Fält 22. Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2.
EEF031 Onsdagen den 3 april 2002 kl. 14.15-18.15.

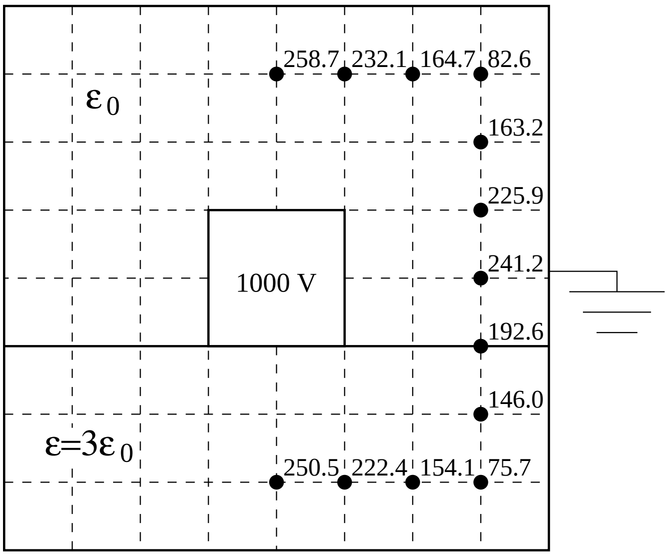
Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen för elektromagnetisk fältteori.
Förfrågningar:	Mikael Persson Tel. ankn. 1576.
Lösningar:	Anslås på kursens hemsida efter tentamenstidens slut.
Resultat:	Anslås på kursens hemsida senast den 24 april.
Granskning:	Torsdagen den 25 april, kl. 12.00-13.00 i Vasa 7 hos Mikael eller Andreas.
Betyg:	Sänds till betygsexpeditionen senast den 30 april.
Kom ihåg:	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar

Lycka till!

1

Problemlösningsdel

Figuren nedan visar tvärsnittet av ett långt metallrör med kvadratiskt tvärsnitt med längden 8 cm. I mitten av röret vilar en kvadratisk metallstång med sidan 2 cm på ett dielektrikum med den relativa dielektricitetskonstanten 3. Resten av volymen mellan de yttre och inre ledarna är fylld med luft. Man lägger en spänning på 1000 V mellan ledarna och löser sedan Laplaces ekvation i noderna i det kvadratiska rutnätet i figuren. I figuren visas några av de beräknade potentialvärdena.



A) Använd de i figuren visade potentialvärdena för att beräkna laddningen på den inre ledaren. Glöm ej att ta hänsyn till de två områdena med olika ϵ. 6 poäng

B) Beräkna kapacitansen per längdenhet. 2 poäng

Förståelsedel

C) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket. 1 poäng

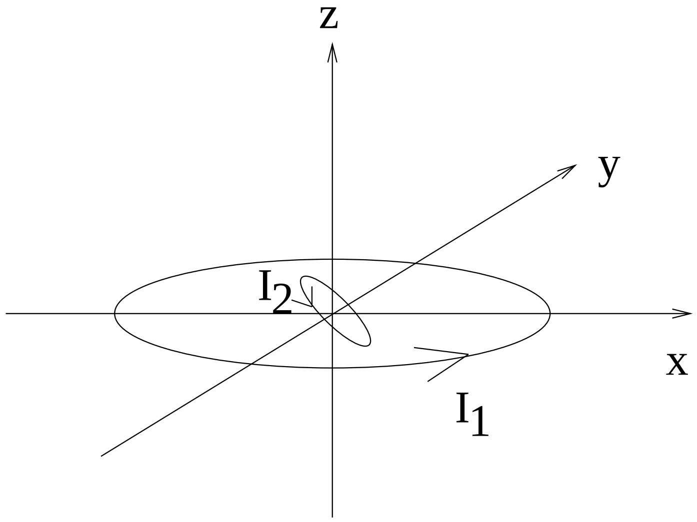
D) Kirchoffs strömlag är relaterad till ett grundläggande uttryck i denna kurs. Vilket? På vilket sätt är de relaterade? 1 poäng

E) Beskriv med egna ord vad kapacitans är. 1 poäng

F) Om vi låter hela området mellan de två ledarna bestå av material med dielektricitetskonstanten $\epsilon = 3\epsilon_0$, hur skulle då kapacitansen per längdenhet hos ovanstående ledare förändras? Motivera ditt svar. 1 poäng

Problemlösningsdel

En cirkulär slinga med radien b befinner sig i planet $z = 0$. I planet $z = -x$ befinner sig en liten cirkulär slinga med radien a, där $a \ll b$. Båda slingorna har centrum i origo och normalerna till ytorna som cirklarna spänner upp är $\hat{z}$ respektive $(\hat{x} + \hat{z})/\sqrt{2}$. Strömmen i den stora slingan är I_1 och i den lilla slingan I_2.



A)	Bestäm absolutbeloppet av den ömsesidiga induktansen mellan slingorna.	4 poäng
B)	Beräkna det vridande momentet **T** på den stora slingan.	4 poäng

---

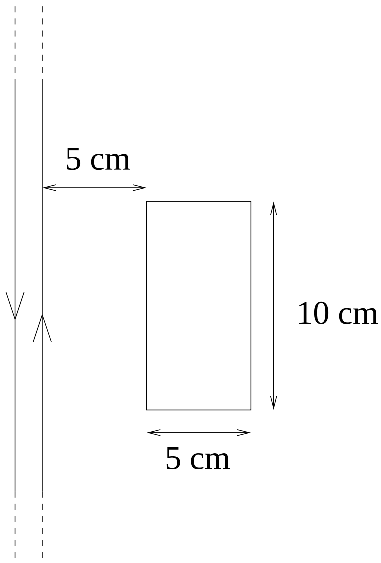
Förståelsedel

C)	Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på? Vad säger det/de i ord? Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur? Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket.	1 poäng
D)	Beskriv kortfattat vad ömsesidig induktans och självinduktans är.	1 poäng
E)	Beskriv kortfattat principen för en likströmsmotor. Rita gärna figur.	1 poäng
F)	Vad är en magnetisk dipol? Hur ser fältet från en sådan ut? Beskriv kortfattat.	1 poäng

3

Problemlösningsdel

Vi ska undersöka om en sladd till en dammsugare kan ge störningar på en rektangulär slinga som finns i närheten. Effekten i dammsugaren är 2500 W vid spänningen 230 V (effektiv-värde). Avstånd mellan till- och frånledare är 0.5 cm och ledningsradien är 1 mm.



A) Vilken inducerad spänning får vi i en rektangulär slinga som är placerad 5 cm ifrån sladden. 8 poäng

---

Förståelsedel

B) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket. 1 poäng

C) Beskriv med egna ord vad induktion är? 1 poäng

D) Beskriv kortfattat Lenz lag. 1 poäng

E) Beskriv kortfatat med egna ord vad som händer med laddningar på en ledande stång som rör sig i ett statiskt magnetfält. 1 poäng

4

Problemlösningsdel

En cirkulärt polariserad elektromagnetisk våg med Poyntingvektorn $S_{med} = 500\text{W/m}^2$ träffar under infallsvinkeln 45 grader en plan vattenyta. Brytningsindex för vatten är $n = 1.3$.

A)	Beräkna Poyntingvektorn hos den transmitterade vågen.	4 poäng
B)	Beräkna Poyntingvektorn hos den reflekterade vågen.	4 poäng

---

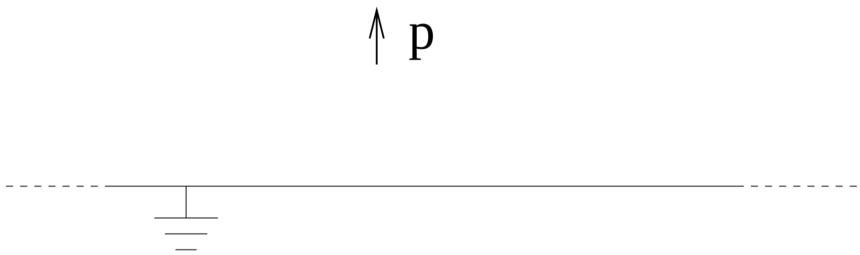
Förståelsedel

C)	Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på? Vad säger det/de i ord? Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur? Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket.	1 poäng
D)	Beskriv med egna ord vad Poyntingvektorn är.	1 poäng
E)	Beskriv kortfattat begreppen vågimpedans och grupphastighet.	1 poäng
F)	Beskriv kortfattat begreppen total inre reflektion, Brewstervinkel och inträngningsdjup.	1 poäng

5

Problemlösningsdel

En Hertzdipolantenn med $\mathbf{p}(t) = \hat{z}p_0 \cos \omega t$ befinner sig i luft i punkten (0,0,a) i kartesiska koordinater. I (x,y)–planet ligger ett mycket stort, mycket gott ledande plan. Antag att planet befinner sig i strålningszonen till dipolen.



A) Använd speglingsmetoden och randvillkoret för H-fältet för att beräkna den inducerade ytströmtätheten som antennen orsakar i metallplanet. 8 poäng

---

Förståelsedel

B) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket. 1 poäng

C) Vad är en antenns strålningsresistans? 1 poäng

D) Vad är en Hertzdipol? 1 poäng

E) Var ligger antennens strålningszon? 1 poäng

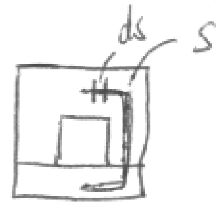
Lösningar till tenta 2002-04-03 (Fält 22)

1 Lägg en Gaussyta mellan röret och gridpunkterna med kända potentialer.

Pga symmetrin räcker det att göra beräkningarna på halva området, den halvan där potentialvärdena är givna.

Diskretisera sedan Gauss lag och med E-fältet som numeriskt approximerad med hjälp av givna potentialvärden fås, $E = -\nabla U \approx \frac{U_1 - U_0}{\Delta}$

Vi beräknar linjeladdningstätheten



$$\frac{\rho_{\ell,\text{innesluten}}}{2} = \int_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} \approx \sum_S \varepsilon_i E_i ds_i =$$

$$= \varepsilon_0\left[\tfrac{1}{2}\,258{,}7 + 232{,}1 + 164{,}7 + 82{,}6 + 163{,}2 + 225{,}9 + 241{,}2 + \tfrac{1}{2}\cdot 192{,}6\right] + 3\varepsilon_0\left[\tfrac{1}{2}\cdot 192{,}6 + 146{,}0 + 75{,}7 + 154{,}1 + 222{,}4 + \tfrac{1}{2}\,250{,}5\right] \Rightarrow$$

$$\rho_{\ell,\text{innesluten}} = 6{,}72\cdot 10^{-8}\ C/m$$

Kapacitans per längdenhet

$$C_\ell = \frac{\rho_\ell}{\Delta V} = \frac{6{,}72\cdot 10^{-8}}{1000}\ F/m = 67{,}2\ pF/m$$

2 Eftersom $a \ll b$ kan vi approximera den lilla slingan med en magnetisk dipol med det magnetiska momentet $\mathbf{m} = \frac{I_2 \pi a^2}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{z})$

Fältet på z-axeln från den stora slingan fås som

$$B_1(0,0,z) = \frac{\mu_0 I_1}{2} \frac{b^2}{(z^2+b^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Fältet i origo från den stora slingan fås således till

$$B_1(0,0,0) = \frac{\mu_0 I_1}{2b} \hat{z}$$

Flödet genom den lilla slingan kan vi då beräkna till

$$\Phi_{12} = \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{z}) \cdot B_1(0,0,0) = \frac{\mu_0 I_1}{2\sqrt{2} b} \pi a^2$$

Ömsesidig induktans $L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0}{2\sqrt{2} b} \pi a^2$

Vridmomentet på den lilla slingan från den stora fås som $T = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_1(0,0,0)$. Eftersom inga yttre moment verkar på slingorna måste det totala momentet vara noll. Därmed ges momentet på den stora slingan som

$$T = -\mathbf{m} \times \mathbf{B}_1(0,0,0) = -\frac{I_2 \pi a^2}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{z}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2b} \hat{z} = I_2 \pi a^2 \frac{\mu_0 I_1}{2\sqrt{2} b} \hat{y}$$

3 Fältet runt en ensam ledare: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Flödestätheten från de båda ledarna fås då, om vi räknar r från den högra ledaren, som:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(r+0{,}005)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+0{,}005}\right)$$

Beräkna flödet genom slingan, tecknar därför $d\phi$:

$$d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+0{,}005}\right)\cdot 0{,}1\cdot dr \Rightarrow$$

$$\phi = \frac{\mu_0 I\cdot 0{,}1}{2\pi}\int_{0{,}05}^{0{,}1}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+0{,}005}\right)dr = \frac{\mu_0 I\cdot 0{,}1}{2\pi}\Big[\ln r - \ln(r+0{,}005)\Big]_{0{,}05}^{0{,}1} =$$

$$= \frac{\mu_0 I\cdot 0{,}1}{2\pi}\left[\ln\frac{0{,}1}{0{,}1+0{,}005} - \ln\frac{0{,}05}{0{,}05+0{,}005}\right] = 930{,}4\cdot 10^{-12}\, I$$

För att beräkna toppvärdet på strömmen $\hat{\imath}$ använder vi sambandet mellan effekt, spänning och ström:

$$P = \frac{\hat{u}\,\hat{\imath}}{2} \Rightarrow \hat{\imath} = \frac{2P}{\hat{u}} = \frac{2\cdot 2500}{230\cdot\sqrt{2}} = 15{,}37\,A$$

Då kan vi teckna strömmen som, om vi förutsätter 50 Hz:

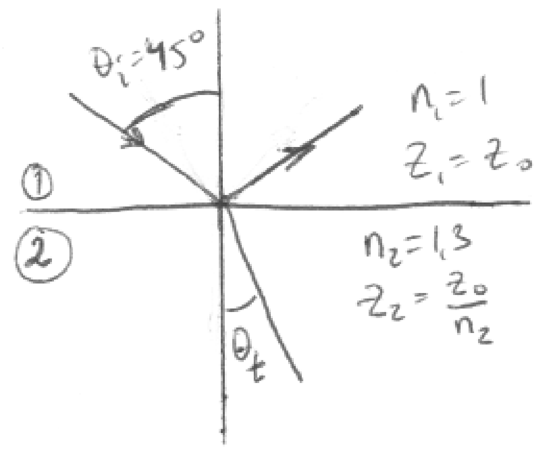
$$I = 15{,}37\cos(2\pi 50\cdot t)$$

Inducerad spänning: $u = -\frac{d\phi}{dt} = -930{,}4\cdot 10^{-12}\,\frac{dI}{dt} =$

$$= 930{,}4\cdot 10^{-12}\cdot 15{,}37\cdot 2\pi 50\,\sin(2\pi 50 t)$$

$$\approx 4{,}5\sin(2\pi 50\cdot t)\ \mu V$$

4



θ_t fås ur sambandet $n_1 \sin 45° = n_2 \sin\theta_t \Rightarrow \sin\theta_t = \frac{1}{1{,}3\cdot\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \cos\theta_t = \sqrt{1-\frac{1}{1{,}3^2\, 2}} = \sqrt{1-\frac{1}{3{,}38}}$$

Beräkna reflektionskoefficienten för den vinkelräta och den parallella fältkomponenter:

$$\left(\frac{\bar{E}_{r0}}{\bar{E}_{i0}}\right)_\perp = \frac{\frac{1}{Z_1}\cos\theta_i - \frac{1}{Z_2}\cos\theta_t}{\frac{1}{Z_1}\cos\theta_i + \frac{1}{Z_2}\cos\theta_t} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1{,}3\sqrt{1-\frac{1}{3{,}38}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1{,}3\sqrt{1-\frac{1}{3{,}38}}} \approx -0{,}2134$$

$$\left(\frac{\bar{E}_{r0}}{\bar{E}_{i0}}\right)_\parallel \quad \frac{-Z_1\cos\theta_i + Z_2\cos\theta_t}{Z_1\cos\theta_i + Z_2\cos\theta_t} = \frac{-1{,}3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{1-\frac{1}{3{,}38}}}{1{,}3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{1-\frac{1}{3{,}38}}} \approx -0{,}0456$$

För den infallande vågen har vi Poyntingvektorn:

$$S_i = \frac{1}{2}\frac{|\bar{E}_{i0\perp}|^2}{Z_0} + \frac{1}{2}\frac{|\bar{E}_{i0\parallel}|^2}{Z_0} = 500$$

Med $\bar{E}_{i0\perp} = \bar{E}_{i0\parallel} = \bar{E}_{i0}$ fås:

$$\frac{|\bar{E}_{i0}|^2}{Z_0} = 500$$

Poyntingvektorn för den reflekterade komponenten:

$$S_r = \frac{1}{2}\frac{|\bar{E}_{ro\perp}|^2}{Z_0} + \frac{1}{2}\frac{|\bar{E}_{ro\parallel}|^2}{Z_0} = \frac{1}{2Z_0}|\bar{E}_{io}|^2\left[(-0{,}2134)^2 + (-0{,}0956)^2\right] =$$

$$= 11{,}90\ W/m^2$$

Transmissionskoefficienterna:

$$\left(\frac{\bar{E}_{to}}{\bar{E}_{io}}\right)_\perp = \frac{\frac{2}{Z_1}\cos\theta_i}{\frac{1}{Z_1}\cos\theta_i + \frac{1}{Z_2}\cos\theta_t} = \frac{2\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1{,}3\sqrt{1-\frac{1}{3{,}38}}} = 0{,}7866$$

$$\left(\frac{\bar{E}_{to}}{\bar{E}_{io}}\right)_\parallel = \frac{2Z_2\cos\theta_i}{Z_1\cos\theta_i + Z_2\cos\theta_t} = \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{1{,}3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{1-\frac{1}{3{,}38}}} = 0{,}8043$$

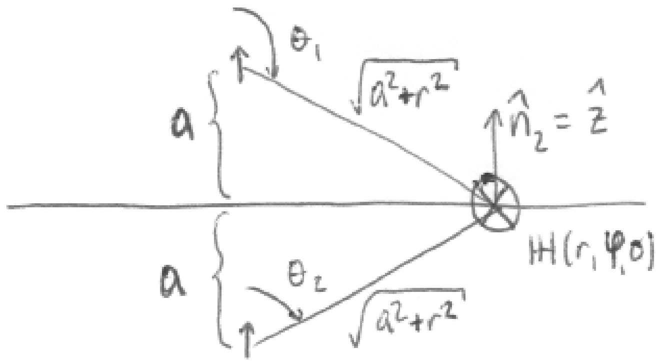
Poyntingvektorn för den transmitterade komponenten:

$$S_t = \frac{1}{2}\frac{|\bar{E}_{to\perp}|^2}{Z_2} + \frac{1}{2}\frac{|\bar{E}_{to\parallel}|^2}{Z_2} = \frac{1}{2Z_0}\cdot n_2|\bar{E}_{io}|^2\left[0{,}7866^2 + 0{,}8043^2\right] =$$

$$= 411{,}33\ W/m^2$$

5

Spegling av den svängande dipolantennen



Formeln för fältet från en dipol ger följande uttryck för vår dipol och dess spegelladdning:

$$\bar{\mathbb{H}}(r,\varphi,0) = \hat{\varphi}\, 2 \cdot \frac{-\omega^2 \bar{p}_0 \left(\frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}}\right)}{4\pi c \sqrt{a^2+r^2}} e^{-j\omega\frac{\sqrt{a^2+r^2}}{c}}$$

där $\bar{p}_0 = \frac{l\,\bar{I}_0}{j\omega}$ är dipolmomentet på komplex form

Randvillkoret för de tangentiella $\mathbb{H}$-komponenterna ger:

$\hat{n}_2 \times (\bar{\mathbb{H}}_1 - \bar{\mathbb{H}}_2) = \bar{\mathbb{J}}_s$

$\bar{\mathbb{H}}_2 = 0$ ty metallen är en god ledare

$$\bar{\mathbb{J}}_s = \hat{z} \times \hat{\varphi}\ \frac{-\omega^2 p_0 \frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}}}{2\pi c \sqrt{a^2+r^2}}\ e^{-j\omega\frac{\sqrt{a^2+r^2}}{c}} \Rightarrow$$

$$\mathbb{J}_s = \hat{r}\ \frac{\omega^2 p_0 r}{2\pi c (a^2+r^2)} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\sqrt{a^2+r^2}\right) \quad A/m$$