Fält 10. Tentamen i Elektromagnetisk fältteori F. för F2.
14/3 1998.

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori.
Förfrågningar:	Tel. ankn. 1583
Lösningar	anslås efter tentamens slut vid Telesnack.
Resultatet	sändes senast den 1/4 1998 till studievägledningen F.
Granskning	sker på tid som anges på betygslistan.
Betygen	sändes till betygsexpeditionen senast den 3/4 1998.

- o - o - o -

Kom ihåg!	Tydliga figurer, Referensriktningar, Dimensionskontroll, Motiveringar.

- o - o - o -

Teoriuppgift Endast BETA får användas!

1. Härled uttrycken $F_x = -(\partial W_e/\partial x)_Q = +(\partial W_e/\partial x)_V$ för kraften i x-riktningen på något föremål i ett elektrostatiskt system med den elektrostatiska energin W_e, vilken beror av föremålets lägeskoordinater.

Räkneuppgifter Hjälpmedel enligt listan högst upp!

2. Antag en sfäriskt symmetrisk rymdladdningstäthet

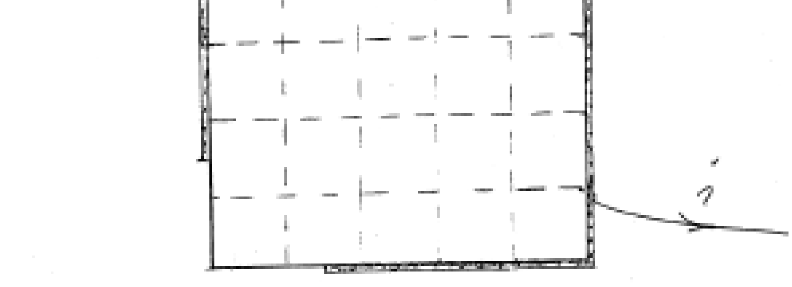
$\rho(R) = \rho_o$ = konstant , för $a<R<2a$

$\rho(R) = 0$, för övrigt

A) Beräkna det potentialfält V(R), som denna laddningsfördelning ger upphov till, om potentialen i oändligheten sättes till noll!

B) Beräkna systemets elektrostatiska energi!

3. Två elektroder ligger symmetriskt an mot två diagonala hörn hos en kvadratisk skiva med sidan a=8 cm, tjockleken d=1 mm och ledningsförmågan σ=0.2 S/m, så som figuren visar. Gör en numerisk beräkning av resistansen mellan elektroderna och använd därvid figurens glesa rutnät!

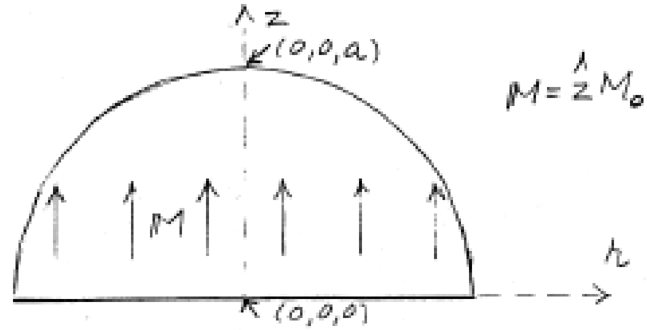


4. En halvsfär av permanentmagnetmaterial har radien a och är placerad i ett koordinatsystem så som figuren visar. Halvsfären är homogent magnetiserad i $\hat{z}$-led.

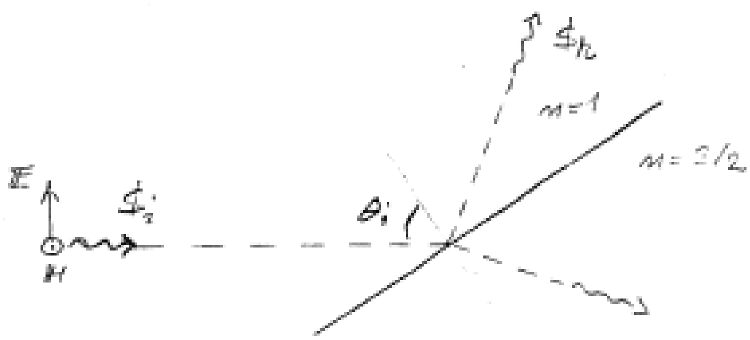
A) Beräkna de ekvivalenta magnetiseringströmtätheterna $\mathbf{J}_m$ och $\mathbf{J}_{ms}$!

B) Beräkna magnetiska flödestätheten i punkten (0,0,0)

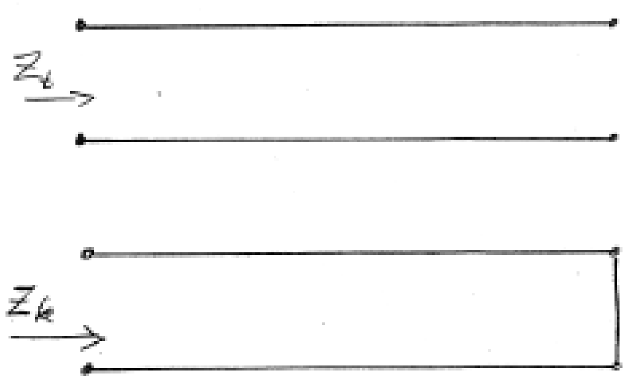
C) Beräkna magnetiska flödestätheten i punkten (0,0,a)



5. En linjärt polariserad elektromagnetisk våg i vakuum skulle egentligen träffa en plan gränsyta till ett förlustfritt dielektrikum med brytningsindex n=3/2 under Brewstervinkel och därför ej ge någon reflekterad våg. Nu råkade emellertid infallsvinkeln bli 2° för stor. Beräkna reflexionsfaktorn för effekt R $(=S_{refl}/S_{inf})$ i den för handen varande situationen!



6. På en 4 m lång bit av en transmissionsledning med förluster har man vid frekvensen 10 MHz uppmätt tomgångsimpedansen $Z_t = (0.335 - j4.17)\ \Omega$ och kortslutningsimpedansen $Z_k = (27.0 + j286)\ \Omega$. Beräkna härur ledningens karakteristiska impedans Z_c och dämpkonstant α, för en våg med den aktuella frekvensen!



H. Desaix

CTH ELEKTRICITETS-LÄRA	Ämne	Datum 11/3 -98	Blad nr 1
		Signatur	

Fält 10. El. magn. fältteori F, för F2, den 14/3 1998

① Se föreläsningsanteckningarna!

---

② Symmetrin och Gauss' lag ger med $\mathbf{E} = \hat{R}E(R)$

A) Omr. $2a < R < \infty$: $4\pi R^2 E(R) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 \frac{4\pi}{3}(8a^3 - a^3) \Rightarrow$

$$E(R) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{7a^3}{R^2} \Rightarrow V(R) = \int_R^\infty E(R)\,dR = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{7a^3}{R} \Rightarrow V(2a) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{7a^2}{2}$$

Omr. $a < R < 2a$: $4\pi R^2 E(R) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_R^{2a}\rho_0 4\pi R^2\,dR = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot(8a^3 - R^3) \Rightarrow$

$$E(R) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{8a^3}{R^2} - R\right) \Rightarrow V(R) = \int_R^{2a} E(R)\,dR + V(2a) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(-\frac{5a^2}{2} + \frac{8a^3}{R} + \frac{R^2}{2}\right)$$

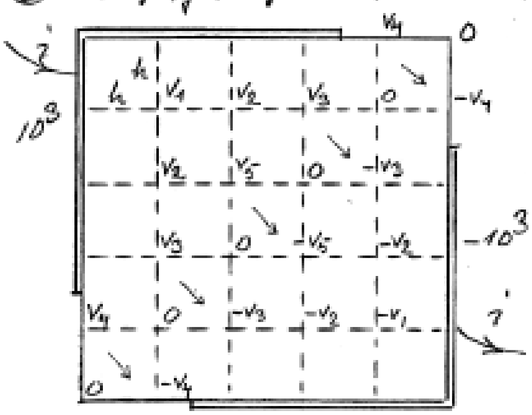
Omr. $0 < R < a$: $E(R) = 0 \Rightarrow V(R) = V(a) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\cdot 6a^2$

B) $$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho(R)V(R)\,dv = \frac{1}{2}\int_a^{2a}\rho_0\cdot\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(-\frac{5a^2}{2} + \frac{8a^3}{R} + \frac{R^2}{2}\right)\cdot 4\pi R^2\,dR =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\rho_0^2}{3\varepsilon_0}\cdot 4\pi \Big[_a^{2a}\left(-\frac{5a^2}{2}\cdot\frac{R^3}{3} + 8a^3\cdot\frac{R^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{R^5}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\rho_0^2}{3\varepsilon_0}\cdot 4\pi a^5\cdot\frac{139}{5}$$

---

③ Utnyttja symmetrin och lägg ex. vis ±1000 volt på elektroderna. så får vi vidstående figur.



$$\begin{cases} 4V_1 = V_2 + 1000 + 1000 + V_2 \\ 4V_2 = V_3 + 1000 + V_1 + V_5 \\ 4V_3 = 0 + 1000 + V_2 + 0 \\ 4V_4 = 0 + 0 + 1000 + 0 \quad \rightarrow V_4 = 250 \\ 4V_5 = 0 + V_2 + V_2 + 0 \end{cases}$$

$V_1 = 9000/11$; $V_2 = 7000/11$; $V_3 = 4500/11$; $V_5 = 3500/11$

$$i \approx \sigma\cdot d\cdot h\sqrt{2}\cdot\frac{1}{h\sqrt{2}}\left[2V_4 + 2V_3 + 2V_5 + 2V_3 + 2V_4\right] =$$

$$= \sigma d\cdot 2\left[2\cdot 250 + 2\cdot\frac{4500}{11} + \frac{3500}{11}\right] = \sigma d\, 2\,\frac{18000}{11}$$

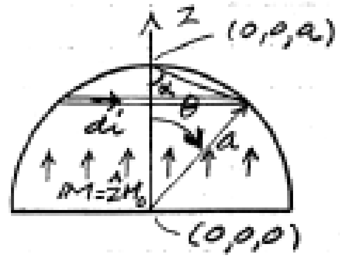
$$R = \frac{2000}{i} = \frac{1}{\sigma d}\cdot\frac{2000\cdot 11}{36000} = \frac{1}{\sigma d}\cdot\frac{11}{18} = 3056\,(\Omega)$$

[Ladinen ger värdet $R = 3063\,(\Omega)$]

CTH ELEKTRICITETSLÄRA	Ämne	Datum 11/3-98	Blad nr 2
		Signatur H.B.	

Fält 10. El. magn. fältteori F, för F2, den 14/3 1998

(4)



A) $\begin{cases} \mathbf{J}_m = \nabla\times\mathbf{M} = \nabla\times(\hat{z}M_0) = \underline{\underline{0}} \\ \mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M}\times\hat{n} = \mathbf{M}\times\hat{R} = \hat{z}M_0\times\hat{R} = \underline{\underline{\hat{\varphi}\,M_0\sin\theta}} \end{cases}$

B) Dela in J_{ms} i cirkulära strömrör $di = M_0\sin\theta\cdot a\,d\theta$. Formeln för $\mathbf{B}$ på axeln till en cirkulär strömbana ger $d\mathbf{B}(0,0,0) = \dfrac{\mu_0\,di}{2\cdot a\sin\theta}\cdot\sin^3\theta\,\hat{z}$

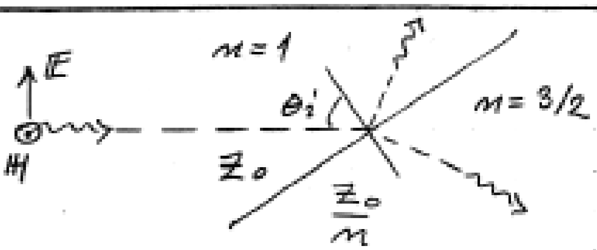
$$\underline{\mathbf{B}(0,0,0)} = \frac{\mu_0}{2a}\hat{z}\int_0^{\pi/2} M_0\sin\theta\,a\,d\theta\,\sin^2\theta = \frac{\mu_0}{2}M_0\hat{z}\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta = \underline{\underline{\hat{z}\frac{\mu_0M_0}{3}}}$$

C) $d\mathbf{B}(0,0,a) = \dfrac{\hat{z}\mu_0\,di}{2\cdot a\sin\theta}\cdot\sin^3\alpha = \dfrac{\mu_0M_0\hat{z}}{2}d\theta\,\sin^3\!\left(\dfrac{\pi-\theta}{2}\right)$

$$\underline{\mathbf{B}(0,0,a)} = \hat{z}\frac{\mu_0M_0}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^3(\theta/2)\,d\theta = \hat{z}\mu_0M_0\int_0^{\pi/4}\cos^3\beta\,d\beta = \underline{\underline{\hat{z}\frac{\mu_0M_0}{6\sqrt{2}}\cdot 5}}$$

---

(5)



$\tan\theta_B = \dfrac{n}{1} \Rightarrow \underline{\underline{\theta_B = 56{,}31^\circ}}$

$\therefore\ \underline{\underline{\theta_i}} = 56{,}31^\circ + 2^\circ = \underline{\underline{58{,}31^\circ}}$

$\sin\theta_i = \dfrac{3}{2}\sin\theta_t \Rightarrow \underline{\underline{\theta_t = 34{,}56^\circ}}$

$$\left(\frac{\bar{E}_{r0}}{\bar{E}_{i0}}\right)_{\parallel} = \frac{-Z_0\cos\theta_i + (Z_0/n)\cos\theta_t}{Z_0\cos\theta_i + (Z_0/n)\cos\theta_t} = \frac{-0.52532+0.54902}{0.52532+0.54902} = 0.022$$

$\underline{\underline{R}} = 0.022^2 = \underline{\underline{4{,}8\cdot10^{-4}}}$

---

(6)

$\left.\begin{aligned} Z_t &= Z_c\coth(\gamma l) = 0.335 - j4.17 \\ Z_k &= Z_c\tanh(\gamma l) = 27{,}0 + j286 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} Z_c = \sqrt{Z_t\cdot Z_k} \\ \tanh(\gamma l) = \sqrt{Z_k/Z_t} \end{cases}$

$\underline{\underline{Z_c}} = \sqrt{(0.335-j4.17)(27{,}0+j286)} = \underline{\underline{34{,}7 - j0.242}}\quad(\Omega)$

$\tanh(\gamma l) = \sqrt{(27{,}0+j286)/(0.335-j4.17)} = 0.7212 + j8.255$

$\gamma\cdot l = (\alpha+j\beta)4 = \text{artanh}\,(0{,}7212+j8{,}255) = 0.0104 + j1.451 + nj\pi$

$\underline{\underline{\alpha}} = \dfrac{0.0104}{4} = \underline{\underline{0.00259}}\ (1/m)$