definition
remark
equationsection

MVE025/MVE 295

1 Tenta i komplex analys, F/ Kf och TM

2011 10 20, 14.00-18.00

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Peter Helgesson, 0703/088304

---

1. a) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)(4+x^2)} dx$$

b) Beräkna Fouriertransformen av

$$\frac{x}{(1+x^2)(4+x^2)}.$$

2. a) Bestäm Laurentserieutvecklingen av

$$f(z) = \frac{z}{(z+2)(z-3)}$$

kring origo i området $2 < |z| < 3$.

b) I vilka områden har f en Laurentserieutveckling kring punkten 1? (Du behöver inte bestämma utvecklingen.)

3. a) Hur många nollställen har polynomet

$$z^5 - 3z^4 + 2z - 1$$

i vänstra halvplanet?

b) samma uppgift för polynomet

$$z^5 + 3z^4 + 2z + 1.$$

4. a) Avbilda konformt området

$$\{z; \mathrm{Im}\,(z) > 0, |z| < 1\}$$

på övre halvplanet.

b) samma uppgift för området

$$\{w; 0 < \mathrm{Im}\,(w) < \pi, \mathrm{Re}\,(w) < 0\}.$$

5. Låt f vara holomorf för $|z| < R$, där $R > 1$, och låt $|z| < 1$.

a) Visa att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1 - e^{-i\theta} z} d\theta.$$

b) Visa att

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta}) \bar{z} e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} \bar{z}} d\theta.$$

c) Visa Poissons formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{i\theta}|^2} d\theta.$$

VÄND!

6. Låt P vara ett polynom av grad n med endast enkla nollställen, a_j. Visa att om f är en hel funktion och $|z| < R$ där R är tillräckligt stort så är

$$Q(z) := f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{P(z)}{P(w)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

ett polynom av grad högst n sådant att $Q(a_j) = f(a_j)$, $j = 1, ...n$.

7. Formulera och bevisa Cauchys integralformel.

8. Formulera och bevisa Rouchés sats.

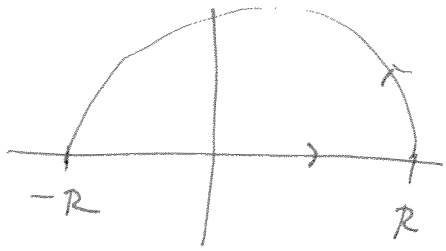
Lycka till!,
BB

1. Beräkna först

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{iax}}{(1+x^2)(4+x^2)}\,dx \quad \text{för} \quad a>0.$$

Låt γ_R vara en kurva enligt fig

Sätt $f(z) = \dfrac{z e^{iaz}}{(1+z^2)(4+z^2)}$



Om $\operatorname{Im} z \geq 0$ så $|e^{iaz}| = e^{-ay} \leq 1$.

$$\therefore \; |f(z)| \leq \frac{|z|}{|z^2+1|\,|z^2+4|} \leq \frac{R}{(R^2-1)(R^2-4)} \quad (1)$$

om $|z| = R >> 4$.

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, 2i) \right] =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{i\, e^{-a}}{2i(4-1)} + \frac{2i\, e^{-2a}}{4i\,(1-4)} \right] =$$

$$= \pi i \left[\frac{e^{-a}}{3} - \frac{e^{-2a}}{3} \right]$$

$$(1) \Rightarrow \left| \int_{\substack{z=Re^{i\theta} \\ 0<\theta<\pi}} f(z)\,dz \right| \leq \frac{\pi R^2}{(R^2-1)(R^2-4)} \longrightarrow 0.$$

$$\therefore\ I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \lim \int_{\gamma_R} f(z)\,dz =$$

$$= i\pi \left[\frac{e^{-a}}{3} - \frac{e^{-2a}}{3} \right]. \qquad a > 0.$$

Observera sedan att eftersom $x\cos ax$ är udda så gäller

$$I = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx,$$ som byter tecken då a byter tecken.

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \operatorname{sign}(a)\, i\pi \left[\frac{e^{-|a|}}{3} - \frac{e^{-2|a|}}{3} \right]$$

$$\& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{3}\left[e^{-1} - e^{-2} \right].$$

2. a) Partialbråksuppdelning ger

$$f = \frac{z}{(z+2)(z-3)} = \frac{2}{5}\frac{1}{z+2} + \frac{3}{5}\frac{1}{z-3}$$

$$|z|>2 \Rightarrow \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_0^\infty \frac{(-2)^k}{z^k} =$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^k 2^k}{z^{k+1}}$$

$$|z|<3 \Rightarrow \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-z/3} = -\frac{1}{3}\sum_0^\infty \frac{z^k}{3^k}$$

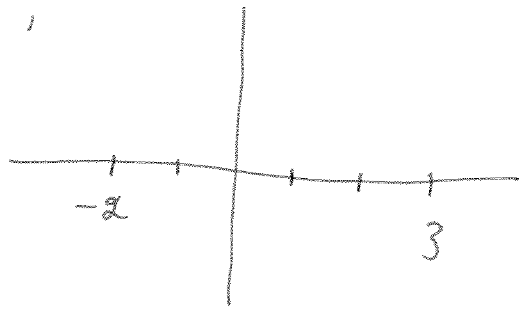
$$= -\sum_0^\infty z^k/3^{k+1}$$

$$\therefore\ f = \frac{1}{5}\left(\sum_0^\infty (-1)^k \frac{2^{k+1}}{z^{k+1}} - \sum_0^\infty \frac{z^k}{3^k}\right).$$

b) f har poler i $z=-2$ & $z=3$

f är alltså holomorf i

ringområdena



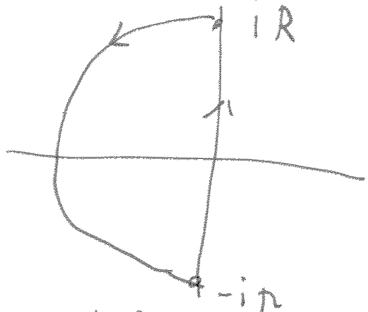
I $\quad |z+1|<2$

II $\quad 2<|z+1|<3$

III $\quad 3<|z+1|$

och kan L-serieutvecklas där.

3a) $p(z) = z^5 - 3z^4 + 2z - 1$
har argumentvariation $\simeq 5\pi$ på halvcirkeln
i fig. om $R >> 0$.

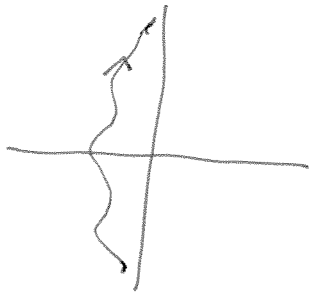


på intervallet på Im-
axeln är $z = it$ &

$p(z) = -3t^4 - 1 + i(t^5 + 2t) = x(t) + iy(t)$

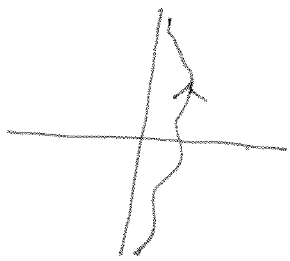
här är $x(t) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
När $z = -iR$ är argumentet nästan $-\frac{\pi}{2}$
När $z = +iR$ - " ——— $\pi/2$.

$\therefore$ argvar på $[-iR, iR] \simeq -\pi$



Totala variationen är alltså
$5\pi - \pi = 4\pi$ & antalet nollst.
$= \frac{4\pi}{2\pi} = 2$.

b) $q(z) = z^5 + 3z^4 + 2z + 1$. Då blir motsv.
kurva, så argvar $= \pi$



Totala variationen $= 6\pi$ &
antalet nollställen $= 3$.

Obs. $q(z) = -p(-z)$, så q har lika
många nollställen i vänstra HP som
p har i högra.

4 a)

(i) avbilda -1 på 0 & 1 på ∞:

$$T(z) = \frac{z+1}{1-z}$$

Då går Re-axeln på Re-axeln

$$T(i) = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$$

$\therefore$ övre halvplanet $\to$ övre halvplanet.

enhetscirkeln går på en linje genom origo som innehåller $T(i) = i$, dvs Im-axeln. $T(0) = 1 \Rightarrow$

$\{|z|<1\} \longrightarrow$ Högra halvplanet.

(ii) Halvcirkeln avbildas alltså på snittet av högra & övre halvplanet, dvs 1:sta kvadranten.

$$z \to T(z)^2 = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$$

avbildar alltså halvcirkelskivan på övre halvplanet.

b). $w \to e^w$ avbildar på förra området.

$$\therefore f(w) = T(e^w) = \left(\frac{1+e^w}{1-e^w}\right)^2$$

5 a) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1-e^{-i\theta}z}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})\, i e^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}-z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{f(w)\,dw}{w-z} = f(z), \text{ enligt}$$

Cauchys integralformel.

b) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})\,\bar{z}\, e^{i\theta}\, d\theta}{1-e^{i\theta}\bar{z}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{f(w)\,\bar{z}w}{1-\bar{z}w}\,dw = 0$$

enligt Cauchys integralsats.

c) Addera!

6. Lösning 1: Residysatsen ger

$$I(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} \frac{P(z)}{P(w)} \, \frac{f(w)}{w-z}\, dw =$$

$$= \sum \mathrm{Res} = f(z)\frac{P(z)}{P(z)} + \sum_j \frac{P(z)}{P'(a_j)} \, \frac{f(a_j)}{a_j - z}$$

$$=: f(z) + Q(z)$$

Eftersom $P(a_j) = 0$ är $P(z)/(a_j - z)$ ett polynom, så Q är ett polynom.

Eftersom $P(a_j) = 0$ blir $I(a_j) = 0$ eftersom I är delbar med P.

Lösning 2:

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} \frac{P(z) - P(w)}{w-z} \, \frac{f(w)}{P(w)}\, dw +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} \frac{f(w)}{w-z}\, dw =: R(z) + f(z)$$

Men $\frac{P(z)-P(w)}{w-z}$ är ett polynom i z, så R också.