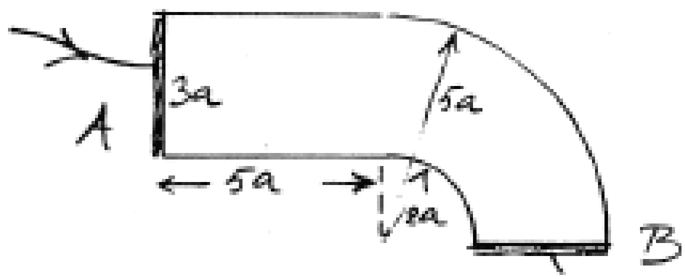
**Fält 01. Tentamen i Elektromagnetisk fältteori F. för F2.**
**18/3 1995.**

**Teoriuppgift** Endast BETA och SMT får användas!

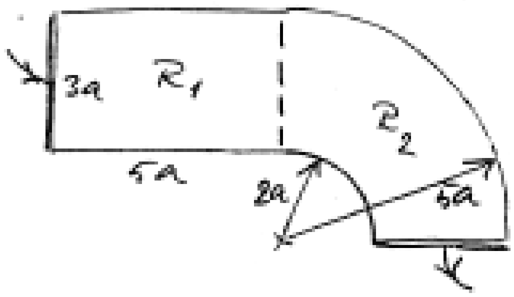
1. Härled, med hjälp av randvillkoren för $\bar{E}$- och $\bar{H}$-fälten, reflexions- och transmissionskoefficienterna för $\bar{E}$-fältet vid en monokromatisk, plan vågs vinkelräta infall mot en plan gränsyta mellan två olika material!

2. På en tunn plåt med tjockleken d=0.5 mm, ledningsförmågan σ=4 S/m och med utseende enligt figuren är två elektroder fästade vid A respektive B. Beräkna en övre och en undre gräns för resistansen mellan elektroderna!




---

(2) Undre gräns: Fixera en ekvipotentialyta enl. figuren!

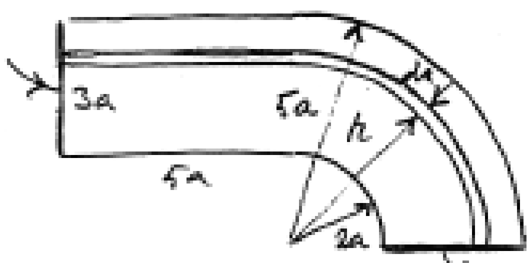



$$R_1 = \frac{1}{\sigma d} \cdot \frac{5a}{3a} = \frac{1}{\sigma d} \cdot \frac{5}{3}$$

$$dG_2 = \sigma d \cdot \frac{dr}{\frac{\pi}{2} r} \; ; \; G_2 = \sigma d \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{5a}{2a}\right) = \frac{1}{R_2}$$

$$\underline{\underline{R_{undre}}} = R_1 + R_2 = \frac{1}{\sigma d}\left[\frac{5}{3} + \frac{\pi}{2 \ln(5/2)}\right] = \underline{\underline{1690\,\Omega}}$$

Övre gräns: Fixera strömrör enligt figuren!




$$dG = \sigma d \frac{dr}{5a + \frac{\pi}{2} r} \; ; \; G = \sigma d \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{5a + \frac{2}{\pi} 5a}{2a + \frac{2}{\pi} 5a}\right)$$

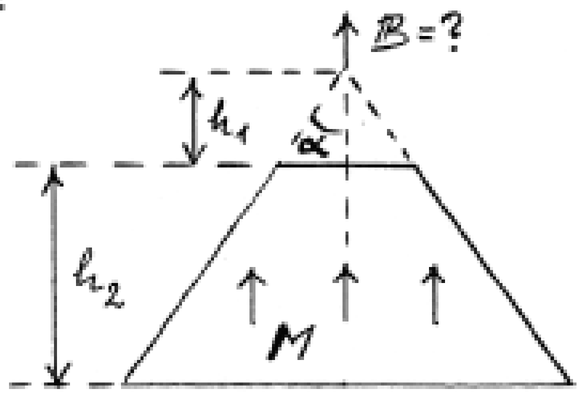
$$\underline{\underline{R_{övre}}} = \frac{1}{G} = \frac{1}{\sigma d} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{1}{\ln\left(\frac{5\pi + 10}{2\pi + 10}\right)} = \underline{\underline{1720\,\Omega}}$$

---

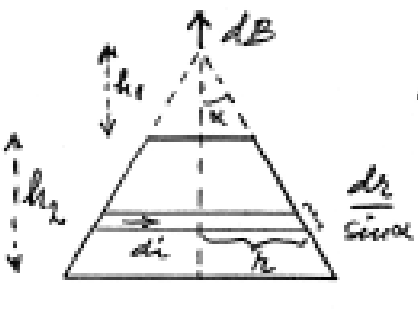
3. En permanentmagnet har formen av en stympad cirkulär kon, så som figuren visar. Magnetiseringen är homogen och axiellt riktad, $\mathbf{M} = \hat{z} M_0$.

A) Beräkna **B**-fältet i konens tänkta spets!

B) Vilken toppvinkel $2\alpha$ hos den stympade konen ger starkast **B**-fält i punkten ifråga, om $h_1$ och $h_2$ är konstanta?




③ Ersätt det magnetiserade materialet med ekvivalenta strömtätheter: $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = 0$ ; $\mathbf{j}_m = \mathbf{M} \times \hat{n} = \hat{\varphi} M_0 \cos\alpha$




$$d\mathbf{B} = \hat{z} \cdot \frac{\mu_0 \, di}{2r} \cdot \sin^3\alpha \quad ; \quad di = j_m \cdot \frac{dr}{\sin\alpha} = \frac{M_0 \cos\alpha}{\sin\alpha} \, dr$$

$r = (-z)\tan\alpha$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \int_{r=h_1\tan\alpha}^{(h_1+h_2)\tan\alpha} d\mathbf{B} = \hat{z} \frac{\mu_0}{2} \frac{M_0 \cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \sin^3\alpha \int_{h_1\tan\alpha}^{(h_1+h_2)\tan\alpha} \frac{dr}{r} =$$

$$\underline{\underline{= \hat{z} \frac{\mu_0 M_0 \sin^2\alpha \cos\alpha}{2} \ln\left(\frac{h_1+h_2}{h_1}\right)}}$$

Sök max hos $f(\alpha) = \sin^2\alpha \cos\alpha$ : $f'(\alpha) = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha(-\sin\alpha)$

$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow \sin\alpha\left[2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right] = 0$ ; Den intressanta lösningen är $\underline{\underline{\alpha = \arctan(\sqrt{2})}} = 54{,}7^\circ$. $\Rightarrow \mathbf{B}_{max} = \hat{z} \frac{\mu_0 M_0}{3\sqrt{3}} \cdot \ln\left(\frac{h_1+h_2}{h_1}\right)$

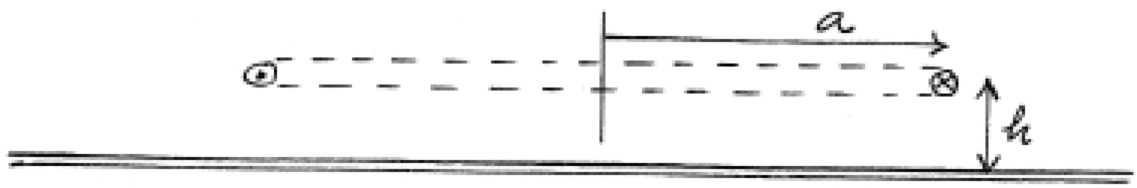
4. En cirkulär slinga med radien a=5 cm av rund tråd har självinduktansen $L_o=0.25\cdot10^{-6}$ H. En stor plan supraledande platta placeras parallellt med slingan på avståndet h=0.5 cm från slingan så som figuren visar. Beräkna slingans effektiva induktans, dvs den induktans slingan uppvisar i närvaro av det supraledande planet!

<u>Ledning:</u> Använd speglingsmetoden! Ömsesidiga induktansen mellan två cirkulära koaxiella strömbanor ges av uttrycket

$$M = \mu_o\sqrt{ab}\, m^{3/2}C(m)\ ;\ \ m = 4ab/[c^2+(a+b)^2]\ ,$$

där a och b är slingradierna och c är axiella avståndet mellan slingorna. C(m) är en av de fullständiga elliptiska integralerna, och kan approximeras med uttrycket

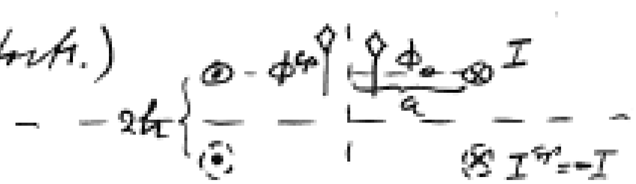
$$C(m) \approx \ln(4/\sqrt{1-m}) - 2\ \ ,\ \ \text{då } m\to1$$




④ R.V. vid supraledaren är $B_n = 0$. Verkan av strömmarna i supraledaren ersätter i aktuellt område av verkan av en spegelströmslinga med motsatt strömriktning. Effektiva fluxen genom strömslingan blir $\Phi_1 = \Phi_0 + \Phi^{sp}$

(forts.)

④ (forts.)




$$m = \frac{4a^2}{(2h)^2+(2a)^2} = \frac{100}{101}\ ;\ C(m) \approx \ln(4\sqrt{101}) - 2$$

$$M \approx \mu_0 a \left(\frac{100}{101}\right)^{3/2}\left[\ln(4\sqrt{101}) - 2\right] = 0{,}105\cdot10^{-6}$$

$\Phi_0 = L_0 I\ ;\ \Phi^{sp} = M I^{sp}$

$\Phi_1 = L_0 I - M I$

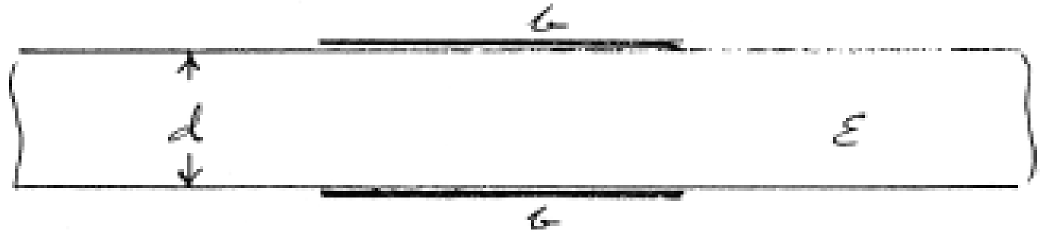
$L_{eff} = \frac{\Phi_1}{I} = L_0 - M$

$L_{eff} = 0{,}145\cdot10^{-6}$ (H)

5. En stripline enligt figuren skall ha en karakteristisk impedans $Z_c$=60 Ω. Den förlustfria dielektriska plattan har tjockleken d=1 mm och dielektricitetskonstanten $\varepsilon=2\varepsilon_o$.

A) Beräkna lämplig bredd b hos metallremsorna!

B) Beräkna dämpningskonstanten α för vågutbredningen utmed ledningen vid frekvensen 3 GHz, om remsorna har ledningsförmågan $\sigma=4\cdot10^7$ S/m och tjockleken $a=10^{-5}$ m!




⑤ Bortse från kanteffekter: $\underset{\sim}{c} = \varepsilon \frac{b}{d}$ ; $\underset{\sim}{l} = \frac{\mu_0 \varepsilon}{c} = \underset{\sim}{\mu_0 \cdot \frac{d}{b}}$ ; $\underset{\sim}{Z_c} = \sqrt{\frac{l}{c}} =$

$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \cdot \frac{d}{b} = \underset{\sim}{\frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{d}{b}}$ ; $Z_c = 60\,\Omega \Rightarrow \underline{\underline{b}} = \frac{Z_0}{Z_c\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot d = \underline{\underline{\pi\sqrt{2}\,d}} = 4{,}44$ (mm)

$\underset{\sim}{\delta} = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}} = \underset{\sim}{\frac{10^{-4}}{4\pi\sqrt{30}}} = 1{,}45\cdot10^{-6}$ (m) $\ll a = 10^{-5}$ (m) $\Rightarrow \underset{\sim}{r} = 2\cdot\frac{1}{\sigma\delta}\cdot\frac{1}{b} = \underset{\sim}{\sqrt{60}}$ (Ω/m)

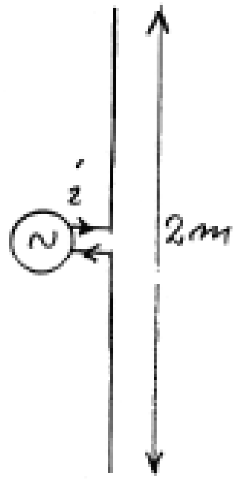
$$\begin{cases} \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(r+j\omega l)(0+j\omega c)} = j\omega\sqrt{lc}\,\sqrt{1-j\,r/\omega l} \approx j\omega\sqrt{lc}\left[1-\frac{1}{2}j\frac{r}{\omega l}+\dots\right] \\ r/\omega l = \sqrt{60}/1200\pi\sqrt{2} = 0{,}00145 \end{cases}$$

$\underline{\underline{\alpha}} \approx \frac{1}{2}\sqrt{lc}\,\frac{r}{l} = \frac{1}{2}\frac{r}{\sqrt{l/c}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{60}}{60} = \frac{1}{4\sqrt{15}} = \underline{\underline{0{,}0646}}$ (1/m)

6. En sprötdipolantenn med längden 2 m matas på mitten med strömmen $i=6\cdot\cos(5\pi\cdot10^7\cdot t)$.

A) Beräkna utstrålad medeleffekt $P_{med}$ med hjälp av strålningsresistansen hos en ekvivalent Hertzdipol!

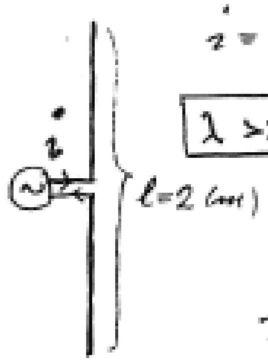
B) Beräkna Poyntingvektorn $\mathbf{S}_{med}(R,\theta,\phi)$ ute i strålningszonen!




H. Desaix

---

6




$$i = 6\cos(5\pi\cdot10^7\cdot t) \Rightarrow \omega = 5\pi\cdot10^7 \Rightarrow \lambda = \frac{c_0}{f} = 12\ (m)$$

$\boxed{\lambda >> l}$ $\quad l_{eff} = l/2 = 1\ (m)$

$$R_{rad} = 80\pi^2\left(\frac{l_{eff}}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2\cdot\frac{1}{12^2} = 5{,}483\ (\Omega)$$

$$P_{med} = R_{rad}\cdot I_{eff}^2 = 5{,}483\cdot\frac{1}{2}\cdot6^2 = 98{,}7\ (W)$$

$$\begin{cases} \bar{H}_{rad}(R,\theta,\varphi) = \hat{\varphi}\,\dfrac{j\omega l_{eff} I_0 \sin\theta}{4\pi c R}\, e^{-j\omega R/c} \\ \bar{E}_{rad}(R,\theta,\varphi) = Z_0\, \bar{H}_{rad}(R,\theta,\varphi)\times\hat{R} \end{cases}$$

$$S_{med} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\bar{E}_{rad}\times\bar{H}_{rad}^{*}\right\} = \frac{1}{2}Z_0\,\hat{R}\left|\frac{\omega l_{eff} I_0 \sin\theta}{4\pi c R}\right|^2 =$$

$$= \hat{R}\,\frac{120\pi}{2}\cdot\left(\frac{5\pi\cdot10^7\cdot1\cdot6\cdot\sin\theta}{4\pi\cdot3\cdot10^8\cdot R}\right)^2 = \hat{R}\,60\pi\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{\sin^2\theta}{R^2}$$

$$= \hat{R}\cdot11{,}8\cdot\frac{\sin^2\theta}{R^2}\quad (W/m^2)$$