Fält 25. Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2.
EEF031 Onsdagen den 23 april 2003 kl. 14.15-18.15.

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen för elektromagnetisk fältteori.
Förfrågningar:	Andreas Danielsson, Tel. ankn. 5052.
Lösningar:	Anslås på kursens hemsida efter tentamenstidens slut.
Resultat:	Anslås på kursens hemsida senast den 9 maj.
Granskning:	9 maj, kl. 12.00-13.00 i Vasa 7 hos Andreas
Betyg:	Sänds till betygsexpeditionen senast den 20 maj.
Kom ihåg:	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar

Lycka till!

1

Problemlösningsdel

Fyra små likadana metallkulor ligger symmetriskt i ett plan så att de utgör hörnen i en kvadrat. De befinner sig på ett avstånd från varandra som är stort i jämförelse med kulornas radier. Centralt belägen i kvadraten befinner sig en lika stor metallkula. Den centrala kulan har laddningen $4Q$ och de fyra övriga kulorna har vardera laddningen $-Q$.

A) Hur mycket arbete uträttas för att föra samman kulorna från sina ursprungslägen på mycket stort avstånd från varandra. 8 poäng

---

Förståelsedel

B) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket. 1 poäng

C) Beskriv ett möjligt experiment för att testa postulaten. 1 poäng

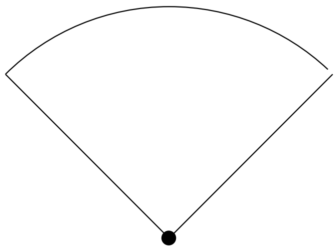
D) Elektrostatisk energi, elektrostatiskt arbete, och elektrostatisk potential är relaterade. Beskriv kortfattat hur. 1 poäng

E) Kirchoffs strömlag är relaterad till ett grundläggande samband i denna kurs. Vilket? På vilket sätt är de relaterade? 1 poäng

2

Problemlösningsdel

En likström flyter i en lång metallstång som klyvts på längden och har ett tvärsnitt enligt figuren nedan. Antag att strömmen är jämt fördelad över hela tvärsnittet.



A) Bestäm magnetfältet till storlek och riktning i centrumaxeln av den ursprungliga stången. (Vid den svarta pricken.) 8 poäng

---

Förståelsedel

B) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket. 1 poäng

C) Jämför de olika metoder som vi använt i kursen för att beräkna magnetfältet från strömförande ledare. 1 poäng

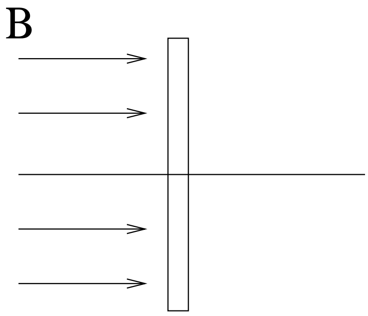
D) Kraften $d\mathbf{F} = \mathbf{J}\times\mathbf{B}dV$ kan under vissa omständigheter övergå i formen $F = BIL$ som vi känner till från gymnasiet. Rita en bild och visa hur och under vilka förhållanden detta kan ske. 1 poäng

E) Vad är en magnetisk dipol? Hur ser fältet från en sådan ut? Beskriv kortfattat. 1 poäng

3

Problemlösningsdel

En tunn cirkulär metallskiva ligger med sin rotationssymmetriaxel längs ett i rummet konstant magnetfält som varierar sinusformigt i tiden.



A) Använd formeln $V_{ind} = -\frac{d\phi}{dt}$ för att beräkna den inducerade virvelströmtätheten $\mathbf{J}(r, t)$ under antagandet att magnetfältet från de inducerade strömmarna kan försummas. 4 poäng

B) Beräkna det magnetfält som dessa virvelströmmar ger upphov till i skivans centrum. 2 poäng

C) Visa när antagandet i **A)** är rimligt och diskutera, utan att räkna i detalj, hur man generaliserar lösningen på problemet genom att ta med virvelströmmarna i beräkningen. 2 poäng

---

Förståelsedel

D) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket. 1 poäng

E) Integralen av magnetfältet över en sluten yta är alltid noll. Förklara kortfattat varför. 1 poäng

F) Vad är en hystereskurva? 1 poäng

G) Beskriv kortfattat med egna ord vad som händer med laddningar på en ledande stång som rör sig i ett statiskt magnetfält. 1 poäng

4

Problemlösningsdel

En kort centermatad sprötdipol med längden L, belägen i origo, används i en kommunikationsapplikation. Strömmen i antennen kan approximeras med uttrycket

$$i(z,t) = I_0(1 - 2\frac{|z|}{L})\cos\omega t \quad \text{för} \quad \frac{-L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}$$

A) Beräkna linjeladdningstätheten på antennen. 8 poäng

Förståelsedel

C) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket. 1 poäng

D) Vad är en antenns strålningsresistans? 1 poäng

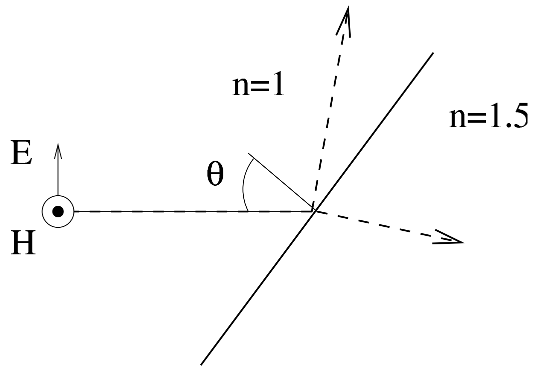
E) Vad är en Hertzdipol? 1 poäng

F) Vad är en antenns direktivitet? 1 poäng

5

Problemlösningsdel

En linjärt polariserad elektromagnetisk våg i vakuum skulle egentligen träffa en plan gränsyta till ett förlustfritt dielektrikum med brytningsindex $n = 1.5$ under Brewster-vinkeln och därför ej ge någon reflekterad våg. Nu råkade emellertid infallsvinkeln bli 3° för stor.



A) Beräkna reflektionskoefficienten för effekt i denna situation. 8 poäng

---

Förståelsedel

B) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket. 1 poäng

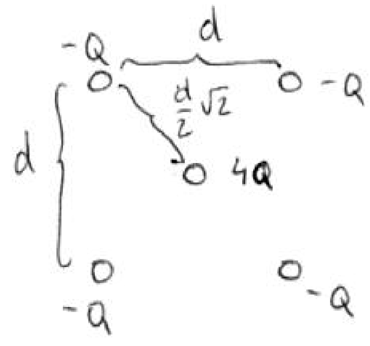
C) Beskriv med ord innebörden av Poyntingvektorn. 1 poäng

D) Beskriv kortfattat begreppen grupphastighet och fashastighet. 1 poäng

E) Beskriv kortfattat begreppen total inre reflektion, Brewstervinkel, skineffekt och inträngningsdjup. 1 poäng

Lösningar till tenta 2003-04-23

1.



Det elektriska arbete som åtgår för att föra samman ett antal laddningar kan tecknas som

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_k V_k \qquad \text{där } N \text{ är antalet laddningar}$$

Potentialen från en laddning: $V_k = \dfrac{Q_k}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Summera upp potentialen vid en laddning från övriga laddningar:

I hörnen $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(2\,\frac{-Q}{d} + \frac{-Q}{\sqrt{2}\,d} + \frac{4Q}{\frac{d}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(7-2\sqrt{2})\,Q}{\sqrt{2}\,d}$$

I centrum V_5

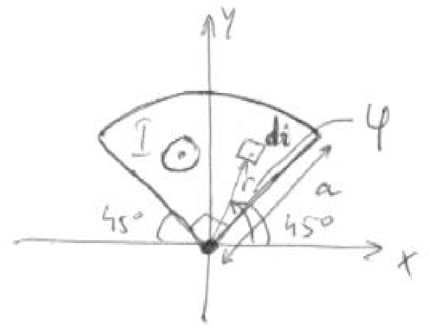
$$V_5 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(4\,\frac{-Q}{\frac{d}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4\sqrt{2}\,Q}{d}\right)$$

Nu beräknar vi

$$W_e = \frac{1}{2}\left(Q_1V_1 + Q_2V_2 + \dots + Q_5V_5\right) = \frac{1}{2}\left(4\cdot\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(7-2\sqrt{2})\,Q}{\sqrt{2}\,d} - \frac{4Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{4\sqrt{2}\,Q}{d}\right)$$

$$= \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 d}\left(\frac{-15+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

2



I stången flyter strömmen I. Strömtätheten kan då beräknas till $J = \dfrac{I}{\frac{1}{4}\pi a^2}$

Vi kan skriva strömbidraget di som $di = J\,dr\,r\,d\varphi$

Amperes lag ger $|d\mathbb{B}| = \dfrac{\mu_0\, di}{2\pi r}$

Således $dB_x = |dB| \sin\varphi \quad dB_y = |d\mathbb{B}|(-\cos\varphi)$

Nu integrera vi för att få fram fältet i origo.

$$B_x = \int_{r=0}^{a} \int_{\varphi=\pi/4}^{3\pi/4} dB_x = \int_{r=0}^{a} \int_{\varphi=\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{4I}{\pi a^2}\, dr\, r\, d\varphi \sin\varphi =$$

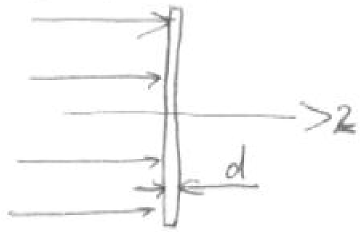
$$= \frac{2I\mu_0}{\pi^2 a^2}\, a \underbrace{\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\varphi\, d\varphi}_{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,\frac{\mu_0 I}{\pi^2 a}$$

$$B_y = \int_{r=0}^{a} \int_{\varphi=\pi/4}^{3\pi/4} dB_y = \frac{2I\mu_0}{\pi^2 a^2}\, a \int_{\pi/4}^{3\pi/4} -\cos\varphi\, d\varphi = 0$$

(Kunde också sett att $B_y = 0$ pga symmetri)

3

$\mathbb{B} = B_0 \cos\omega t \, \hat{z}$



Antag skivan har homogen ledningsförmåga σ

A) Inducerad spänning $U_{ind} = -\dfrac{d\phi}{dt}$

Komplex notation och symmetrin ger

$$2\pi r \bar{E}_\varphi = -j\omega \pi r^2 B_0$$

$$\bar{J}_\varphi = \sigma \bar{E}_\varphi(r) = -j\omega\sigma B_0 \frac{r}{2}$$

$$\mathbb{J} = J_\varphi \hat{\varphi} = \hat{\varphi} \, Re\{e^{j\omega t} \bar{J}_\varphi\} = \omega\sigma B_0 \frac{r}{2} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \hat{\varphi}$$

B) Använde cirkulära strömrör för att integrera upp fältet i skivans centrum.

$$d\bar{\mathbb{B}}^{virvel}_{origo} = \hat{z} \frac{\mu_0 \, d\bar{I}}{2r} = \hat{z} \frac{\mu_0}{2r} J_\varphi \cdot d \, dr$$

$$\bar{\mathbb{B}}^{virvel}_{origo} = \int_{r=0}^{a} d\bar{\mathbb{B}}^{virvel}_{origo} = -\hat{z} \, j\omega\mu_0\sigma B_0 \, d \frac{a}{4}$$

$$\mathbb{B}^{virvel}_{origo} = Re\{e^{j\omega t} \mathbb{B}^{virvel}_{origo}\} = \hat{z} \frac{\omega\mu_0\sigma \, da}{4} B_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

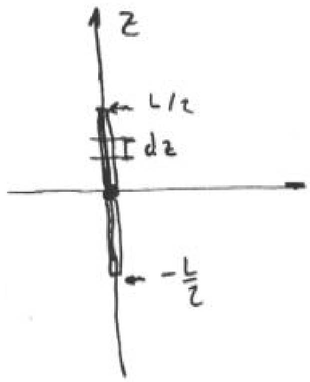
C) Antagandet i A) borde vara rimligt om

$$\frac{\omega\mu_0\sigma \, da}{4} \ll 1$$ i uttrycket för magnetfältet från den inducerade virvelströmmen

Är inte detta uppfyllt måste man räkna

$$U_{ind} = -\frac{d\phi^{yttre}}{dt} - \frac{d\phi^{virvel}}{dt}$$

4



$$i(z,t) = I_0\left(1 - \frac{2|z|}{L}\right)\cos\omega t$$

$$-\frac{L}{2} \le z \le \frac{L}{2}$$

Kontinuitetsekvationen ger

$$i(z+dz,t) - i(z,t) = -\frac{\partial \rho_\ell}{\partial t}\,dz$$

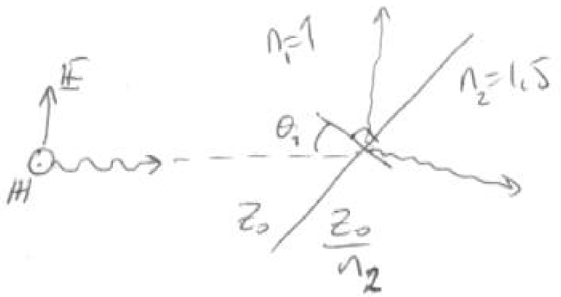
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho_\ell}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \rho_\ell}{\partial t} = -\dfrac{-I_0 2}{L}\cos(\omega t) & z > 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \rho_\ell}{\partial t} = -\dfrac{I_0 2}{L}\cos(\omega t) & z < 0 \end{cases}$$

Integrerar map t för att få fram ρ_ℓ:

$$\begin{cases} \rho_\ell = \displaystyle\int_0^t \frac{I_0 2}{L}\cos(\omega t')\,dt' = \frac{2I_0}{L\omega}\sin(\omega t) & z > 0 \\[2ex] \rho_\ell \displaystyle\int_0^t -\frac{2I_0}{L}\cos(\omega t')\,dt' = \frac{-2I_0}{L\omega}\sin\omega t & z < 0 \end{cases}$$

5



Brewstervinkeln $\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,5}{1} \Rightarrow \theta_B = 56,31°$

$\Rightarrow \quad \theta_i = 56,31° + 3° = 59,31°$

Snells brytningslag ger transmissionsvinkeln θ_t

$\sin\theta_i = 1,5 \sin\theta_t \quad \Rightarrow \quad \theta_t = 34,98°$

Reflektionskoeff för fält:

$$\Gamma = \frac{(Z_0/n_2)\cos\theta_t - Z_0\cos\theta_i}{(Z_0/n_2)\cos\theta_t + Z_0\cos\theta_i} = 0,0339$$

För effekt:

$R = |\Gamma|^2 = 1,1 \cdot 10^{-3}$