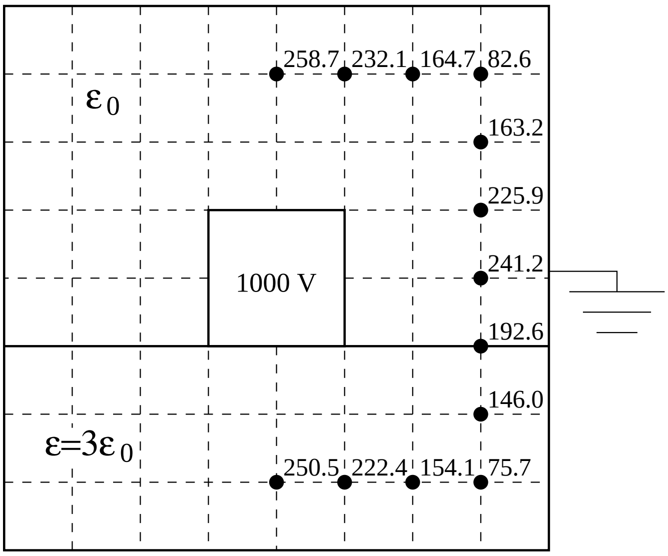
Fält 23. Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2.
EEF031 26/8 2002 kl. 14.15-18.15

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Mikael Persson Tel. ankn. 1576
Lösningar:	anslås på kursens hemsida
Resultatet:	anslås på kursens hemsida senast 16/9 2002
Granskning:	sker 17/9 klockan 11.45-13.00
Betygen:	sändes till betygsexpeditionen senast 20/9 2002
Kom ihåg	Poängavdrag göres för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

1

Problemlösningsdel

Figuren nedan visar tvärsnittet av ett långt metallrör med kvadratiskt tvärsnitt med längden 8 cm. I mitten av röret vilar en kvadratisk metallstång med sidan 2 cm på ett dielektrikum med den relativa dielektricitetskonstanten 3. Resten av volymen mellan de yttre och inre ledarna är fylld med luft. Man lägger en spänning på 1000 V mellan ledarna och löser sedan Laplaces ekvation i noderna i det kvadratiska rutnätet i figuren. I figuren visas några av de beräknade potentialvärdena.



A) Använd de i figuren visade potentialvärdena för att beräkna laddningen på den inre ledaren. Glöm ej att ta hänsyn till de två områdena med olika ϵ. 6 poäng

B) Beräkna kapacitansen per längdenhet. 2 poäng

Förståelsedel

C) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket. 1 poäng

D) Kirchoffs strömlag är relaterad till ett grundläggande uttryck i denna kurs. Vilket? På vilket sätt är de relaterade? 1 poäng

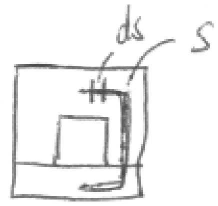
E) Beskriv med egna ord vad kapacitans är. 1 poäng

F) Om vi låter hela området mellan de två ledarna bestå av material med dielektricitetskonstanten $\epsilon = 3\epsilon_0$, hur skulle då kapacitansen per längdenhet hos ovanstående ledare förändras? Motivera ditt svar. 1 poäng

Lösningar till tenta 2002-04-03 (Fält 22)

1 Lägg en Gaussyta mellan röret och gridpunkterna med kända potentialer.
Pga symmetrin räcker det att göra beräkningarna på halva området, den halvan där potentialvärdena är givna.
Diskretisera sedan Gauss lag och med E-fältet som numeriskt approximerad med hjälp av givna potentialvärden fås, $E = -\nabla U \approx \frac{U_i - U_0}{\Delta}$

Vi beräknar linjeladdningstätheten



$$\frac{\rho_{e,\text{innesluten}}}{2} = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \approx \sum_S \varepsilon_i E_i ds_i =$$

$$= \varepsilon_0 \left[\frac{1}{2} 258{,}7 + 232{,}1 + 164{,}7 + 82{,}6 + 163{,}2 + 225{,}9 + 241{,}2 + \frac{1}{2} \cdot 192{,}6 \right] + 3\varepsilon_0 \left[\frac{1}{2} \cdot 192{,}6 + 146{,}0 + 75{,}7 + 154{,}1 + 222{,}4 + \frac{1}{2} 250{,}5 \right] \Rightarrow$$

$$\rho_{e,\text{innesluten}} = 6{,}72 \cdot 10^{-8} \ C/m$$

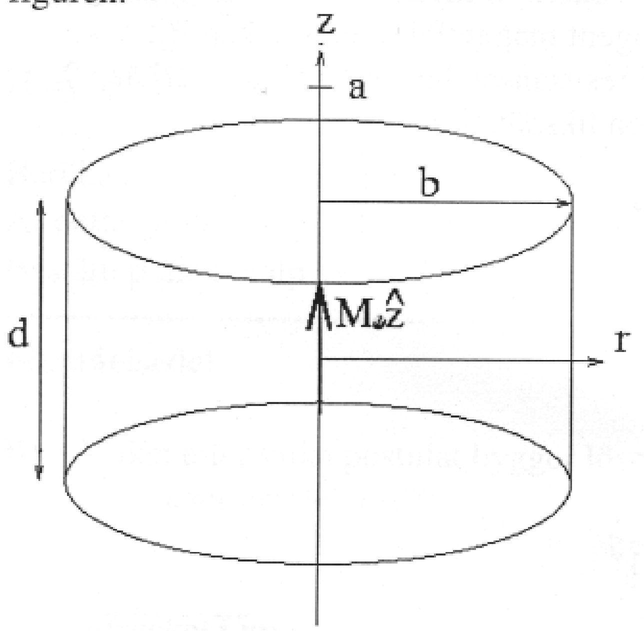
Kapacitans per längdenhet

$$C_\ell = \frac{\rho_e}{\Delta V} = \frac{6{,}72 \cdot 10^{-8}}{1000} \ F/m = 67{,}2 \ pF/m$$

2.

Problemlösningsdel

En cylindrisk permanentmagnet har konstant magnetisering $M=M_0 \hat{z}$ enligt figuren.



A) Beräkna Magnetiseringsströmtätheten och ytmagnetiseringsströmtätheten.

4 poäng

B)Beräkna magnetfältet i en punkt z=a, x=0, y=0 ovanför magneten

4 poäng

Förståelsedel

C) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur.
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket **1poäng**

D) Kraften d**F**=**J**x**B** dV kan under vissa omständigheter övergå i formen F=BIL som vi känner till från gymansiet. Rita en bild och visa hur och under vilka förhållanden detta kan ske. **1poäng**

E) Jämför de olika metoder som vi använt i kursen för att beräkna magnetfält från strömförande ledare. **1poäng**

F) Med en av GUI'sarna räknade vi på en cylindrisk permanentmagnet. Magnetfältet visade sig vara väldigt lika magnetfältet från en tätlindad solenoid. Förklara varför. **1poäng**

2)

Magnetiseringsströmmar:

Magnetiseringsströmtäthet:

$$\mathbb{J}_{mv} = \nabla \times \mathbb{M} = \nabla \times (M_0 \hat{z}) = 0$$

Ytmagnetiseringsströmtäthet:

$$\mathbb{J}_{ms} = \mathbb{M} \times \hat{n} = M_0 \hat{z} \times \begin{cases} +\hat{z} & \text{på toppen} \\ \hat{r} & \text{på mantelytan} \\ -\hat{z} & \text{på botten} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ M_0 \hat{\varphi} \\ 0 \end{cases}$$

B-fältet fås som:

$$\mathbb{B}(R_2) = \int_{S_{mantel}} \frac{\mu_0 \mathbb{J}_{ms}(\mathbb{R}_1) \times \mathbb{R}_{12}}{4\pi R_{12}^3} \, dS_1$$

$$\mathbb{R}_1 = b\hat{r} + z_1\hat{z} \qquad \text{(källpt)}$$
$$\mathbb{R}_2 = a\hat{z} \qquad \text{(fältpt)}$$
$$\mathbb{R}_{12} = \mathbb{R}_2 - \mathbb{R}_1 = -b\hat{r} + (a - z_1)\hat{z}$$
$$R_{12} = \sqrt{b^2 + (a-z_1)^2}$$

$$\mathbb{J}_{ms} \times \mathbb{R}_{12} = M_0 \hat{\varphi} \times \left(-b\hat{r} + (a-z_1)\hat{z}\right) = M_0 \left(b\hat{z} + (a-z_1)\hat{r}\right)$$

Pga symmetri ser vi att $\mathbb{B}(\mathbb{R}_2) = B_z(\mathbb{R}_2)\,\hat{z}$

$$B_z(R_2 = a\hat{z}) = \int_{z_1=-d/2}^{d/2} \frac{\mu_0 \, M_0 \, b \, \hat{z}}{4\pi \, (b^2 + (a-z_1)^2)^{3/2}} \, 2\pi b \, dz_1 =$$

$$= \frac{\mu_0 b^2 M_0 \hat{z}}{2} \int_{z_1=-d/2}^{d/2} \frac{dz_1}{(b^2+(a-z_1)^2)^{3/2}} = \left\{ a - z_1 = z' \Rightarrow \frac{dz'}{dz_1} = -1 \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 b^2 M_0 \hat{z}}{2} \int_{a+d/2}^{a-d/2} \frac{-dz'}{(b^2 + (z')^2)^{3/2}} = \frac{-\mu_0 b^2 M_0 \hat{z}}{2} \left[\frac{z'}{b^2 \sqrt{z'^2 + b^2}} \right]_{a+d/2}^{a-d/2}$$

$$= -\frac{\mu_0 b^2 M_0 \hat{z}}{2} \left[\frac{a - d/2}{b^2 \sqrt{(a-\frac{d}{2})^2 + b^2}} - \frac{a + d/2}{b^2 \sqrt{(a+\frac{d}{2})^2 + b^2}} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0 M_0 \hat{z}}{2} \left[\frac{a + d/2}{\sqrt{(a+\frac{d}{2})^2 + b^2}} - \frac{a - d/2}{\sqrt{(a-\frac{d}{2})^2 + b^2}} \right]$$

3.

Problemlösningsdel

A) Emilia står på marken nedanför en kraftledning som är ett tvåledarsystem. Hon har en spole och ett oscilloskop med sig. Gör nödvändiga geometriska antaganden och visa hur hon kan beräkna toppvärdet på spänningen i kraftledningen. **8 poäng**

Förståelsedel

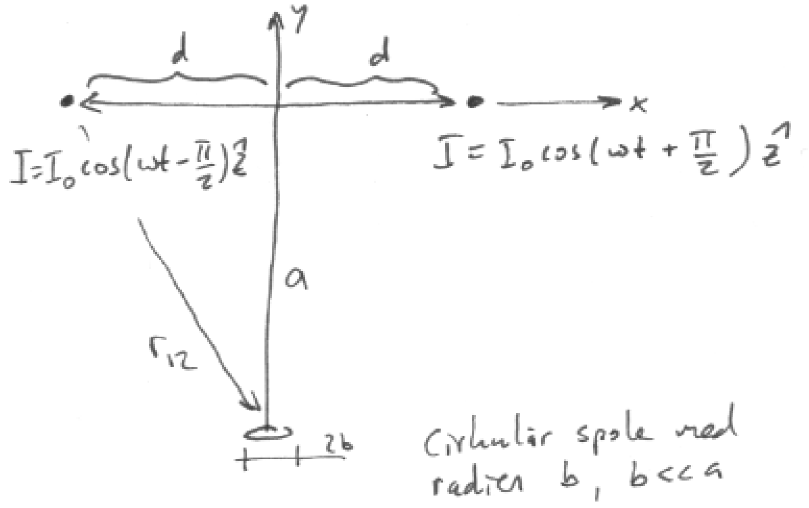
B) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Hur skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? **1poäng**

C) Beskriv begreppet induktion kortfattat utan att använda formler.
1poäng

D) Beskriv kortfattat vad som händer med laddningar på en ledande stång som rör sig i ett statiskt magnetfält. **1poäng**

E) Om man rent hypotetiskt skulle höja frekvensen i kraftledningssystemet i uppgift **A)** fungerar så småningom inte räkningen längre. Varför?
1poäng

3A



Magnetfältet från oändligt lång rak ledare:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_{12}}\hat{\varphi}$$

som i uppg. 2 tecknar vi $\hat{\varphi}$ $\quad \hat{\varphi} = \frac{\hat{x}a - \hat{y}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

Summerar bidraget från de båda ledarna i pt $y=-a$ $x=0$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi\sqrt{d^2+a^2}}\left(I_0\cos(\omega t - \tfrac{\pi}{2})\frac{\hat{x}a+\hat{y}d}{\sqrt{d^2+a^2}} + I_0\cos(\omega t+\tfrac{\pi}{2})\frac{\hat{x}a-\hat{y}d}{\sqrt{d^2+a^2}}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi(d^2+a^2)}\left(I_0\underbrace{(\cos(\omega t-\tfrac{\pi}{2})+\cos(\omega t+\tfrac{\pi}{2}))}_{2\cos\omega t\cos\frac{\pi}{2}=0}a\hat{x} + I_0(\cos(\omega t-\tfrac{\pi}{2})-\cos(\omega t+\tfrac{\pi}{2}))\hat{y}d\right)$$

Lägger alltså spolen i xz-planet. Flödet genom spolen utgörs enbart av $\hat{y}$-komponenten. $\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$, men om $b<<a$ kan integralen lätt beräknas som $\Phi = \mathbf{B}\cdot\pi b^2$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_0 d}{2\pi(d^2+a^2)}\left(\cos(\omega t-\tfrac{\pi}{2}) - \cos(\omega t+\tfrac{\pi}{2})\right) = \frac{\mu_0 I_0 d}{2\pi(d^2+a^2)}\left(-2\cos\omega t\sin\tfrac{\pi}{2}\right)$$

Inducerad emk beräknas som $V = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{-2\mu_0 I_0 d}{2\pi(d^2+a^2)}\frac{\sin\omega t}{\omega}$$

På oscilloskopet avläser $|V|_{max}$

Varvid strömmen I_0 fås som

$$\frac{\mu_0 I_0 d}{\pi(d^2+a^2)\omega} = |V|_{max} \Rightarrow I_0 = \frac{|V|_{max}\cdot\pi(d^2+a^2)\omega}{\mu_0\cdot I_0\cdot d}$$

4.

Problemlösningsdel

En cirkulärt polariserad plan våg i vakuum träffar en plan gränsyta till ett förlustfritt dielektrikum med dielektricitetstalet $\varepsilon_r = 1.69$ under Brewstervinkel.

A) Skriv upp ett tidsberoende uttryck på det elektriska fältet hos den infallande vågen uttryckt i två linjärt polariserade vågor och rita en figur som visar hur dessa vågor faller in mot gränsytan. **2poäng**

B) Beräkna reflektionskoefficienterna för fälten. **2poäng**

C) Beräkna transmissionskoefficienterna för fälten. **2poäng**

D) Beräkna tidsmedelvärdena av Poyntingvektorerna hos infallande, reflekterad och transmitterad våg. **2poäng**

Förståelsedel

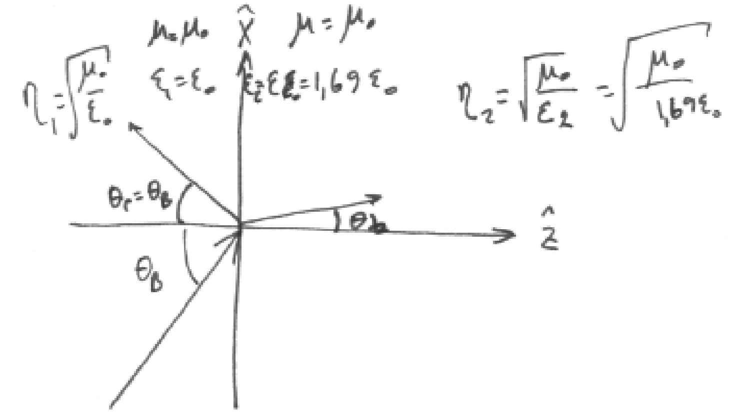
E) Vilket eller vilka postulat bygger lösningarna ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det använda uttrycket i uppgift **B)** **1poäng**

F) Beskriv vad poyntingvektorn uttrycker i ord. **1poäng**

G) Beskriv kortfattat begreppen vågimpedans och fashastighet. **1poäng**

H) Vad har inträngningsdjupet för betydelse vid uppvärmning av mat i en mikrovågsugn? **1poäng**

4A



Brewstervinkeln beräknar vi som $\tan\theta_B=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=\sqrt{1{,}69}$

$\theta_B=52{,}4^\circ$

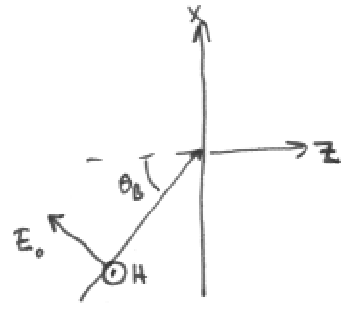
Cirkulärpolariserat betyder att fasförskjutningen är $\frac{\pi}{2}$ mellan de två vinkelrätt linjärpolariserade vågorna

Infallande vågen kan då skrivas som:

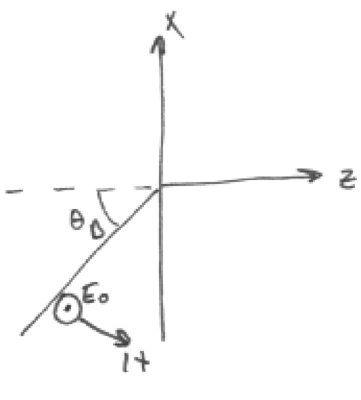
$$\mathbf{E}=E_0(\hat{x}\cos\theta_B-\hat{z}\sin\theta_B)\cos(\omega t-k_1[x\sin\theta_B+z\cos\theta_B])+$$
$$E_0\,\hat{y}\sin(\omega t-k_1[x\sin\theta_B+z\cos\theta_B])$$

Där k_1 är vågvektorn $k_1=\frac{2\pi}{\lambda}$

Den parallella polariseringen:



Vinkelrät polarisering



4B

$$\Gamma_{\parallel}=\left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)_{\parallel}=0$$

$\boxed{\text{Snells lag ger } \theta_t:\ \sin\theta_t=\frac{\eta_2}{\eta_1}\sin\theta_B}$

$$\Gamma_{\perp}=\left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)_{\perp}=\frac{\eta_2\cos\theta_B-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_B+\eta_1\cos\theta_t}=-0{,}26$$

4C

$$\tau_{\parallel} = \left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}}\right)_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_B}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_B} = 0{,}77$$

$$\tau_{\perp} \left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}}\right)_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_B}{\eta_2 \cos\theta_B + \eta_1 \cos\theta_t} = 0{,}74$$

4D Tidsmedelvärdet av Poyntingvektorerna

$$P_{medel} = \frac{E_0^2}{2\eta}$$

Infallande våg

$$P_{i\,medel} = \frac{E_0^2}{2\eta_1} \cdot 2 \qquad ; \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

Reflekterad:

$$P_{r\,medel} = \frac{\left[E_0 \cdot (-0{,}26)\right]^2}{2\eta_1}$$

Transmitterad:

$$P_{t\,medel} = \frac{E_0^2 \left(0{,}77^2 + 0{,}74^2\right)}{2\eta_2} = \frac{E_0^2 \left(0{,}77^2 + 0{,}74^2\right)}{2 \cdot \frac{\eta_1}{1{,}3}} = \frac{E_0^2}{2\eta_1} 1{,}48$$

5.

Problemlösningsdel

A) En hertzdipol i luft strålar med en medeleffekt av 50 W. Vad har E och H-fälten för amplituder i strålningszonen? **7poäng**

B) Sammafatta din lösning mycket kortfattat
Gärna i punktform **1poäng**

Förståelsedel

C) Vilka postulat bygger problemlösningen ovan på? Vad säger de i ord? **1poäng**

D) Vad är strålningsresistans? Beskriv begreppet med ord och dess betydelse för antenner. **1poäng**

E) Vad är antennförstärkning? Beskriv begreppet med ord och dess betydelse för antenner. **1poäng**

F) Vad är direktivitet? Beskriv begreppet med ord och dess betydelse för antenner. **1poäng**

5 a)

$$\$_{med} = \hat{R} \cdot \frac{|\bar{E}|^2}{2Z_0} = G_d(\theta,\varphi) \cdot \frac{P_{med}}{4\pi R^2} \hat{R}$$

$$|\bar{E}|^2 = \cancel{2} Z_0 \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \sin^2\theta \cdot \frac{P_{med}}{4\pi R^2}$$

$$|\bar{E}| = \sqrt{\frac{3}{4\pi} 50} \cdot \frac{\sin\theta}{R}$$

$$|H| = \frac{|E|}{Z_0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi} 50} \, \frac{\sin\theta}{Z_0 R}$$