1 Tenta i komplex analys, F/ Kf och TM, MVE 025 och MVE 295

2013 01 17, 08.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Dawan Mustafa 0703-088304

---

1. a. Beräkna Fouriertransformen av
$$\frac{1}{x^2+2x+2}$$
med hjälp av residykalkyl. (5p)

   b. Använd resultatet till att beräkna
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+2x+2} dx.$$
(2p)

2. Låt $p(z) = z^4 + z^3 + 1$. Visa med hjälp av Rouchés sats att alla p:s nollställen uppfyller $3/4 < |z| < 3/2$. (7p)

3. Beräkna kurvintegralen
$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z - \sinh z}{z^8} dz.$$
(7p)

4. Lös begynnelsevärdesproblemet
$$u'' + 2u' + u = \sin t \quad t > 0,$$
$u(0) = 1$ och $u'(0) = 0$, explicit med hjälp av Laplacetransformen. (Explicit betyder att du inte skall svara med en faltning.) (7p)

5. Avbilda konformt området $\{z; |z| < 1, Re\, z > 0\, , Im\, z > 0\}$ på övre halvplanet.
(7p)

6. Bevisa Cauchy's integralformel. (Du får använda Cauchys integralsats utan bevis.) (5p)

7. Antag att f är holomorf i $\{z; 0 < |z| < 1\}$ och att $|f| \leq 1$ där. Visa att f kan fortsättas till en holomorf funktion i $\{z; |z| < 1\}$. (5p)

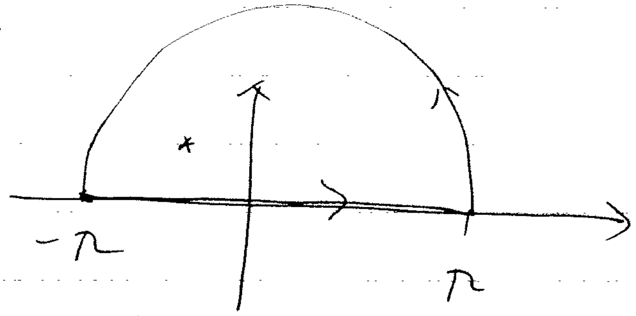
8. Antag att $f = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...$ är holomorf i cirkelskivan $\{z; |z| < R\}$ där $R > 1$, och att $|f| \leq 1$. Visa att $|a_n| \leq 1$ för alla $n = 0, 1, 2....$ (5p)

Lycka till!,
BB

Januari. (2013)

1. $$\hat{u}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixa}}{x^2+2x+2}\,dx$$

Låt $\Gamma_R =$



Låt $$f(z) = \frac{e^{-iza}}{z^2+2z+2}$$

f har en singulär punkt innanför Γ_R om $R >> 1$, nämligen $z = -1+i$

$$\therefore \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, -1+i) =$$

$$= 2\pi i \frac{e^{-i(-1+i)a}}{2(i-1)+2} =$$

$$= \pi e^{a} e^{ia}$$

$$\int_{\Gamma_R} f\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\substack{|z|=R \\ y>0}} f(z)\,dz = I_R + II_R$$

$$\left| II_R \right| \le \pi R \max_{\substack{|z|=R \\ y>0}} |f| \le$$

$$\le \pi R \frac{e^{ya}}{R^2 - 2R - 2} \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

<u>om a < 0.</u>

$$\therefore \hat{u}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \pi e^{a+ia}$$

om a < 0. <u>Om a > 0</u> är

$$\hat{u}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixa}}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= \overline{\hat{u}(-a)} = \overline{\pi e^{-a-ia}} = \pi e^{-a+ia}$$

(eftersom $-a < 0$ om $a > 0$).

$$\therefore \hat{u}(a) = \begin{cases} \pi e^{-a+ia} & a > 0 \\ \pi e^{a+ia} & a < 0 \end{cases} = \pi e^{-|a|+ia}.$$

(Vilket kan kollas mot transl. formeln).

3

1 b) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+2x+2}\,dx = \operatorname{Re} \hat{u}(a) =$$

$$= \pi e^{-|a|} \cos a$$

---

2. $p(z) = z^4 + z^3 + 1$.

(i) Låt $f(z) = z^4$ $\quad h(z) = z^3+1$

På $\{|z| = 3/2\}$ är $|f| = \frac{81}{16}$;

$$|h| \leq \frac{27}{8} + 1 = \frac{35}{8} = \frac{70}{16} < |f|.$$

Rouché $\Rightarrow$ $p = f+h$ har lika många nollställen i $|z| < 3/2$ som f, dvs 4 stycken.

(ii) Låt $f(z) = 1$ $\quad h(z) = z^4 + z^3$.

På $\{|z| = 3/4\}$ är $|f| = 1$;

$$|h| \leq \frac{81}{256} + \frac{27}{64} = \frac{189}{256} < 1.$$

Rouché $\Rightarrow$ $p = f+h$ har lika många nollställen i $|z| < 3/4$ som f, dvs inget.

$p(z)$ har alltså 4 nollställen i $\left\{\frac{3}{4} < |z| < 3/2\right\}$ och kan inte ha något mer nollställe eftersom graden = 4. ☒

(3) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + z^9 g_1.$

$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \dots \qquad e^{-z} = 1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \dots$

$\sinh z = (e^z - e^{-z})/2 =$

$= \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + z^9 g_2(z)$

$\therefore \sin z - \sinh z =$

$= -\left[\frac{z^3}{3!} + \frac{z^7}{7!} + z^9 g(z)\right].$

$\therefore \operatorname{Res}\left[\frac{\sin z - \sinh z}{z^8}, 0\right] =$ koeff. för $\frac{1}{z}$:

$= -\frac{1}{7!}$. Residysatsen $\Rightarrow$

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z - \sinh z}{z^8}\, dz = -\frac{2\pi i}{7!}$$ ☒

$u(0)=1$, $u'(0)=0$.

5.

4. (*) $u''+2u'+u=\sin t \qquad t>0$.

$$\widetilde{u'} = s\tilde{u}-u(0) = s\tilde{u}-1$$

$$\widetilde{u''} = s^2\tilde{u}-u'(0)-su(0) = s^2\tilde{u}-s$$

$$\widetilde{\sin t} = \frac{1}{s^2+1}.$$

$$\therefore (s^2+2s+1)\tilde{u}-s-2 = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\tilde{u} = \frac{s+2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s^2+1)(s+1)^2}$$

Partialbråksuppdela

$$\frac{1}{(s^2+1)(s+1)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2}$$

Handpåläggning $\Rightarrow$ $D = 1/2 \qquad A=-\frac{1}{2}, \quad B=0.$

Därefter bestäms $C=\frac{1}{2}$.

$$\therefore \tilde{u} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s+1}\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}$$

Nv $\bar{m}$

$$\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\left(e^{-t}\right)$$

$$\frac{1}{(s+1)^2} = \mathcal{L}\left(te^{-t}\right)$$

$$\frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}\left(\cos t\right).$$

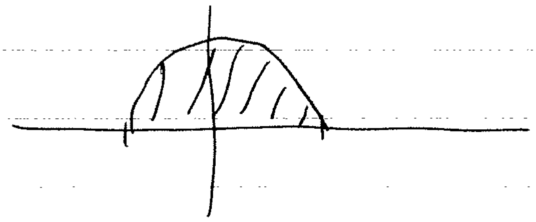
$$\therefore\ u(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}te^{-t} - \frac{1}{2}\cos t$$

答

5. $D = \{z;\ |z|<1,\ \mathrm{Re}\, z>0,\ \mathrm{Im}\, z>0\}$.

$f(z) = z^2$ avbildar D konformt

på $D_1 = \{z;\ |z|<1\ \mathrm{Im}\, z>0\} =$

$=$ 

D_1 begränsas av enhetscirkeln och Re-axeln.

$T(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$ avbildar både enhetscirkeln och Re-axeln på linjer genom origo. Dessa skär varandra i rätvinkel.

Dessutom är $T(z)$ reell om z är reell, så Re-axeln måste avbildas på sig själv. Därför måste bilden av enhetscirkeln (en linje genom origo $\perp$ mot Re-axeln) vara Im-axeln.

Slutligen är $T(i) = \frac{i+1}{i-1} = -i$,

så övre halvplanet avbildas på nedre halvplanet, och

$T(0) = -1$, så enhetsskivan avbildas på vänstra halvplanet.

D_1 = snittet av övre halvplanet med enhetsskivan avbildas därför av T på snittet av nedre & vänstra halvplanet, dvs 3:dje kvadranten.

$g = z^2$ avbildar 3:dje kvadranten på ÖHP.

$\therefore$ $h = g \circ T \circ f = \left(\frac{1+z^2}{-1+z^2}\right)^2$

avbildar D på ÖHP

∎.

8. $$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

enligt residysatsen.

$$\therefore\ |a_n| \le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \max_{|z|=1} \left| \frac{f}{z^{n+1}} \right| \le 1$$

$\blacksquare$