

Fält 20. Tentamen i Elektromagnetisk fältteori F. för F2.
EEF031 27/8 2001 kl. 14.15-18.15

Tillåtna hjälpmedel: BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori

Förfrågningar: Mikael Persson tel. 1576, Andreas Danielsson, 5052

Lösningar: anslås efter tentamens slut på kursens hemsida

Resultatet: sändes senast 14/9 2001 till studievägledningen F.

Granskning: sker på tid som anges på betygslistan

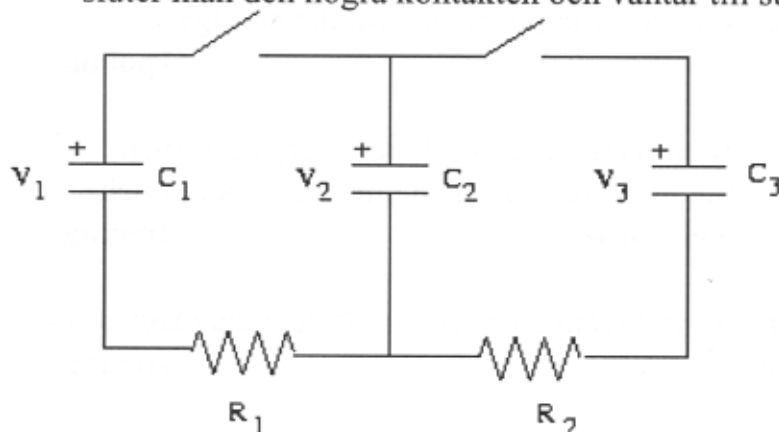
Betygen: sändes till betygsexpeditionen senast 14/9 2001

Kom ihåg att problemlösningssdelen och förståelsedelen bedöms separat.

1.

Problemlösningssdel

Tre olika kondensatorer är uppladdade med olika spänningar enligt figuren. Man sluter först den vänstra kontakten och avvaktar tills stationärtillstånd råder. Sedan sluter man den högra kontakten och väntar till stationärtillstånd råder.



A) Hur mycket värmeenergi har då sammantaget alstrats i resistanserna?

8poäng

Förståelsedel

B) Vilket eller vilka postulat ligger till grund för elektrostatiken?

Vad säger det/de i ord?

Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det använda uttrycket i uppgift A).

1poäng

C) Beskriv ett möjligt experiment för att testa postulaten

1poäng

D) Vad hade hänt med resultatet om man hade slutit båda kontakterna i uppgift A) samtidigt

1poäng

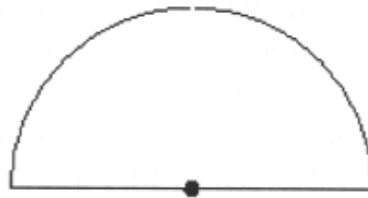
E) Kirchhoffs strömlag är relaterad till ett grundläggande uttryck i denna kurs. Vilket? På vilket sätt är de relaterade.

1poäng

2.

Problemlösningsdel

En likström flyter i en lång metallstång som klyvts på mitten och har ett tvärsnitt enligt figuren nedan.



- A) Beräkna magnetfältet till storlek och riktning i centrumaxeln av den ursprungliga stången **8poäng**

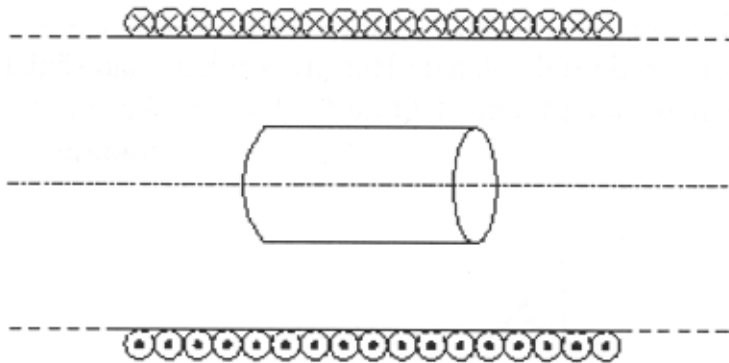
Förståelsedel

- B) Vilket eller vilka postulat ligger till grund för magnetostatiken? Vad säger det/de i ord? Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket i A) **1poäng**
- C) Kraften $d\mathbf{F}=\mathbf{J}\times\mathbf{B} dV$ kan under vissa omständigheter övergå i formen $F=BIL$ som vi känner till från gymnasiet. Rita en bild och visa hur och under vilka förhållanden detta kan ske. **1poäng**
- D) Jämför de olika metoder som vi använt i kursen för att beräkna magnetfält från strömförande ledare. **1poäng**
- E) Beskriv hur det jordmagnetiska fältet påverkar en kompassnål. Hur kan man förklara existensen av det jordmagnetiska fältet? **1poäng**

3.

Problemlösningssedel

En kort massiv metallcylinder placeras inne i en mycket lång spole som matas med växelström för att värmas upp.



- A) Gör lämpliga antaganden om frekvensen och beräkna effektutvecklingen i cylindern. **8poäng**
-

Förståelsedel

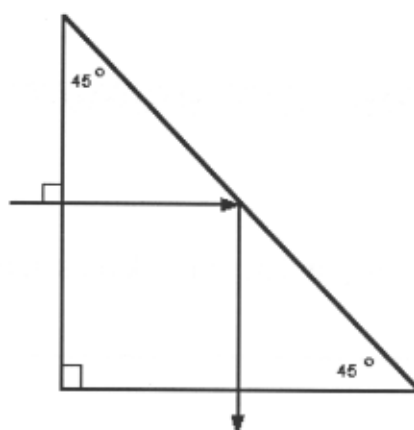
- B) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Hur skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? **1poäng**
- C) Beskriv begreppet induktion kortfattat utan att använda formler. **1poäng**
- D) Beskriv kortfattat vad som händer med laddningar på en ledande stång som rör sig i ett statiskt magnetfält. **1poäng**
- E) Vad händer om man skulle höja frekvensen i problemet i uppgift A) **1poäng**

4.

Problemlösningssedel

- A) En ljusstråle med våglängden 450,0 nm sänds in mot ett prisma enligt figuren och totalreflekteras 90 grader. Prismat har brytningsindexen 1,6. Beräkna avståndet från långsidan till den punkt där E-fältets minskat med $1/e$ jämfört med precis vid ytan. Antag att E-fältet är polariserat vinkelrätt mot infallsplanet. Hur förändras ditt svar om E-fältet istället är polariserat parallellt med infallsplanet? Hur mycket kan man sänka brytningsindex i prismat för att totalreflektion fortfarande ska ske vid de givna vinklarna?

8poäng



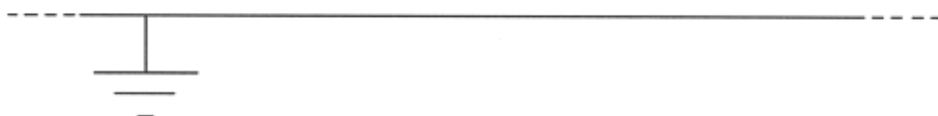
Förståelsedel

- B) Vilka postulat bygger lösningen av problemet i A) på? **1poäng**
C) Vad är totalreflektion och vilka villkor måste vara uppfyllda för att totalreflektion ska ske? **1poäng**
D) Beskriv kortfattat hur man kan härleda Snells lag. **1poäng**
E) Nämn någon tillämpning på fenomenet totalreflektion. **1poäng**

5.

En Hertz dipol antenn med $\mathbf{p}(t) = z p_0 \cos(\omega t)$ befinner sig i luft i punkten $(0,0,a)$ i kartesiska koordinater. I planet $z=0$ ligger ett mycket stort mycket gott ledande jordat plan. Antag att planet befinner sig i strålningszonen till dipolen.

$\uparrow \mathbf{p}$



- A) Använd speglingsmetoden och randvilkoret för H-fältet för att beräkna den inducerade ytströmtätheten som antennen orsakar i metallplanet.

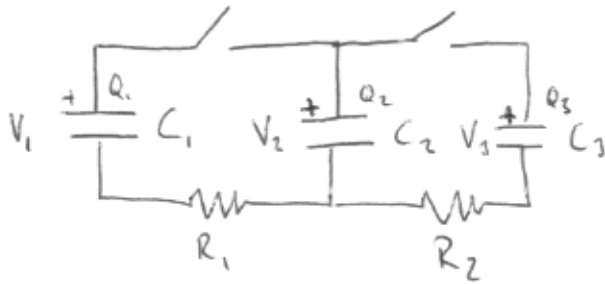
8poäng

Förståelsedel

- B) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det använda uttrycket i uppgift A). 1poäng
- C) Vad är en antens strålningsresistans 1poäng
- D) Hur skulle antennförstärkning och direktivitet kunna användas för att förbättra mobiltelefonkommunikation 1poäng
- E) Vad är en Hertzdipol? 1poäng

27/8-2001

1



Vi har

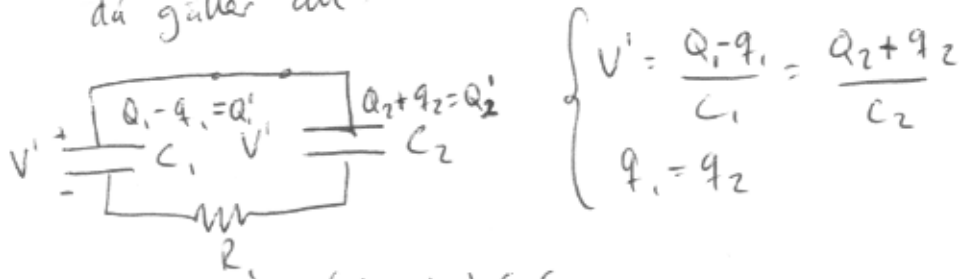
- $V_1 = 1 \text{ V}$
- $V_2 = 2 \text{ V}$
- $V_3 = 3 \text{ V}$
- $C_1 = 1 \text{ pF}$
- $C_2 = 2 \text{ pF}$
- $C_3 = 3 \text{ pF}$
- $R_1 = 2 \text{ } \Omega$
- $R_3 = 3 \text{ } \Omega$

Innan vi sluter någon kontakt gäller:

$$Q_1 = C_1 V_1 \quad Q_2 = C_2 V_2 \quad Q_3 = C_3 V_3$$

$$W_e = \frac{1}{2} (C_1 V_1^2 + C_2 V_2^2 + C_3 V_3^2)$$

Vi sluter vänstra kontakter och inväntar stationärtillstånd, då gäller att:



$$\begin{cases} V' = \frac{Q_1 - q_1}{C_1} = \frac{Q_2 + q_2}{C_2} \\ q_1 = q_2 \end{cases}$$

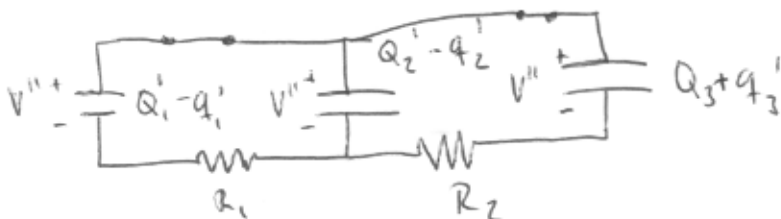
$$\Rightarrow q_1 = q_2 = \frac{(V_1 - V_2) C_1 C_2}{C_2 - C_1}$$

$$Q_1' = Q_1 - q_1 = \frac{C_1 C_2 V_2 - C_1^2 V_1}{C_2 - C_1} \quad ; \quad Q_2' = Q_2 + q_2 = \frac{C_2^2 V_2 - C_1 C_2 V_1}{C_2 - C_1}$$

$$\Rightarrow Q_1' = \frac{5}{3} \text{ pC} \quad Q_2' = \frac{10}{3} \text{ pC}$$

Resultatet har vi ju $Q_3 = 9 \text{ pC}$

Sluter nu högra kontakter



$$\text{Nu gäller } \begin{cases} V'' = \frac{Q_1' - q_1'}{C_1} = \frac{Q_2' - q_2'}{C_2} = \frac{Q_3 + q_3'}{C_3} \\ q_3' = q_1' + q_2' \end{cases}$$

Då kan vi teckna följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} q_1' + q_2' - q_3' = 0 \\ -\frac{q_2'}{2 \cdot 10^{-12}} - \frac{q_3'}{3 \cdot 10^{-12}} = \frac{4}{3} \\ -\frac{q_1'}{1 \cdot 10^{-12}} + \frac{q_2'}{2 \cdot 10^{-12}} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_1' = -\frac{2}{3} \text{ pC}$$

$$q_2' = -\frac{4}{3} \text{ pC}$$

$$q_3' = -2 \text{ pC}$$

Nu har vi

$$Q_1 - q_1' = \frac{7}{3} \text{ pC} \quad Q_2 - q_2' = \frac{14}{3} \text{ pC} \quad Q_3 + q_3' = 7 \text{ pC}$$

Energi som finns kvar i kondensatorerna beräknar vi nu som

$$W_e' = \frac{1}{2} \left(\frac{(Q_1 - q_1')^2}{C_1} + \frac{(Q_2 - q_2')^2}{C_2} + \frac{(Q_3 + q_3')^2}{C_3} \right) = \frac{49}{3} \text{ pJ}$$

Energi från början

$$W_e = \frac{1}{2} (C_1 V_1^2 + C_2 V_2^2 + C_3 V_3^2) = 18 \text{ pJ}$$

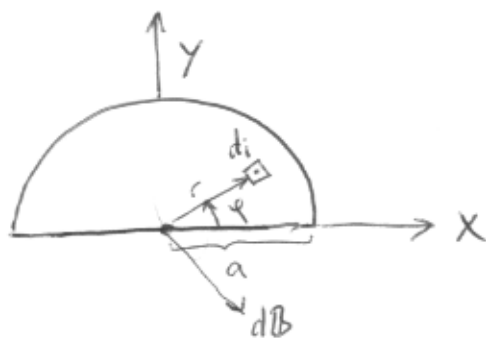
Utredlad värmeenergi i resistorerna

$$W_e - W_e' = 18 - \frac{49}{3} \text{ pJ} = \frac{5}{3} \text{ pJ}$$

Svaret är oberoende av ordningen vi sluter brytarna och det slutliga spänningsskillet över kondensatorerna blir samma om vi tex sluter båda brytarna samtidigt. Algebra blir då lite enklare och vi kan beräkna energin som utredlats i resistorerna till:

$$W_e - W_e' = \frac{1}{2} \left(C_1 V_1^2 + C_2 V_2^2 + C_3 V_3^2 - \frac{(C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3)^2}{C_1 + C_2 + C_3} \right)$$

2



I stänger flyter strömmen I_0 . Strömstätheten kan då beräknas till $J = \frac{I_0}{\frac{1}{2}\pi a^2}$

Vi kan skriva strömbidraget di som $di = J dr \cdot r d\psi$

Ampères lag ger $|dB| = \frac{\mu_0 di}{2\pi r}$

Således $dB_x = |dB| \sin\psi$ $dB_y = |dB|(-\cos\psi)$

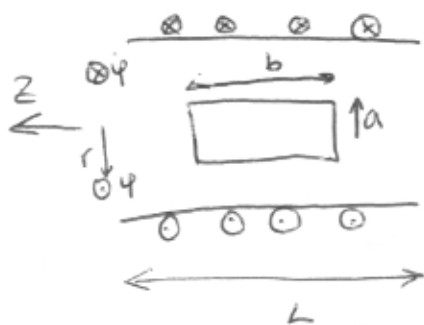
Nu integrerar vi för att få fältet i origo

$$B_x = \int_{r=0}^a \int_{\psi=0}^{\pi} dB_x = \int_{r=0}^a \int_{\psi=0}^{\pi} \frac{\mu_0 2I_0}{2\pi r \pi a^2} dr r d\psi \sin\psi =$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{\pi^2 a^2} a \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\psi d\psi}_2 = 2 \frac{\mu_0 I_0}{\pi^2 a}$$

$$B_y = \int_{r=0}^a \int_{\psi=0}^{\pi} dB_y = \frac{\mu_0 I_0}{\pi^2 a^2} a \underbrace{\int_0^{\pi} -\cos\psi d\psi}_{=0} = 0$$

3



Fältet från en lång rak spole

$$B = \hat{z} \frac{\mu_0 i N}{L}$$

$$i = I_0 \cos \omega t$$

Antar att frekvensen är låg vilket gör att vi kan räkna quasistationärt.

Metallcylindern befinner sig i B-fältet vilket gör att en E fält induceras:



Vi beräknar

$$E_{ind} = \oint E \cdot dl = E_\phi \cdot 2\pi r = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \pi r^2 B_z = \pi r^2 \frac{\mu_0 N}{L} I_0 \omega \sin \omega t$$

$$\Rightarrow E_\phi = \frac{r \mu_0 N I_0 \omega \sin \omega t}{2L}$$

Strömstätheten kan vi nu beräkna som $J_\phi = \sigma E_\phi$

Effektutveckling/volymsenhet: $J \cdot E = \sigma E_\phi^2$

Tidsmedelvärdet av effektutvecklingen:

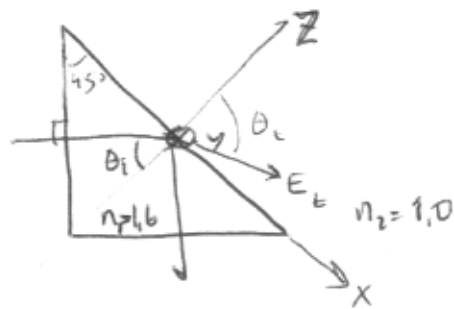
$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{2} \int_0^a \sigma \frac{(\mu_0 N I_0 \omega)^2}{(2L)^2} r^2 \cdot 2\pi r \, dr \cdot b = \frac{\sigma \mu_0^2 N^2 I_0^2 \omega^2 \pi b}{4L^2} \int_0^a r^3 \, dr = \\ &= \frac{\sigma \mu_0^2 N^2 I_0^2 \omega^2 \pi a^4 b}{16L^2} \end{aligned}$$

Vid höga frekvenser blir det lite svårare, vi kan fortfarande räkna quasistationärt. Den inducerade strömstätheten ger upp till ett magnetfält vilket måste tas med i beräkningen då vi tekniskt uttrycker det för $\frac{d\Phi}{dt}$. Detta skulle ge

$$\oint \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\pi r^2 \frac{\mu_0 N}{L} i(t) + \pi r^2 \mu_0 \sigma E_\phi \delta \right) \text{ Nu får man p.s.s}$$

som ovan lösa ut E_ϕ och beräkna strömstätheten J_ϕ och därefter effektutvecklingen som nu bara sker ner till inträngningsdjupet δ .

4



$$\lambda = 450,0 \text{ nm}$$

Den genom längsidan transmitterade vågen kan skrivas om polarisationen är vinkelrät mot infallsplanet

$$E_t(x, z) = \hat{y} E_{t0} e^{-j\beta_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \quad \text{där } \beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Snells lag ger vinkeln θ_t : $\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2}$

Vid totalreflektion är $\theta_t \geq 90^\circ$

Uttrycken för $\sin \theta_t$ och $\cos \theta_t$ gäller fortfarande varför vi får

$$\sin \theta_t = \sin \theta_i \frac{n_1}{n_2} = \{ \theta_i = 45^\circ, n_1 = 1,6, n_2 = 1 \} = \frac{1,6}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \underbrace{\sin^2 \theta_i \frac{n_1^2}{n_2^2}}_{>1}} = \pm j \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1}$$

Då kan vi skriva den transmitterade vågen som

$$E_t = \hat{y} E_{t0} e^{-j\beta_2 x \sin \theta_i \frac{n_1}{n_2}} e^{(+)\beta_2 z \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{slänger } +\text{-tecknet då} \\ \text{vi } e_j \text{ har en exp. växande} \\ \text{lösningar} \end{array} \right)$$

Villkor för att amplituden ska minska med $1/e$

$$\frac{E_t(z=0)}{E_t(z)} = \frac{e}{1} \Rightarrow \frac{1}{e^{-\beta_2 z \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1}}} = e \Rightarrow 1 = \beta_2 z \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1}$$

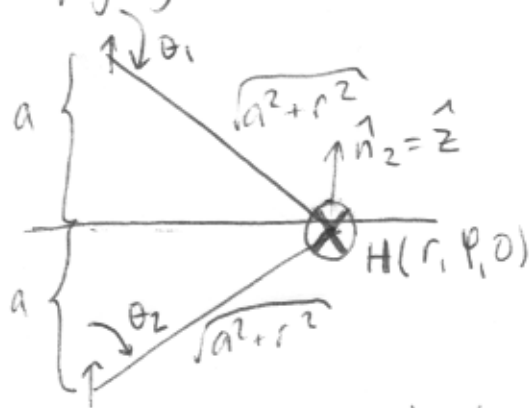
$$\Rightarrow z = \frac{1}{\beta_2 \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1}} = 0,135 \mu\text{m}$$

Vid parallell polarisation blir det ingen skillnad

Brytningsindex n_1 kan minskas till följande värde för totalrefl. enl. Snells lag:

$$n_1 = \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} \cdot n_2 = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} \cdot 1 = 1,41$$

5 Spegling av den svängande dipolantennen



Formeln för Hertzdipol ger:

$$\vec{H}(r, \varphi, 0) = \hat{\varphi} 2 \cdot \frac{-\omega^2 p_0 (r/\sqrt{a^2+r^2})}{4\pi c \sqrt{a^2+r^2}} e^{-j\omega \frac{\sqrt{a^2+r^2}}{c}}$$

Randvillkoret för H-fältet:

$$\hat{n}_2 \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$

$\vec{H}_2 = 0$ ty metallen är en god ledare

$$\vec{J}_s = \hat{z} \times \hat{\varphi} \frac{-\omega^2 p_0 (r/\sqrt{a^2+r^2})}{2\pi c \sqrt{a^2+r^2}} e^{-j\omega \frac{\sqrt{a^2+r^2}}{c}} \Rightarrow$$

$$\vec{J}_s = \hat{r} \frac{\omega^2 p_0 r}{2\pi c (a^2+r^2)} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \sqrt{a^2+r^2}\right) \text{ A/m}$$