MVE025 (samt TMA252, TMA253)
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F / Kf
Datum: 2009-08-19, kl. 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvakterna.
Telefonvakt: , tel. 0762-721861, besöker salen ca 9.30 och 11.30.
==

1. Finn alla värden av uttrycket

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}. \qquad (4p)$$

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax + 2\sin ax}{x^2+2x+2}\,dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (8p)

(b) Beräkna $\hat{f}$, där $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ är Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2p)$$

3. Bestäm antalet lösningar till ekvationen $z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2 = 0$ i
(a) den öppna enhetsskivan; (2p)
(b) det högra halvplanet. (5p)

4. Se nästa sida.

5.(a) Visa att funktionen $f(z) = \sin\frac{z+1}{z-1}$ är analytisk i den öppna enhetsskivan $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ och har oändligt många nollställen i den. (4p)

(b) Förklara varför det inte finns någon funktion som är analytisk i den slutna enhetsskivan och har oändligt många nollställen i den. (4p)

6. Funktionerna f och g är analytiska i området D och sådana att $f(z)g(z) = 0$ för alla $z \in D$. Visa att antingen $f(z) = 0$ för alla $z \in D$, eller $g(z) = 0$ för alla $z \in D$. (5p)

7. Formulera och bevisa Moreras sats. (5p)

8. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

MVE025 (4p, F fr.o.m. 05/06, Kf fr.o.m. 07/08) 4. Avbilda konformt på det övre halvplanet området

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 2\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z + i| < 2\}. \qquad (6p)$$

TMA253 (3p, Kf, 05/06, 06/07) 4. Avbilda konformt på det övre halvplanet området

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 2\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z + i| < 2\}. \qquad (6p)$$

TMA252 (3p, F & Kf, fram till 04/05) 4. Ange Laurentutvecklingen kring $z_0 = -2$ för funktionen

$$f(z) = \frac{z}{(z+3)(z+5)},$$

i det område som innehåller punkten 0. (6p)

/JM

MVE025 (TMA252, TMA253)

Komplex matematisk analys F/Kf

19/8 - 2009

Lösningar

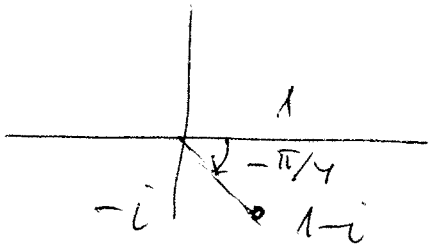
1.

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} = e^{(1+i)\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)} =$$

$$= e^{(1+i)\left(\ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right| + i\arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)} =$$

$$= e^{(1+i)(\ln 1 + i\arg(1-i))}$$

$$= e^{(1+i)\,i\,(-\frac{\pi}{4}+\underline{\underline{2k\pi}})} =$$



$$= e^{+\frac{\pi}{4}(i-1)(8k-1)} =$$

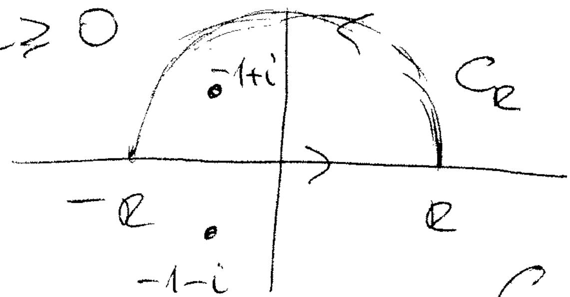
$$= e^{-\frac{\pi}{4}(1-i)(8k-1)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(kan även uttryckas i sin/cos)

---

2. (a) Sätt $f(z) = \dfrac{e^{iaz}}{z^2+2z+2}$

$a \geq 0$



$\Gamma_R = C_R \cup [-R, R]$

(R tillräckligt stort)

$C_R: \quad z = Re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

$z^2+2z+2 = (z+1)^2+1 = 0$

nollställen: $z_{1,2} = -1 \pm i \quad (R > \sqrt{2})$

enkelpoler till f

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{-1+i} f = 2\pi i \left.\frac{e^{iaz}}{2z+2}\right|_{-1+i} =$$

$$= 2\pi i \,\frac{e^{ia(-1+i)}}{-\cancel{2}+2i+\cancel{2}} = \pi e^{-a}\cdot e^{-ia}$$ 2

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{x^2+2x+2}\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+2z+2}\,dz$$

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+2z+2}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{Ri\,e^{iaR(\cos\varphi+i\sin\varphi)}}{R^2e^{2i\varphi}+2Re^{i\varphi}+2}\,e^{i\varphi}\,d\varphi\right|$$

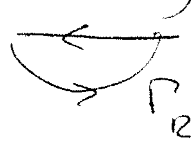
$$\le R\int_0^{\pi} \frac{\underbrace{\left|e^{iaR\cos\varphi}\right|}_{=1}\cdot \underbrace{e^{-aR\sin\varphi}}_{\le 1}}{R^2-2R-2}\cdot 1\,d\varphi$$

$$\le \frac{R\pi}{R^2-2R-2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,, \quad \text{ty} \begin{cases} a\ge 0 \\ \sin\varphi \ge 0 \\ \text{i } [0,\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+2x+2}\,dx = \pi e^{-a}\cdot e^{-ia}, \quad a\ge 0$$

Re: $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+2x+2}\,dx = \pi e^{-a}\cos a \quad (a\ge 0)$$

Im: $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x^2+2x+2}\,dx = -\pi e^{-a}\sin a \quad (a\ge 0)$$

$a<0$: antingen analogt  ,

eller $\cos ax = \cos|a|x$

$\sin ax = -\sin|a|x$ $\quad a<0$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+2x+2} = \pi e^{-|a|}\cos a$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x^2+2x+2} = -\pi e^{-|a|}\sin a \qquad a\in\mathbb{R}$$

Den sökta integralen blir

$$\pi e^{-|a|}(\cos a - 2\sin a)$$

(b) $$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx$$

Sätt $a = -\xi$ in i resultatet från (a)

$$\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}(\cos\xi + i\sin\xi)$$

---

3 (a) Sätt $f(z) = -5z^4$

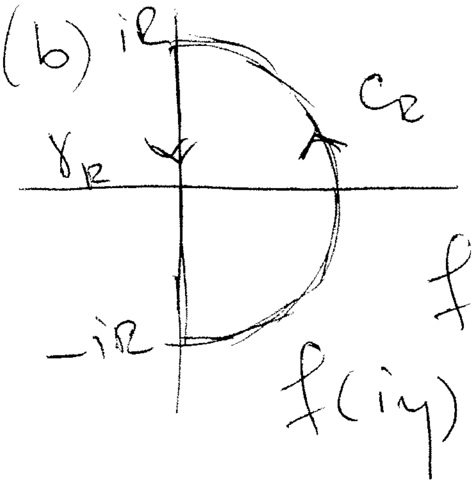
$g(z) = z^7 + iz^2 - 2$

$$|f|\Big|_{|z|=1} = 5$$

$$|g|\Big|_{|z|=1} \le \left(|z|^7 + |iz^2| + |-2|\right)\Big|_{|z|=1} \le 4 < 5$$

$\Rightarrow$ f och $f+g$ har lika många nollställen innanför $\{|z|=1\}$, d.v.s. 4 st., enligt Rouchés sats

(b)



$\Gamma_R = C_R \cup \gamma_R$

$\gamma_R: \quad z = iy, \quad y \in \overleftarrow{[-R, R]}$

$$f(z) = z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2$$

$$f(iy) = -iy^7 - 5y^4 - iy^2 - 2$$

$u = \operatorname{Re} f(iy) = -5y^4 - 2 < 0 \quad \forall y$ (4)

$v = \operatorname{Im} f(iy) = -y^7 - y^2 = y^2(-1)(y^5+1)$

$v = 0 \quad : \quad y = 0$ och $y = -1$

$(y \in \mathbb{R})$

$u \xrightarrow[R \to \pm\infty]{} -\infty \qquad v \xrightarrow[R \to +\infty]{} -\infty$

$v \xrightarrow[R \to -\infty]{} +\infty$

$|v| \gg |u|$ för stora R

$\Rightarrow$ $f(\gamma_R)$ börjar och slutar nära Im-axeln

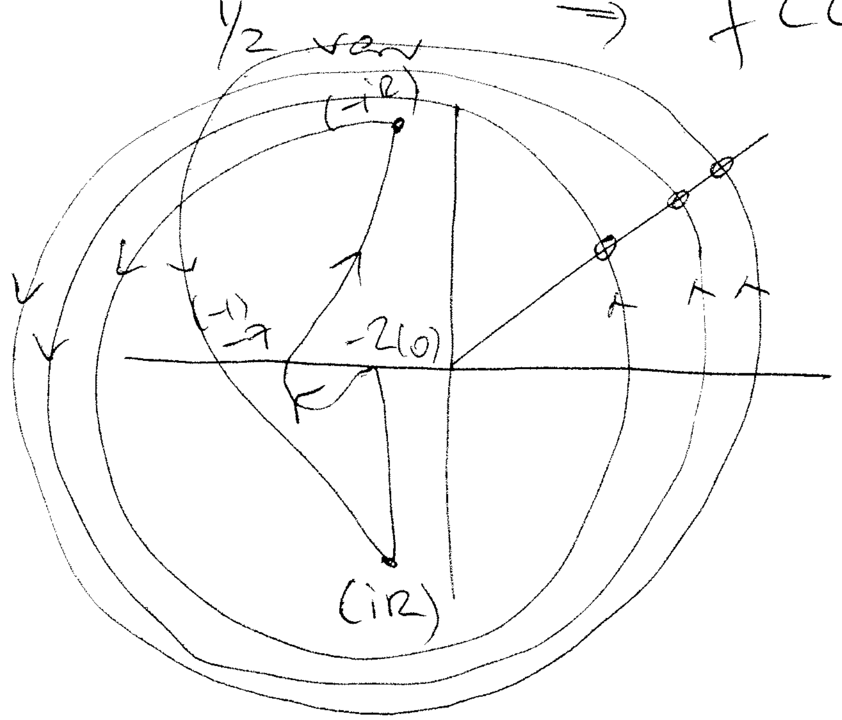
f \ y	$-\infty$	$-R$		-1		0		R	∞
u	$-$	$-$		-7	$-$	-2	$-$	$-$	$-$
v	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$-$	$-$	$-$

$C_R: \quad f(Re^{i\varphi}) = R^7 e^{7i\varphi}\left(1 + \frac{\cdots}{R}\right)$

$\frac{\cdots}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

$\underbrace{-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}}_{1/2 \text{ varv}}$

$\Rightarrow f(C_R)$ gör $\approx 3{,}5$ varv runt origo



$\Rightarrow$ tre nollställen i hhp

5. (a) $\frac{z+1}{z-1}$ analytisk i $\{|z|<1\}$ (5)

$\sin$ analytisk i $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \sin\frac{z+1}{z-1}$ analytisk i $\{|z|<1\}$

$\sin\frac{z+1}{z-1} = 0 \iff \frac{z+1}{z-1} = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\iff z+1 = k\pi z - k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\iff (k\pi - 1)z = k\pi + 1,\ k\in\mathbb{Z}$

$\iff z = z_k = \frac{k\pi+1}{k\pi-1},\ k\in\mathbb{Z}$

$|z_k| < 1$ för $k<0$

$\Rightarrow$ funktionen har oändligt många nollställen i $\{|z|<1\}$

(b) Oändligt många pkter i $\{|z|\le 1\}$ måste ha en hopningspkt i $\{|z|\le 1\}$, som också skulle vara nollställe till f (ty f kontinuerlig), och ett icke-isolerat nollställe, vilket är omöjligt.

---

6. $f(z)g(z) = 0 \quad \forall z\in D$

$\iff \forall z\in D$ $f(z) = 0$ eller $g(z) = 0$

Antag $\exists z_0\in D$ s.a. $f(z_0)\neq 0$

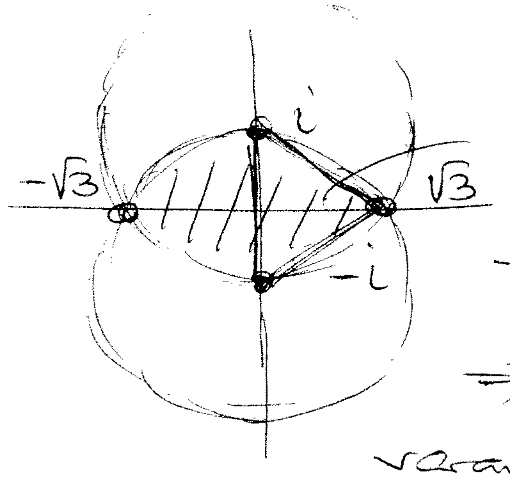
$\Rightarrow f \neq 0$ i en omgivning till z_0

$\Rightarrow g = 0$ i en omgivning till z_0

$\Rightarrow g \equiv 0$ i D

4. 6

(z)



liksidig △ med sidan 2 $\Rightarrow$ höjden $= \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ cirklarna skär varandra i $\pm\sqrt{3}$

skicka den ena skärningspunkten i ∞; den andra i 0!

(z_1) $$z_1 = \frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}$$

$\sqrt{3} \mapsto \infty$

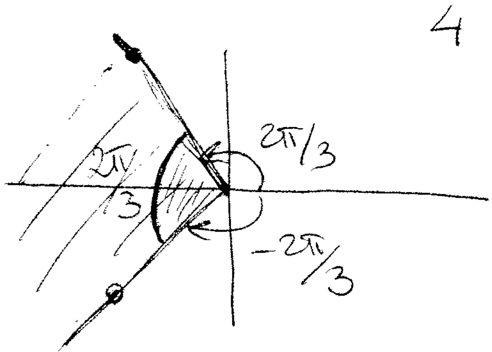
$-\sqrt{3} \mapsto 0$ $\Rightarrow$ båda cirklarna avbildas på räta linjer genom 0

$$i \mapsto \frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}} = \frac{-(i+\sqrt{3})^2}{(i-\sqrt{3})(-i-\sqrt{3})} = \frac{-(-1+2i\sqrt{3}+3)}{4} = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$$

$\in$ III kv. $\operatorname{Arg} = -2\pi/3$

$$-i \mapsto \frac{-i+\sqrt{3}}{-i-\sqrt{3}} = \frac{i-\sqrt{3}}{i+\sqrt{3}} = \frac{(i-\sqrt{3})^2\cdot(-1)}{(i+\sqrt{3})(-i+\sqrt{3})} = -\frac{-1-2i\sqrt{3}+3}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\in$ II kv. $\operatorname{Arg} = 2\pi/3$



$0 \mapsto -1 \in$ mängden

rotera & öppna vinkeln

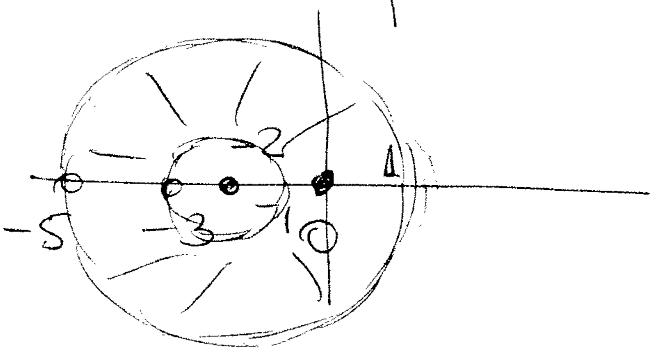
$$w = \left(e^{-i\,2\pi/3} z_1\right)^{3/2}$$

41. (skiss)

$$\frac{z}{(z+3)(z+5)} = \frac{A}{z+3} + \frac{B}{z+5}$$

7

singulariteter i -3 och -5



utveckla i

$$1 < |z+2| < 3$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{1+(z+2)} = \frac{1}{z+2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z+2}} =$$

$$= \frac{1}{z+2}\left(1 - \frac{1}{z+2} + \frac{1}{(z+2)^2} - \dots\right)$$

konvergent för $\left|\frac{1}{z+2}\right| < 1$

$$\frac{1}{z+5} = \frac{1}{3+(z+2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z+2}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{z+2}{3} + \left(\frac{z+2}{3}\right)^2 - \dots\right)$$

konvergent för $\left|\frac{z+2}{3}\right| < 1$.