1 Tenta i komplex analys, F/ Kf och TM, MVE 025 och MVE 295

2012 10 25, 08.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Adam Andersson 0703-088304

---

1. Beräkna integralen
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx.$$
(7p)

2. Hur många nollställen har polynomet $p(z) = z^3 + 2z^2 + z + 4$ i vänstra halvplanet? (7p)

3. Bestäm det största R så att funktionen
$$\frac{\sin z}{z^2(z^2-1)}$$
kan Laurentserieutvecklas i ringområdet $\{z; 0 < |z| < R\}$. Bestäm de fem första termerna i utvecklingen.
(7p)

4. Lös med hjälp av Laplacetransformering differentialekvationen
$$u'' + u' - 2u = e^t$$
för $t > 0$, med begynnelsevärden $u'(0) = 1, u(0) = 0$.
(7p)

5. Beräkna för $a > 0$ integralen
$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \sin^2 \theta}$$
med hjälp av residykalkyl. (Observera integrationsgränsen!) (7p)

6. Formulera och bevisa Liouvilles sats. (5p)

7. Formulera och bevisa formeln för residyn av $f = F/G$ i en punkt z_0 där $G(z_0) = 0$ men $G'(z_0) \neq 0$ (5p)

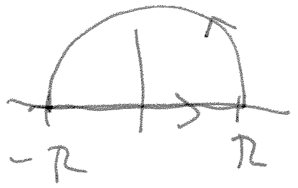
8. Visa att en Möbiusavbildning T avbildar x-axeln på sig själv om och endast om T kan skrivas
$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$
där koefficinterna a, b, c, d är reella. Visa att T avbildar övre halvplanet på sig självt om och endast om dessutom $ad - bc > 0$.
(5p)

Lycka till!,
BB

1. $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)(4+x^2)} \, dx = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)(4+x^2)} \, dx$

($\cos x = (e^{ix}+e^{-ix})/2$ funkar också, men är jobbigare eftersom man då måste välja 2 ~~konturer~~ kurvor att integrera över) $= \lim_{R\to\infty} \mathrm{Re} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)(4+x^2)} \, dx$

Vi vill integrera över en sluten kurva γ_R. Eftersom $|e^{iz}| = e^{-y}$ är begränsad i ÖHP väljer vi

γ_R: 

. Poler i ÖHP: $i, 2i$

$\therefore \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(1+z^2)(4+z^2)} \, dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(i) + \mathrm{Res}(2i) \right)$

$= 2\pi i \left[\frac{e^{-1}}{2i(4+i^2)} + \frac{e^{-2}}{(1+(2i)^2)\,4i} \right] =$

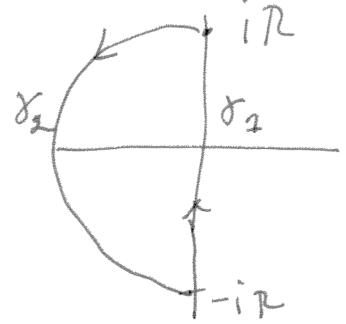
$= 2\pi i \left[\frac{e^{-1}}{6i} - \frac{e^{-2}}{12i} \right] = \pi \left(\frac{e^{-1}}{3} - \frac{e^{-2}}{6} \right).$

Uppsk.: $\left| \int_{\substack{|z|=R \\ y>0}} \frac{e^{iz}}{(\;)(\;)} \, dz \right| \le \frac{1}{(R^2-1)(R^2-4)} \pi R \to 0.$

$\therefore \quad I = \pi \left[\frac{e^{-1}}{3} - \frac{e^{-2}}{6} \right]$

2. $p(z) = z^3 + 2z^2 + z + 4$.

Def γ^R enligt fig:



- $\operatorname{Argvar}(P, \gamma_2) \simeq \operatorname{Argvar}(z^3, \gamma_2) = 3\pi$

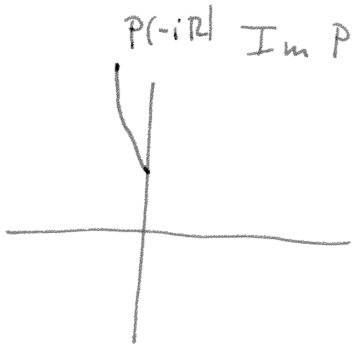
- På γ_1, välj parametrisering $z = it$

$-R < t < R$. $P(it) = -it^3 - 2t^2 + it + 4 =$

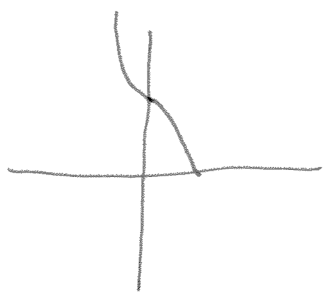
$$= 2(2 - t^2) + it(1 - t^2)$$

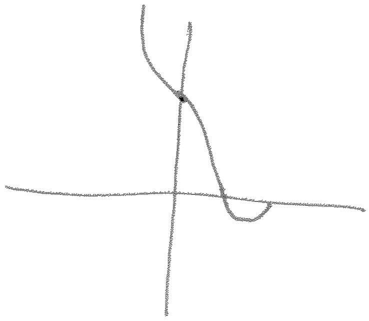
På intervallet $-R < t < -\sqrt{2}$ är $\operatorname{Re} P < 0$ & $\operatorname{Im} P > 0$

- Kurvan ser ut så här:



- På $-\sqrt{2} < t < -1$

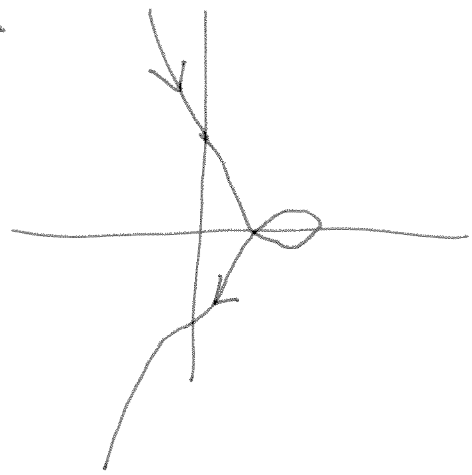




och på $-1 < t < 0$.

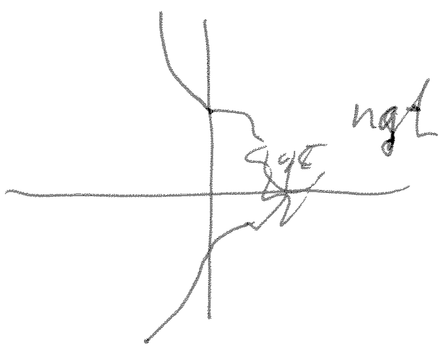
För $t > 0$ samma kurva, fast $\operatorname{Im} P$ byter tecken.

2 (forts). ∴ $P(it)$ ser ut så här



Detta ger $\operatorname{Argvar}(P, \gamma_1) \approx -\pi$.

Den detaljerade analysen är egentligen onödig; det här räcker



Sammantaget: $\operatorname{Argvar}(P, \gamma^R) \approx 3\pi - \pi = 2\pi$, så antalet nollställen är $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$

☐.

3. Laurentutveckla

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z^2-1)} \quad \text{i} \quad 0 < |z| < 1$$

↑ första polen ≠ 0

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \dots \quad \text{(Geom. serie).}$$

$$\therefore f(z) = -\left(\frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots\right)\left(1 + z^2 + z^4 + \dots\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{z} + \left(1 - \frac{1}{6}\right)z + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{6} + 1\right)z^3 + \dots\right)$$

$$= -\frac{1}{z} - \frac{5}{6}z - \frac{101}{120}z^3 + \dots$$

(fem termer eftersom $a_1 = a_2 = 0$).

4. $u'' + u' - 2u = e^t \qquad u'(0) = 1 \qquad u(0) = 0.$

$$\mathcal{L}(u'') = s^2\tilde{u} - su(0) - u'(0) = s^2\tilde{u} - 1$$

$$\mathcal{L}(u') = s\tilde{u} - u(0) = s\tilde{u}$$

$$\therefore (s^2 + s - 2)\tilde{u} - 1 = \frac{1}{s-1}$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{s^2+s-2}\left[\frac{1}{s-1} + 1\right]$$

Partialbråksuppdela: $\tilde{u} = \dfrac{A}{(s-1)^2} + \dfrac{B}{(s-1)} + \dfrac{C}{s+2}$

Här är en smart metod (lånad från en av er!)

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1/3}{s-1} - \frac{1/3}{s+2} \quad (*)$$

$$\therefore \frac{1}{(s-1)(s-1)(s+2)} = \frac{1/3}{(s-1)^2} - \frac{1/3}{(s-1)(s+2)} = [\text{enl. } *]$$

$$= \frac{1/3}{(s-1)^2} - \frac{1/9}{s-1} + \frac{1/9}{s+2}$$

$$\therefore \tilde{u} = \frac{1/3}{(s-1)^2} + \frac{2/9}{s-1} - \frac{2/9}{s+2}$$

$$\therefore u = \frac{1}{3}te^t + \frac{2}{9}\left(e^t - e^{-2t}\right)$$

5. $$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\sin^2\theta} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2} =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{4\,d\theta}{4a-(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}-2)} = \left[\begin{array}{l}\text{Subst.}\\ 2\theta=\varphi\end{array}\right]$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2\,d\varphi}{4a+2-e^{i\theta}-e^{-i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{i\theta}\,d\theta}{(4a+2)e^{i\theta}-e^{2i\theta}-1}$$

$$= -\frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-(4a+2)z+1}$$

Poler: $z_{1,2} = 2a+1 \pm \sqrt{4a^2+4a}$

$z_1 = 2a+1+\sqrt{4a^2+4a} > 1$ ligger utanför enhetscirkeln.

Ligger z_2 innanför? Ja, för annars blir $\int = 0$ vilket är omöjligt för integranden är positiv.

$$\therefore I = -\frac{2}{i}\,2\pi i\,\text{Res}(\dots, z_2) = -4\pi \left.\frac{1}{2z_2-(4a+2)}\right|_{z_2} =$$

$$= \frac{4\pi}{2\sqrt{4a^2+4a}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+a}}$$

8. Svårigheten är att visa att om $T(z)$ ~~[illegible]~~ avbildar $\mathbb{R}$ på $\mathbb{R}$ så kan T skrivas $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ där alla $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. (Obs. att det inte är automatiskt eftersom ia, ib, ic, id def samma avbildning.) Här är ett sätt att se det.

I, antas först att $T(\infty) = \infty$.

Då är $T(z) = (az+b)/c = a'z+b'$

$T(0) \in \mathbb{R} \Rightarrow b' \in \mathbb{R}$. $T(1) \in \mathbb{R} \Rightarrow a'+b' \in \mathbb{R}$

$\therefore a', b' \in \mathbb{R}$ $\blacksquare$

II antag sedan motsatsen, dvs $T(\infty) = e \in \mathbb{R}$

Låt $S(w) = \frac{1}{w-e}$ & $U(z) = S \circ T$.

Då gäller $U(\infty) = \infty$ så U kan skrivas med reella koeff. enl. I.

Alltså kan $T = S^{-1} \circ U$ också skrivas med reella koeff. $\blacksquare$

III Återstår att visa ~~att~~ T avbildar ÖHP på sig självt omm $ad-bc>0$.

~~Därav~~ Men T: ÖHP $\circlearrowleft$ omm $T(i) \in$ ÖHP

$$T(i) = \frac{(ai+b)(d-ic)}{d^2+c^2} = \frac{\ldots + i(ad-bc)}{d^2+c^2}$$

$\blacksquare$