Fält 08. Tentamen i Elektromagnetisk fältteori F. för F2.
25/8 1997.

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori.
Förfrågningar:	Tel. ankn. 1583
Lösningar	anslås efter tentamens slut vid Telesnack.
Resultatet	sändes senast den 15/9 1997 till studievägledningen F.
Granskning	sker på tid som anges på betygslistan.
Betygen	sändes till betygsexpeditionen senast den 19/9 1997.

\- o - o - o -

Kom ihåg!	Tydliga figurer, Referensriktningar, Dimensionskontroll, Motiveringar.

\- o - o - o -

Teoriuppgift Endast BETA får användas!

1. Definiera det makroskopiska strömtäthetsfältet **J**(**R**), och härled ur den elektriska laddningens oförstörbarhet den s.k. kontinuitetsekvationen!

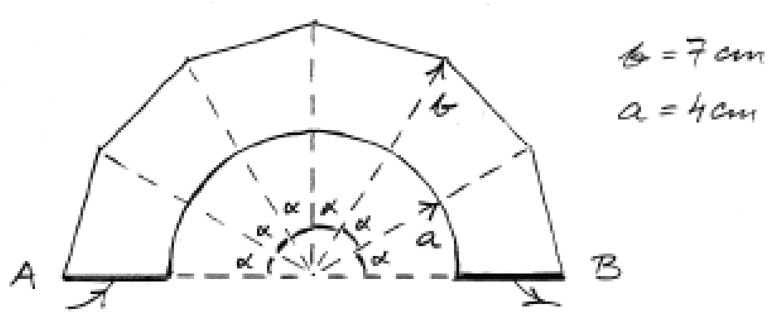
Räkneuppgifter Hjälpmedel enligt listan högst upp!

2. En sfäriskt symmetrisk rymdladdningstäthet i vakuum $\rho(R)$ ger upphov till en sfäriskt symmetrisk potential V(R) av formen

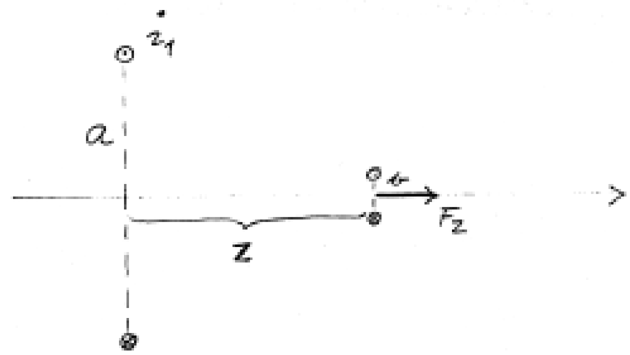
$$V(R) = V_o e^{-R/a} \quad ; \quad 0 \le R < \infty$$, där a är en konstant längd.

Beräkna systemets elektrostatiska energi W_e !

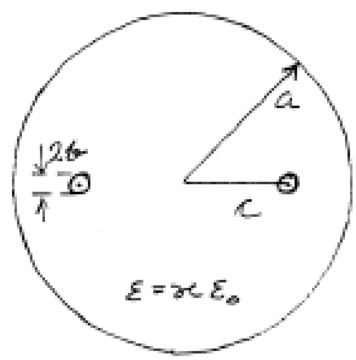
3. En remsa enligt figur har tjockleken d och ledningsförmågan σ. Innerkanten av remsan utgöres av en halvcirkelbåge medan ytterkanten har formen av ett symmetriskt polygontåg. Elektroder är anslutna vid A och B. Beräkna en övre och en undre gräns för resistansen genom remsan!



4. En cirkulär slinga med radie a matas med växelströmmen $i_1 = I_o \cos(\omega t)$. Koaxiellt ligger en liten circulär slinga med radie b<<a, självinduktans L och försumbar resistans. Avståndet mellan slingornas plan är z. I den minre slingan induceras en ström och vi får en kraft mellan de båda slingorna. Härled ett uttryck på kraften mellan slingorna!



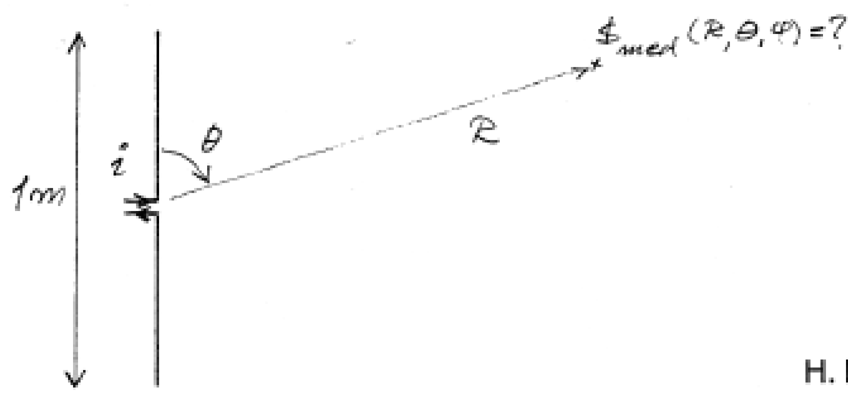
5. I en <u>förlustfri</u> skärmad tvåledarkabel ligger trådarna, vardera med radien b, symmetriskt inbäddade i ett dielktrikum med dieltalet κ. Skärmradien är a och avståndet mellan trådcentrum och skärmcentrum är c. Kabeln användes i en viss tillämpning på så sätt att de båda trådarna <u>gemensamt</u> utgör framledning medan skärmen utgör återledning. Beräkna ledningsparametrarna i den beskrivna situationen!



6. En centermatad sprötdipol med längden 1 m matas med strömmen $i(t) = 10\cos(\pi 10^8\, t)$ A.

A) Hur stor medeleffekt strålar antennen ut?

B) Hur ser medelpoyntingvektorn ut i strålningszonen!



H. Desaix

CTH ELEKTRICITETSLÄRA	Ämne	Datum 20/8-97	Blad nr 1
		Signatur H. S.	

Fält 08. El. magn. fältteori F, för F2, den 25/8 1997

① Se föreläsningsanteckningarna!

② $\underset{\sim}{\mathbf{E}} = \hat{R} E(R) = \hat{R}\left[-\frac{\partial}{\partial R} V(R)\right] = \underset{\sim}{\hat{R}\,(V_0/a)\, e^{-R/a}}$

$\underset{\sim}{w_E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \underset{\sim}{\frac{1}{2}\varepsilon_0 (V_0^2/a^2)\, e^{-2R/a}}$

$W_E = \int_0^\infty w_E \; 4\pi R^2 dR = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{V_0^2}{a^2} 4\pi \int_0^\infty e^{-2R/a} R^2 dR \; ; \quad \xi = R/a \Rightarrow$

$\underline{\underline{W_E}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 V_0^2 4\pi a \underbrace{\int_0^\infty e^{-2\xi}\xi^2 d\xi}_{=1/4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\varepsilon_0 a V_0^2}} \quad (Ws)$

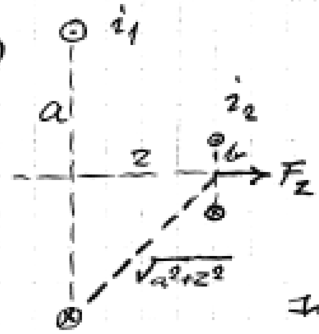
③ Undre gräns: Lägg till ledande mtrl så att ytterkanten blir en halvcirkelbåge med radie = b

$G = \int_a^b dG = \int_a^b \sigma d \frac{dr}{\pi r} = \frac{\sigma d}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) ; \; \underline{\underline{R_u}} = \frac{1}{\sigma d}\cdot\frac{\pi}{\ln(b/a)} = \underline{\underline{\frac{5.6138}{\sigma d}}}$

Övre gräns: Tag bort ledande mtrl så att ytterkanten blir en halvcirkelbåge med radie $= b\cos\frac{\alpha}{2}$; $\alpha = 30°$

$\underline{\underline{R_ö}} = \frac{1}{\sigma d}\cdot\frac{\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\cos\frac{\alpha}{2}\right)} = \underline{\underline{\frac{5.9846}{\sigma d}}}$

④



i_1 ger i centrum av slinga 2:

$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2a}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)^3 ; \; \Phi_{12} \approx \pi b^2 B_1 ;$

$\underline{\underline{M}} = \frac{\Phi_{12}}{i_1} \approx \underline{\pi b^2 \frac{\mu_0}{2a}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)^3}$

Inducerad ström i_2 : $j\omega L_2 \bar{I}_2 = -j\omega M \bar{I}_1$

$\bar{I}_2 = -\frac{M}{L_2}\bar{I}_1 \Rightarrow i_2 = -\frac{M}{L_2} i_1$

Systemets magn. energi: $W_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$

$F_z = \left(\frac{\partial W_m}{\partial z}\right)_I = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial z} \approx i_1\left(-\frac{M}{L_2} i_1\right) \pi b^2 \frac{\mu_0}{2a} a^3 \left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2z}{(\sqrt{a^2+z^2})^5}$

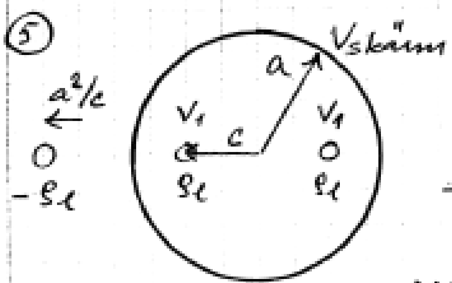
$= \frac{i_1^2}{L_2}\cdot\left(\frac{\mu_0 \pi b^2}{2a}\right)^2 \cdot \frac{3a^6 z}{(a^2+z^2)^4} \quad (N)$ momentant

$\underline{\underline{F_{z\,med} \approx \frac{1}{2}\frac{I_0^2}{L_2}\left(\frac{\mu_0 \pi b^2}{2a}\right)^2 \frac{3a^6 z}{(a^2+z^2)^4} \quad (N)}}$ tidsmedelvärde

CTH ELEKTRICITETSLÄRA	Ämne	Datum 20/8-97	Blad nr 2
		Signatur H.S.	

Fält 08. El. magn. fältteori F, för F2, den 25/8 1997

(5)



$-\varrho_l$

$$\begin{cases} V_1 = \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{\frac{a^2}{c}-c}{b}\right) + \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{\frac{a^2}{c}+c}{2c}\right) \\ V_{skärm} = \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{\frac{a^2}{c}-a}{a-c}\right) + \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{\frac{a^2}{c}+a}{a+c}\right) \end{cases}$$

$$\Delta V = V_1 - V_{skärm} = \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{a^4-c^4}{2a^2bc}\right)$$

$$C_l = \frac{2\varrho_l}{\Delta V} = \frac{4\pi\varkappa\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{a^4-c^4}{2a^2bc}\right)} \; ; \; L_l = \frac{\mu_0\varepsilon}{C_l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln\left(\frac{a^4-c^4}{2a^2bc}\right) ;$$

$$G_l = 0 \; ; \; R_l = 0$$

---

(6) $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8}{\pi \cdot 10^8} \cdot 2\pi = 6m$; $l = 1\,m < \lambda/4 \Rightarrow l_{eff} = \frac{l}{2} = 0{,}5\,m$

$$R_{rad} = 80\pi^2\left(\frac{l_{eff}}{\lambda}\right)^2 = \frac{80\pi^2}{144} = 5.483\ \Omega$$

$$P_{med} = R_{rad} \cdot I_{eff}^2 = 5.483 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^2 = 274\ (W)$$

$$\bar{E}_{rad} = \hat{\theta} Z_0 \frac{j\omega l_{eff} \bar{I} \sin\theta}{4\pi c R} e^{-j\omega R/c} \; ; \; \bar{H}_{rad} = \frac{1}{Z_0} \hat{R} \times \bar{E}_{rad}$$

$$\bar{S}_{med} = \bar{E}_{rad} \times \bar{H}_{rad}^* = \hat{R} Z_0 \frac{\omega^2 l_{eff}^2 |\bar{I}|^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 c^2 R^2}$$

$$S_{med} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\bar{S}_{med}\} = \hat{R} Z_0 \frac{\omega^2 l_{eff}^2 |\bar{I}|^2 \sin^2\theta}{32\pi^2 c^2 R^2} =$$

$$= \hat{R} \cdot 32{,}73 \cdot \frac{\sin^2\theta}{R^2} \quad (W/m^2)$$