(\phi) + \hat{y} r(\phi) \sin(\phi))}{d\phi} d\phi =$$

$$= \left[ \frac{dr(\phi)}{d\phi} (\hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi) + r(\phi) (-\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi) \right] d\phi$$

$$d\vec{l} \times \vec{R}_{12} = +\hat{z} r^2(\phi) d\phi$$

Därmed får vi det magnetiska fältet i origo:

$$\vec{B}(\vec{R}_2) = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2(\phi) d\phi}{r^3(\phi)} = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{r(\phi)}$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 \frac{d\phi}{a e^{-b\phi}} + \int_0^{\pi} \frac{d\phi}{a e^{b\phi}} \right] =$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[ \int_{-\pi}^0 e^{b\phi} d\phi + \int_0^{\pi} e^{-b\phi} d\phi \right] = \hat{z} \frac{I \mu_0}{2\pi a b} (1 - e^{-b\pi})$$



3

Vektorpotentialen från en magnetisk dipol.

$$A(\mathbf{R}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

Källpunkt  $\mathbf{R}_1 = z\hat{z}$

Fältpunkt  $\mathbf{R}_2 = a\hat{r}$  (På ringen)

$$\text{Då fås } A(\mathbf{R}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{z} \times (a\hat{r} - z\hat{z})}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{ma\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{\phi}}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Flödet genom ringen blir

$$\Phi = \oint_{\mathcal{L}} A(\mathbf{R}_2) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} A(\mathbf{R}_2) \cdot a\hat{\phi} d\phi = \frac{ma^2\mu_0}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Med  $z = z(t) = vt$

Inducerad spänning i slingan  $V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{ma^2\mu_0}{2(a^2 + z^2(t))^{3/2}} \right)$

$$= \frac{3z(t)vm a^2\mu_0}{2(a^2 + z^2(t))^{5/2}}$$

Strömmen i ringen fås nu som

$$I(t) = \frac{V}{R} = \frac{3v^2 t m a^2 \mu_0}{2R(a^2 + v^2 t^2)^{5/2}}$$

Riktningen är  $+\hat{\phi}$  för  $t > 0$  och  $-\hat{\phi}$  för  $t < 0$   
Fås tex nra Lenz lag.

$$4 \quad \mathbb{E}(z,t) = E_0 \sin(kz - \omega t) \hat{x}$$

H-fältet fås nu från Faradays lag

$$-\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{H}(z,t) = \nabla \times \mathbb{E}(z,t) = \hat{y} E_0 \frac{\partial}{\partial z} \sin(kz - \omega t) = \hat{y} k E_0 \cos(kz - \omega t)$$

Detta ger  $\mathbb{H}(z,t) = \hat{y} \frac{k E_0}{\mu_0 \omega} \sin(kz - \omega t)$

$$\mathbb{B}(z,t) = \hat{y} \frac{k E_0}{\omega} \sin(kz - \omega t)$$

Poyntingvektorn fås nu som

$$S(z,t) = \mathbb{E}(z,t) \times \mathbb{H}(z,t) = \hat{x} \times \hat{y} \frac{E_0^2 k}{\mu_0 \omega} \sin^2(kz - \omega t)$$

$$\left\{ k = \frac{\omega}{c}, c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \Rightarrow \frac{k}{\mu_0 \omega} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \right\} = \hat{z} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \sin^2(kz - \omega t) =$$

$$= \hat{z} \frac{E_0^2}{Z_0} \sin^2(kz - \omega t)$$

Tidsmedelvärdet av  $\sin^2(\omega t - kx)$  är  $\frac{1}{2}$

Då fås energin:

$$\text{Energin} = \frac{E_0^2}{Z_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot A \cdot \Delta t$$

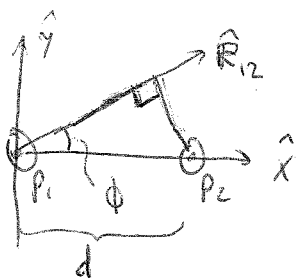
5

Fjärrfältet från en elektrisk dipol.

$$\mathbf{E}_0 = -\hat{\theta} \frac{\omega^2 \bar{p}_0 \sin\theta}{4\pi \epsilon R_{12}} z_0 e^{-j\beta R_{12}} = -\frac{\mu_0 \omega^2 \bar{p}_0 \sin\theta}{4\pi R_{12}} e^{-j\beta R_{12}} \hat{\theta}$$

Fältet från de båda dipolerna kan nu skrivas

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{\mu_0 \omega^2 e^{-j\beta R_{12}}}{4\pi R_{12}} \sin\theta (\bar{p}_1 + \bar{p}_2 e^{j\beta d \hat{x} \cdot \hat{R}_{12}})$$



Låt  $\hat{R}_{12}$  vara den radiale vektorn i cylindriska koordinater, som pekar mot fältpunkten, dvs den ligger i  $xy$ -planet

Uttryckt i vinkeln  $\phi$  får

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{\mu_0 \omega^2 e^{-j\beta R_{12}}}{4\pi R_{12}} \sin\theta (\bar{p}_1 + \bar{p}_2 e^{j\beta d \cos\phi}) \hat{\theta}$$

I  $xy$  planet blir  $-\hat{\theta}$  i  $\hat{z}$ -led.

Fältet är noll i de riktningar som

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 e^{j\beta d \cos\phi} = 0 \Rightarrow$$

$$e^{j\beta d \cos\phi} = -\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_2} = e^{+j\beta d/2}$$

$$\Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \phi = \pm 60^\circ$$