Dugga i Elektromagnetisk fältteori F. för F2.
EEF031 2001-11-24 kl. 8.45-12.45

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Mikael Persson Tel. ankn. 1576
Lösningar:	anslås på kursens hemsida
Resultatet:	anslås på kursens hemsida
Granskning:	sker i anslutning till föreläsning tid anslås på kursens hemsida
Kom ihåg	Poängavdrag göres för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

OBS!

Svaren på teoridelen skall ges på tesen som skall lämnas in. Flervalsfrågorna besvaras genom att markera rutorna till höger Problemlösningstalen ger maximalt 8 poäng och förståelseuppgifterna maximalt 1poäng

Namn:
Personnummer:
Email:

Fråga 1

Problemlösningsdel

a)

En sfäriskt symmetrisk laddningsfördelning i vakuum ger upphov till en sfäriskt symmetrisk potential V(R) med utseendet

$$V(R) = \begin{cases} V_0(1 - R^2/a^2) & \text{för } R \leq a \\ 0 & \text{för } R > a \end{cases}$$

Beräkna härur a/ laddningsfördelningen

b/ systemets totala laddning Q!

Förståelsedel

b)Vilka postulat, satser eller lagar bygger problemlösningen ovan på? Vad säger de i ord och varför är de tillämpliga här?

c)Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Gauss lag på differentialform och Gauss lag på integralform uttrycker egentligen samma sak. ☒

På stort avstånd från en linjeladdning med ändlig längd avtar E-fältet som $1/R^2$ ☒

Coloumbfältet uttrycker hur det elektriska fältet från en punktladdning ser ut. ☒

Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Elektrostatiken baseras på ett postulat ☐

Potentialen från en punktladdning avtar med avståndet som 1/R ☒

Det elektrostatiska fältet är källfritt ☐

Det elektrostatiska fältet är konservativt ☒

Det elektrostatiska fältet är rotationsfritt ☒

e)Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Coloumbs kraftlag uttrycker att kraften mellan två punktladdningar är proportionell mot var och en av punktladdningarnas storlek och inverst proportionell mot avståndet mellan punktladdningarna i kvadrat. ☒

Elfältet från en lång tunn homogent laddad rak ledare kan man räkna ut genom att intergrera upp bidraget till E-fältet från varje infinitesimalt bidrag. Det är viktigt att den är rak, tunn och homogent laddad för att denna räkning skall fungera. ☐

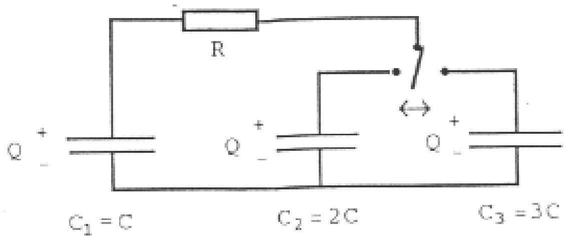
Det elektriska fältet från en punktladdning ökar med avståndet. ☐

E-fältet från en lång tunn homogent ladad rak ledare kan man räkna ut genom att använda Gauss sats på integralform. Det är viktigt att den är rak, och homogent laddad för att denna räkning skall fungera. ☒

Kapacitansen ökar med ökande spänning. ☐

Fråga 2
Problemlösningsdel
a)

Tre kondensatorer är från början alla uppladdade med lika stor laddning $\pm Q$. Man parallellkopplar först kondensatorerna C_1 och C_2, bryter denna förbindelse och parallellkopplar C_1 och C_3. Beräkna den värme**energi**, som på grund av dessa omkopplingar kommer att utvecklas i resistansen R!



Förståelsedel

b) Vilka postulat, satser eller lagar bygger problemlösningen ovan på.? Vad säger de i ord och varför är de tillämpliga här?

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Vid beräkning av elektrostatiska krafter kan man använda sig av metoden för virtuella förflyttningar. Antingen antar man att systemets olika delar har konstant laddning eller så antar man att potentialen hos systemets olika delar hålls konstant. Resultaten blir lika då kraften bara beror på fältet i en viss given tidpunkt. ☒

Poissons ekvation är ett specialfall av Laplaces ekvation ☐

Med givna randvilkor är lösningen till Poissons ekvation entydig. ☒

Man kan definiera den totala elektrostatiska energin för ett system, bestående av laddade sfärer, utifrån det arbete som krävs för att bygga upp systemet om man tar sfärerna från oändligheten. ☐

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Man kan inte definiera kapacitans för en enskild ledare men kapacitansen mellan två ledare. ☐

Man kan utrycka ett systems elektrostatiska energi antingen i termer av potential och laddning eller alternativt i termer av det elektriska fältet och det tillhörande förskjutningsfältet. ☒

I elektrostatiken gäller vid gränsytan mellan två olika material att E-fältets tangentialkomponent är kontinuerlig. ☒

Kapacitansen beror bara på geometrin och materialegenskaperna. ☒

div(**J**) = 0 är en konsekvens av att laddningstätheten är statisk vilket är fallet i magnetostatik. ☒

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Speglingsmetoden används för att lösa Laplace's ekvation för godtyckliga laddningsfördelningar i godtycklig geometri. ☐

Källan till förskjutningsfältet är laddningstätheten hos de fria laddningarna. ☒

Det elektriska fältet från en elektrisk dipol härleds lättast från fältet från en strömförande ring. ☐

Dielektriska egenskaper modelleras med dipolmoment. Atomernas respons till yttre pålagt fält ger upphov till ett ytterligare E-fält. ☒

rot($\mathbf{E}+\mathbf{E}_k$) = $\eta\mathbf{J}$, där $\mathbf{E}_k$ är en yttre källterm, leder för en elektrisk krets fram till Kirchoffs spänningslag ☐

Fråga 3
Problemlösningsdel
a)

En magnetisk dipol $\mathbf{m} = \hat{z}m$ befinner sig i origo. En cirkulär ring av tunn metalltråd har sin axel sammanfallande med z-axeln. Ringen har radien a och sitt centrum på avståndet b från origo. Beräkna det av ringen omslutna magnetiska flödet!

Förståelsedel
b)Vilka postulat, satser eller lagar bygger problemlösningen ovan på? Vad säger de i ord och varför är de tillämpliga här?

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?
Man kan välja rotationen av den magnetiska vektorpotentialen fritt ☐
Varje komponent av den magnetiska vektorpotentialen uppfyller Poisons ekvation ☒
Permanentmagneter är ofta gjorda av ferromagnetiska material . ☒
Den magnetiska suceptibiliteten uttrycker förhållandet mellan magnetiseringensfältet och B-fältet ☐

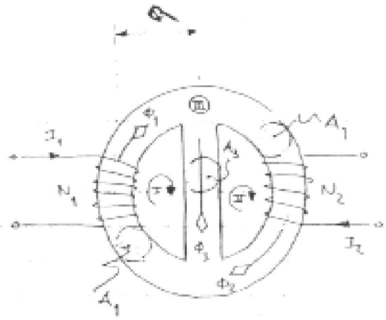
d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?
En magnetisk dipol används som modell när man vill beskriva de magnetiska egenskaperna hos ett material. ☒
I ett magnetiserat material har man magnetiseringsströmmar. Dessa används för att beräkna magnetfältet på samma sätt som fria strömmar i vakum. ☒
Den magnetiska fältstyrkan H och den magnetiska flödestätheten B är relaterade genom permeabiliteten. ☒
H fältet spelar samma roll i magnetostatiken som polarisationsfältet P i elektrostatiken ☐

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?
B-fältets normalkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material i avsaknad av fria ytströmmar. ☒
~~Självinduktansen för en komponent är ett mått på dess koppling till det magnetfält som genererats av strömmen genom komponenten.~~ ☐ utgår
Biot-Savarts lag är ett av postulaten i magnetostatiken. ☐
Amperes lag är ett av postulaten i magnetostatiken. ☒

Fråga 4

Problemlösningsdel

En järnring med medelradien $a = 7,5$ cm och tvärsnittsytan $A_1 = 1,2\ \text{cm}^2$ är försedd med en diametral brygga av samma material som ringen, men med tvärsnittsytan $A_3 = 0,8\ \text{cm}^2$. På ringhalvorna finns lindningar med $N_1 = 160$ respektive $N_2 = 120$ varv.



De båda lindningarna seriekopplas, så att flödena samverkar i ringen, och genomflytes av strömmen $i = 2$ mA. Magnetiseringen blir svag och vi kan räkna med permeabilitetstalet $\mu_r = 150$. Beräkna flödet Φ_3 genom bryggan!

b) Vilka postulat, satser eller lagar bygger problemlösningen ovan på? Vad säger de i ord och varför är de tillämpliga här?

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Ömsesidig induktans mäter den magnetiska kopplingen mellan två kretsar. ☐

I härledningen för Neumans formel för ömsesidig induktans använder man uttrycket för den magnetiska vektorpotentialen från en magnetisk dipol. ☐

Länkat flöde när man beräknar ömsesidig induktans skiljer sig från det magnetiska flödet bara om man har flera varv i de kretsar som genererar magnetfältet. ☐

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Avsaknad av magnetisk laddning gör att B-fältets normalkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material. ☒

~~Länkat flöde när man beräknar ömsesidig induktans skiljer sig från det magnetiska flödet bara om man har flera varv i de kretsar som genererar magnetfältet.~~ ☐

Den magnetiska fältstyrkan H och den magnetiska flödestätheten B är är lineärt relaterade genom permeabiliteten. ☐

Permeabiliteten för ett magnetostatiskt material motsvaras i elektrostatiken av dielektrisitetskonstanten för dielektriskt material. ☒

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Hårt ferromanetiska material har en bred hystereskurva och mjukt ferromagnetiska material har en smal en lång och smal hystereskurva. ☒

~~Magnetisk energi för ett antal magnetiskt kopplade ström kretsar kan beräknas utifrån det arbete som går åt för att skapa strömmarna och tillhörande magnetfält.~~ ☐

~~Magnetisk energi kan, så när som på en konstant, uttryckas i en volymsintegral över en skalärprodukten mellan strömtätheten och den magnetiska vektorpotentialen. Den kan också, så när på en konstant, uttryckas i en volymsintegral över en skalär produkt av H-fältet och magnetiseringsfältet M.~~ ☐

Reluktans för magnetfältskretsar motsvarar ungefär resistans för en elektrisk krets ☒

1

En sfäriskt symmetrisk laddningsfördelning i vakuum ger potentialen

$$V(R) = \begin{cases} V_0\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right) & R \le a \\ 0 & R > a \end{cases}$$

a) Laddningsfördelningen

Beräkna E-fältet som $\mathbb{E} = -\nabla V$ i sfäriska koordinater

$$\mathbb{E}(R) = \begin{cases} +2V_0 \frac{R}{a^2}\hat{r} & R < a \\ 0 & R > a \end{cases}$$

Nu fås laddningstätheten ur Gauss lag

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\rho = \begin{cases} \varepsilon_0 \frac{1}{R^2} \dfrac{\partial\left[R^2\left(2V_0\frac{R}{a^2}\right)\right]}{\partial r} = \dfrac{6V_0\varepsilon_0}{a^2} & R < a \\ 0 & R > a \end{cases}$$

Eftersom nu $\mathbb{D}$-fälten ej är kontinuerliga i $R=a$ måste vi ha en ytladdningstäthet där

Med $D_1 = \frac{2V_0\varepsilon_0}{a}\hat{r}$ i pt $R = a$

och $D_2 = 0$ i pt $R = a$ fås

$\rho_s = D_2 - D_1 = -\frac{2V_0\varepsilon_0}{a}$ i pt $R = a$

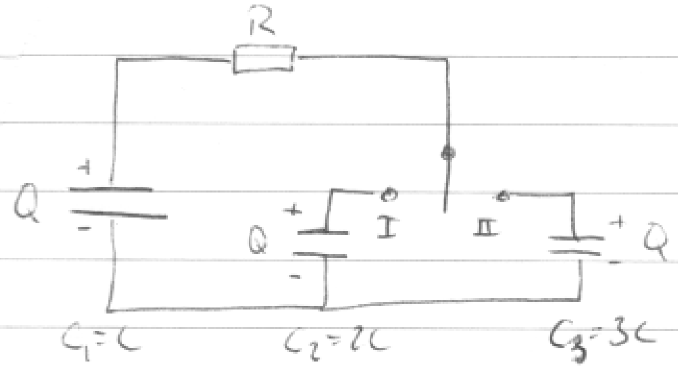
b) Totala laddningen Q:

$$Q_{tot} = \int_{R=0}^{a} \frac{6V_0\varepsilon_0}{a^2} 4\pi r^2 \, dr + 4\pi a^2\left(-\frac{2V_0\varepsilon_0}{a}\right) =$$

$$= \left[\frac{8\pi r^3 V_0\varepsilon_0}{a^2}\right]_0^a - 8\pi a V_0\varepsilon_0 =$$

$$= 8\pi a V_0\varepsilon_0 - 8\pi a V_0\varepsilon_0 = 0$$

2



$$W = \frac{Q^2}{2C}$$

Utveckland värmeenergi ΔW^{I} då C_1 o C_2 parallellkopplas.

$$W^{I}_{före} = \underbrace{\frac{Q^2}{2C}}_{C_1} + \underbrace{\frac{Q^2}{2 \cdot 2C}}_{C_2} = \frac{3Q^2}{4C}$$

Parallellkoppling av C_1 o C_2 $\Rightarrow Q_{tot} = Q + Q$

$$W^{I}_{efter} = \frac{1}{2}\frac{(Q+Q_2)^2}{(C+2C)} = \frac{2Q^2}{3C}$$

$$\Delta W^{I} = W^{I}_{före} - W^{I}_{efter} = \frac{3Q^2}{4C} - \frac{2Q^2}{3C} = \frac{Q^2}{12C}$$

Laddning på C_1 efter omkoppling till I

Parallellkoppling $\Rightarrow$ samma spänning

$$U = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \Rightarrow$$

Konservering av laddning

$$Q_1 + Q_2 = 2Q \Rightarrow$$

$$Q_1 = \frac{2Q}{3}$$

Före omkoppling till II har vi $Q_1 = \frac{2Q}{3}$; $Q_2 = \frac{4Q}{3}$; $Q_3 = Q$

$$W^{II}_{\text{före}} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{2Q}{3}\right)^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{3C} = \frac{7Q^2}{18C}$$

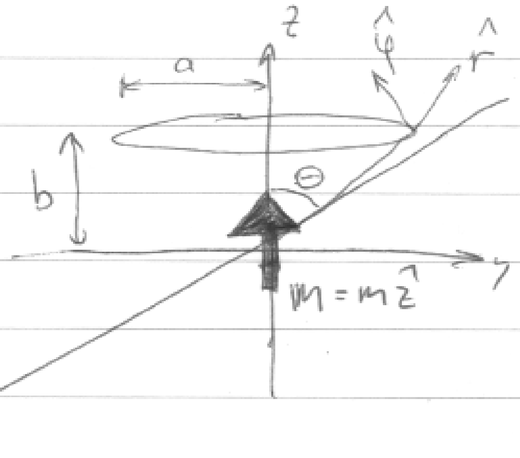
$$W^{II}_{\text{efter}} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{2Q}{3}+Q\right)^2}{(C+3C)} = \frac{25Q^2}{72C}$$

$$\Delta W^{II} = W^{II}_{\text{före}} - W^{II}_{\text{efter}} = \frac{7Q^2}{18C} - \frac{25Q^2}{72C} = \frac{Q^2}{24C}$$

Totala utvecklade värmeenergin

$$\Delta W_{\text{tot}} = \Delta W^{I} + \Delta W^{II} = \frac{Q^2}{12C} + \frac{Q^2}{24C} = \frac{Q^2}{8C}$$

③



Magnetiska vektorpotentialen från en dipol ges av

$$\mathbb{A} = \frac{\mu_0 \mathbb{m} \times \hat{R}_{12}}{4\pi R_{12}^2}$$

Vi har $\mathbb{m} \times \hat{R}_{12} = m\hat{z} \times \hat{R} = m \sin\Theta \hat{\varphi}$

$$\left\{ \sin\Theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right\} = \frac{m a}{\sqrt{a^2+b^2}} \hat{\varphi}$$

$$R_{12} = \sqrt{a^2+b^2}$$

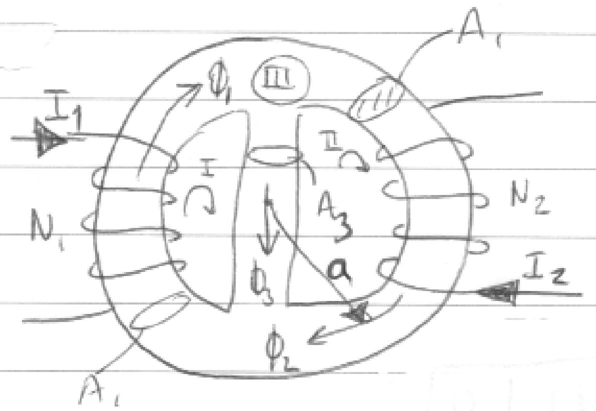
Omslutna magnetiska flödet fås som:

$$\Phi = \int_S \mathbb{B} \cdot d\mathbb{s} = \int_S (\nabla \times \mathbb{A}) \cdot d\mathbb{s} \overset{\{\text{STOKES}\}}{=} \oint_L \mathbb{A} \cdot d\mathbb{l} =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 m \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \hat{\varphi}}{4\pi \, (a^2+b^2)} \cdot (\hat{\varphi}\, a \, d\varphi) =$$

$$\frac{\mu_0 m a^2}{2 \, (a^2+b^2)^{3/2}}$$

④



$I_1 = I_2 = I$

I: $R_1 \cdot \Phi_1 + R_3 \Phi_3 = N_1 I$ $\qquad R_1, R_2, R_3$ är reluktanser

II: $R_1 \Phi_2 - R_3 \Phi_3 = N_2 I$

III: $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$

Reluktanser: $R_1 = \dfrac{l_1}{\mu A_1} = \dfrac{\pi a}{\mu A_1}$ $\qquad R_3 = \dfrac{l_3}{\mu A_3} = \dfrac{2a}{\mu A_3}$

Eliminera Φ_3 ur I o II m.h.a III

$$\begin{cases} R_1 \Phi_1 + R_3(\Phi_1 - \Phi_2) = N_1 I \\ R_1 \Phi_2 - R_3(\Phi_1 - \Phi_2) = N_2 I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi_1 = \frac{N_1(R_1+R_3)+N_2 R_3}{R_1^2 + 2R_1R_3} I$$

$$\Phi_2 = \frac{N_1 \cdot (R_3) + N_2 \cdot (R_1+R_3)}{R_1^2 + 2R_1R_3} I$$

$$\Phi_3 = \Phi_1 - \Phi_2 = \ldots = \frac{(N_1 - N_2) R_1}{R_1^2 + 2R_1R_3} I$$

Numeriska värden:

$a = 7{,}5 \cdot 10^{-2}$ m

$A_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ m^2

$A_3 = 0{,}8 \cdot 10^{-4}$ m^2

$N_1 = 160$

$N_2 = 120$

$I = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ A

$\mu_r = 150$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$

$$\phi_3 = \frac{(N_1 - N_2)I}{R_1 + 2R_3} = \frac{(N_1 - N_2)I}{\frac{\pi a}{\mu A_1} + 2\frac{2a}{\mu A_3}} = 2{,}639 \cdot 10^{-9} \text{ Wb}$$