# 1 Tenta i komplex analys, F/ Kf och TM, MVE 025 och MVE 295

2012 01 13, 08.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Telefonvakt Martin Berglund 0703-088304

---

1. a) Beräkna integralerna
$$\int_{|z|=1} \frac{z^4}{4z^2-1} dz$$
(3p)
b)
$$\int_{|z|=1} \frac{z^2}{4z^4-1} dz.$$
(4p)

2. Beräkna Fouriertransformen av funktionen
$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}.$$
(7p)

3. Visa att ekvationen
$$z + e^{-z} = 2$$
har exakt en lösning i högra halvplanet.
(7p)

4. a) Använd Laplacetransformering för att ge en lösningsformel för differentialekvationen
$$u''(t) + u(t) = f(t), \quad t > 0,$$
med begynnelsevärdena $u(0) = 1$ och $u'(0) = 0$. (5p)
b) Vad blir lösningen explicit när $f(t) = 1$ för $t < 1$ och $f(t) = 0$ för $t \geq 1$? (2p)

5. Bestäm en konform avbildning från området
$$\{z \in \mathbb{C}; |z-1| < \sqrt{2}, |z+1| < \sqrt{2}\}$$
till det högra halvplanet.
(7p)

6. a) Definiera den komplexa derivatan av en funktion definierad i ett område i det komplexa planet. (1p)
b) Visa att om funktionen $f$ har en komplex derivata i en punkt $a \in \mathbb{C}$ så uppfyller $f$ Cauchy Riemanns ekvationer i den punkten. (4p)

7. Låt $f$ vara holomorf i området $\{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ där $R > 0$. Visa att $f$ har en Taylorutveckling
$$f(z) = \sum a_k z^k$$
där och ge en formel för koefficienterna $a_k$. (5p)

8. Bestäm alla funktioner $f$ som är holomorfa i hela det komplexa planet och uppfyller olikheten
$$|f(z)| \leq e^x,$$
där $z = x + iy$.
(5p)

Lycka till!,
BB

MVE 025 & 295; 13/1 -12

Lösningar:

1 a) Låt $f = \dfrac{z^4}{4z^2-1}$

integralen är $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \sum \text{Res}$

$f = \dfrac{z^4}{g(z)}$ $\quad g(z) = 0$ för $z = \pm \frac{1}{2}$

$\text{Res}(f, \frac{1}{2}) = \dfrac{(\frac{1}{2})^4}{g'(\frac{1}{2})} = \dfrac{1/16}{4} = \dfrac{1}{64}$

$\text{Res}(f, -\frac{1}{2}) = \dfrac{(-\frac{1}{2})^4}{g'(-\frac{1}{2})} = \dfrac{-1}{64}$

$\because \sum \text{Res} = 0$ ; $\Rightarrow \displaystyle\int_{|z|=1} f\,dz = 0.$

b) Denna uppgift kan lösas på liknande sätt (residuer i $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\pm \frac{i}{\sqrt{2}}$)

men här är en annan möjlighet:

Eftersom alla poler till $f := \dfrac{z^2}{4z^4-1}$ ligger innanför

Konturen är

$$\int_{|z|=1} f\,dz = \int_{|z|=R} f\,dz \quad \text{om} \quad R>1.$$

~~Nät~~ Men

$$\left|\int_{|z|=R} f\,dz\right| \le \frac{R^2}{4R^4-1}\cdot 2\pi R \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\therefore \int_{|z|=1} f\,dz = 0.$$

* * * *

Alternativt följer både a) & b) av:

<u>Prop.</u> Låt $f$ vara en holo jämn funktion $f(z)=f(-z)$, på kurvan $|z|=1$. Då är $\int_{|z|=1} f\,dz = 0$.

<u>bev.</u> $\text{int} = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, i e^{i\theta}\, d\theta = [\theta=\varphi+\pi]$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} f(-e^{i\varphi})\, i e^{i\varphi}\, d\varphi = -\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\, i e^{i\varphi}\, d\varphi$$

$$\therefore \int = 0.$$

2). $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$

Låt $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Vi vet att $\hat{g}(a) = \pi e^{-|a|}$

(genom en residueräkning som står i boken).

$\therefore \hat{f}(a) = \left( \int \frac{e^{ix} e^{-ix\cdot a}}{1+x^2} - \int \frac{e^{-ix} e^{-ixa}}{(1+x^2)} \right) \cdot$

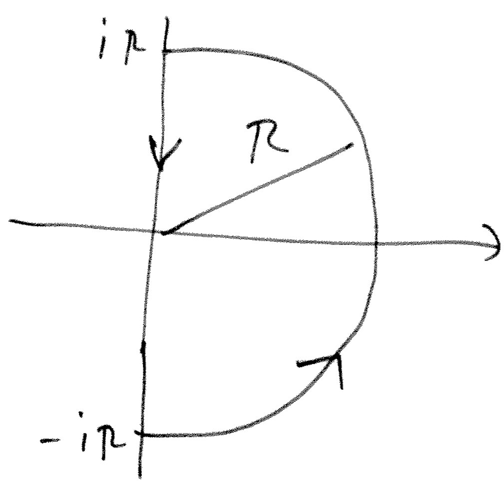
$\cdot \frac{1}{2i} =$

$= [\hat{g}(a-1) - \hat{g}(a+1)]/2i =$

$= \frac{\pi}{2i} \left[ e^{-|a-1|} - e^{-|a+1|} \right]$

Ⓚ

3: Låt $\Gamma_R$ vara konturen




Om $R$ stort ligger alla lösn. till

$$z + e^{-z} = 2$$

innanför $\Gamma_R$ ty

$$|z + e^{-z}| \geq R - |e^{-z}| \geq R - 1 > 2$$

om $|z| > R > 2$.

För att beräkna # lösn. innanf. $\Gamma_R$ använder vi Rouché:

Låt $f(z) = z - 2$, $g(z) = e^{-z}$

På $\Gamma_R$:

$$|f(z)| \geq R - 2 \qquad (|z| = R)$$

$$|f(z)| \geq \sqrt{iy+4} \geq 2 \qquad (z = iy).$$

$$|g(z)| \leq 1 \qquad (\text{ty } \operatorname{Re} z > 0).$$

5.

$\therefore$ $f$ o $f+g$ har lika många nollst. innanför $\Gamma_R$

Eftersom $z-2$ har ett nollst. gäller samma sak för

$z-2+e^{-z}$.

$\boxtimes$

4. Laplacetransf. ger:

$$s^2 \tilde{u} - s u(0) - u'(0) + \tilde{u} = \tilde{f}$$

Begynnelsevärdena: $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$.

$$\therefore \quad (s^2+1)\tilde{u} = \tilde{f} + s$$

$$\therefore \quad \tilde{u} = \tilde{f} \cdot \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}$$

Nu vet vi att

$$\frac{s}{s^2+1} = \widetilde{\cos t} \quad ; \quad \frac{1}{s^2+1} = \widetilde{\sin t}$$

$$\therefore \quad u = f * \sin + \cos t.$$

Här är

$$f * \sin(t) = \int_0^t f(s) \sin(t-s)\, ds$$

(obs: inte $f \cdot \sin t$ !! )

b) $f = \begin{cases} 1 & t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$

gen

$$f * \sin(t) = \int_0^1 \sin(t-s)\, ds =$$

$$= \cos(t-s)\Big|_{s=0}^{s=1} = \cos(t-1) - \cos t$$

om $t \geq 1$ !

$$f * \sin t = \int_0^t \sin(t-s)\, ds = \cos(t-s)\Big|_0^t =$$

$$= 1 - \cos t$$ om $t \leq 1$ !

Det går inte att lösa uppg. separat för $t < 1$ & $t > 1$

8

5. Cirklarna $|z-1|=\sqrt{2}$ &

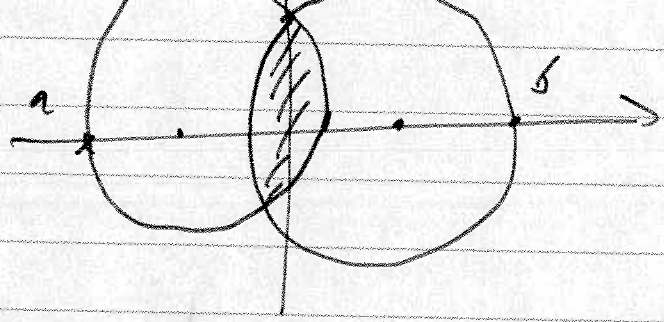
$|z+1|=\sqrt{2}$

skär varandra då

$(x-1)^2+y^2=2$ & $(x+1)^2+y^2=2$

$\Rightarrow x=0 \Rightarrow y=\pm 1 \therefore z=\pm i$

$\therefore$ Området är




Tag en Möbiusavb. som avbildar skärningspt på 0, resp $\infty$.

$F(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$. Då går var och

en av cirklarna på en

linje genom origo. Vilka linjer?

$F(a)=F(-1-\sqrt{2})=\dfrac{i-1-\sqrt{2}}{-i-1-\sqrt{2}}=$

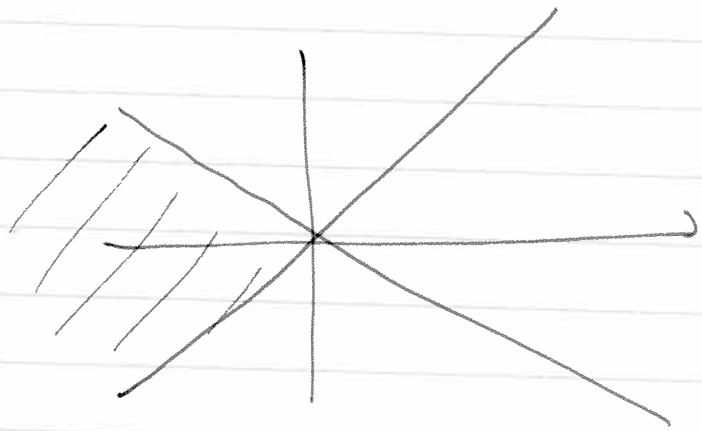
$=\dfrac{(1+\sqrt{2}-i)(1+\sqrt{2}-i)}{(1+\sqrt{2})^2+1^2}=\dfrac{(1+\sqrt{2})^2-1-2i(1+\sqrt{2})}{2+2+2\sqrt{2}}$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{2} - i(2 + 2\sqrt{2})}{\text{ngt}}$$

$\therefore$ $F(a)$ har arg. $-\frac{\pi}{4}$

P.s.s. $F(b)$ — " — $\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ Linjerna är



Delar planet i 4 delar. Vi letar efter delen som innehåller $F(0) = -1$; det skuggade området i bilden. $w \to w^2$ avbildar

$\left\{\frac{3\pi}{4} < \arg w < \frac{5\pi}{4}\right\} \to \left\{z \,;\, \frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}\right\}$

= högra halvplanet.

$\therefore$ $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2$ duger.

9

8. $|f(z)| \leq e^x = |e^z|$

$\therefore \quad |e^{-z} f(z)| \leq 1.$

Men $e^{-z} f(z)$ är en

hel funktion så $e^{-z} f(z) = c$.

$\therefore \quad f(z) = c e^{+z}$ där

$c$ konstant $|c| \leq 1$.

$\boxed{\text{Q.E.D.}}$